Geometria Analítica

Engenharias

Semana 04 – Aula 2
Interpretação geométrica do produto vetorial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Interpretação geométrica

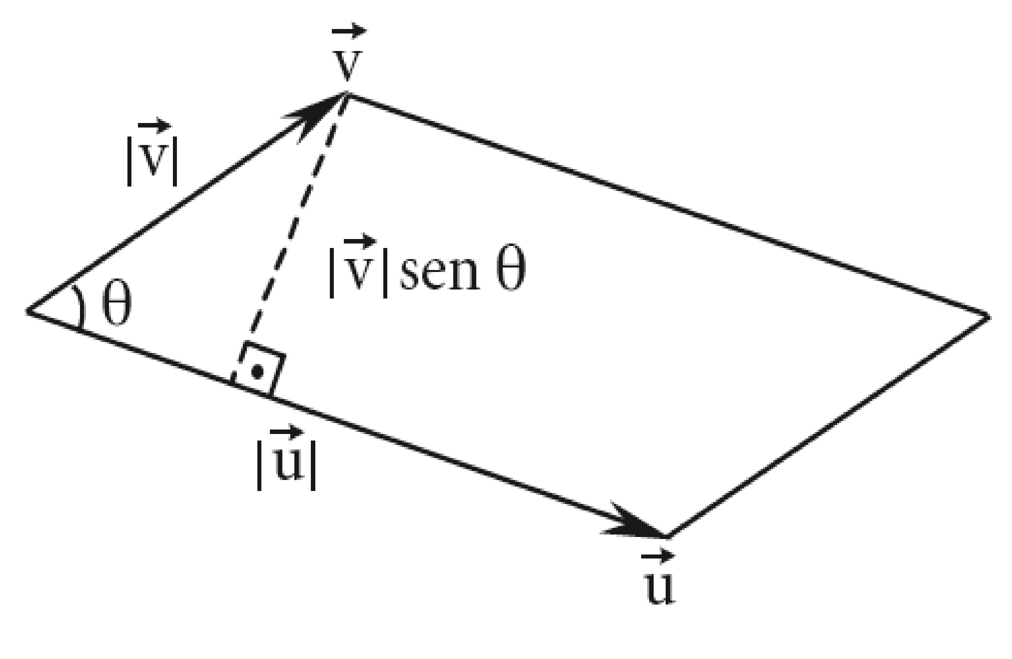


Figura 3.5

Área do paralelogramo

$$A = Base \times altura$$

Interpretação geométrica

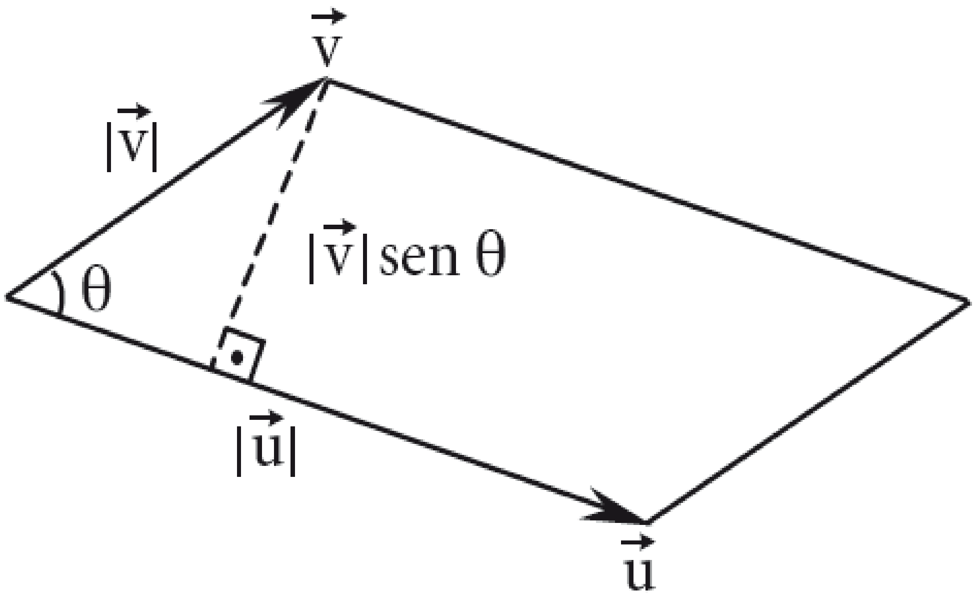


Figura 3.5

Área do paralelogramo

$$A = Base \times altura$$

$$A = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta$$

Interpretação geométrica

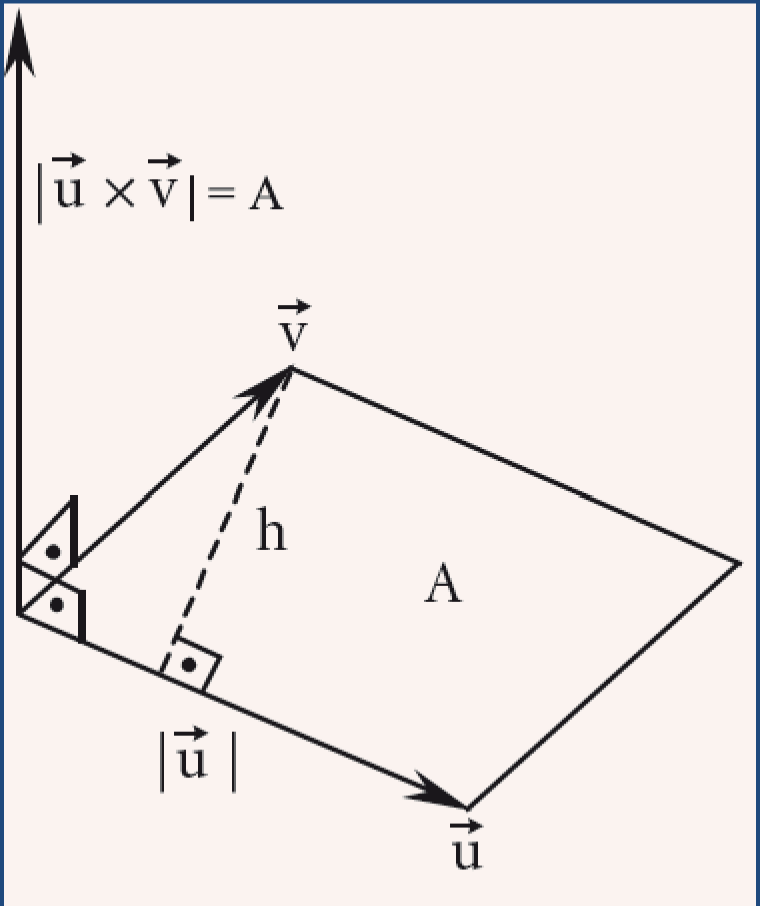


Figura 3.8

Identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Interpretação geométrica

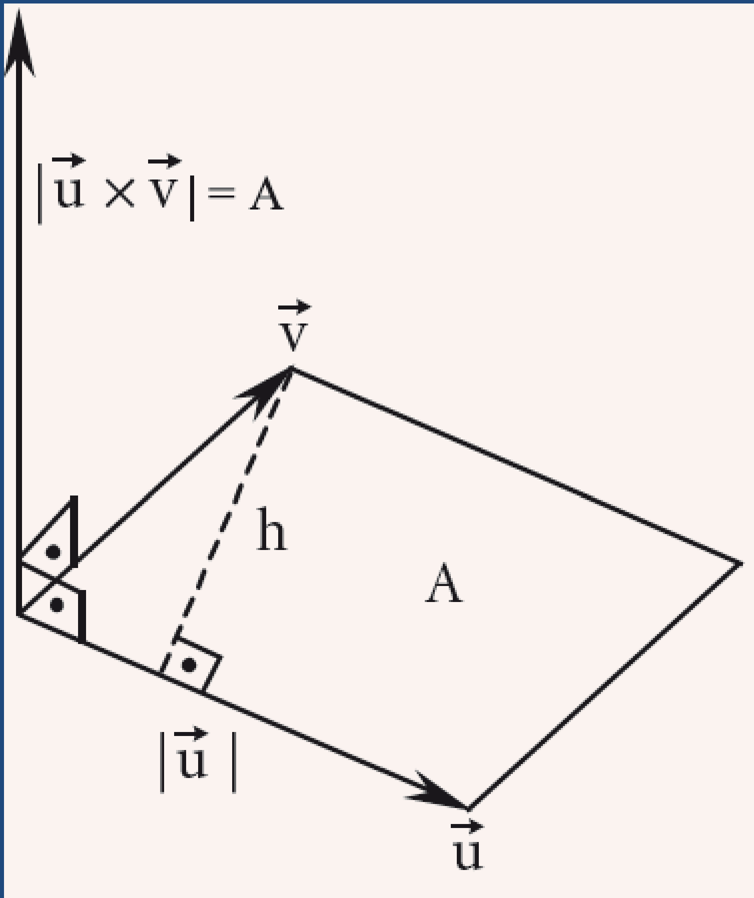


Figura 3.8

Identidade de Lagrange

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$$

Exercício:
Desenvolver o lado esquerdo e chegar na relação:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|sen\theta = A$$

Exemplo 1

Determine o $|\vec{u} \times \ \vec{v}|$, sendo:

$\vec{u} = (2{,}0{,}0), \quad \vec{v} = (0{,}3{,}0).$

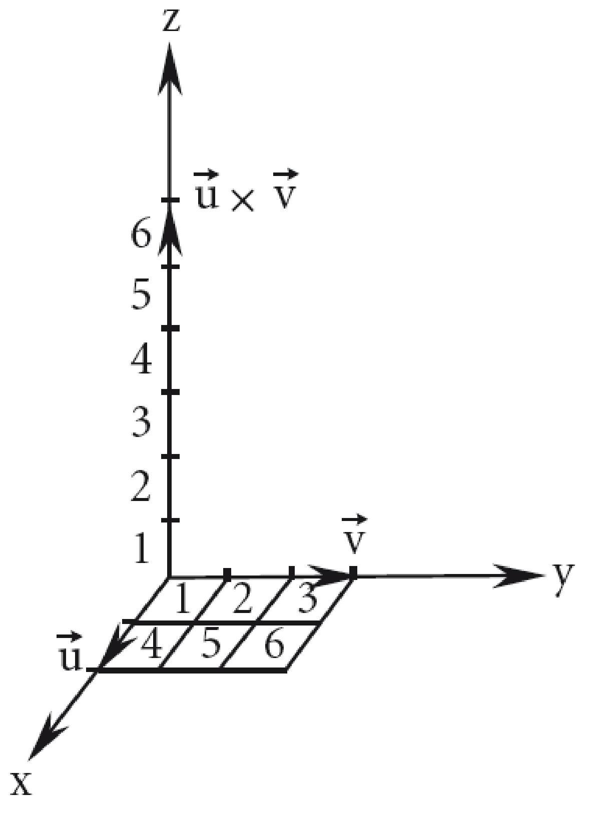


Figura 3.6

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e ∝ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e ∝ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nota: $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Propriedades do produto vetorial

Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores quaisquer e $\propto$ um escalar.

I) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$

$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$

II) $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$

III) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

Nota: $\cancel{(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})}$

Não Associativo

Exemplo 2

Dados os vetores $\vec{u} = (1,-1,1), \quad \vec{v} = (2,-3,4)$, calcular:

a) A área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) A altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

Aplicação na Física: Torque ($\vec{\tau}$)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

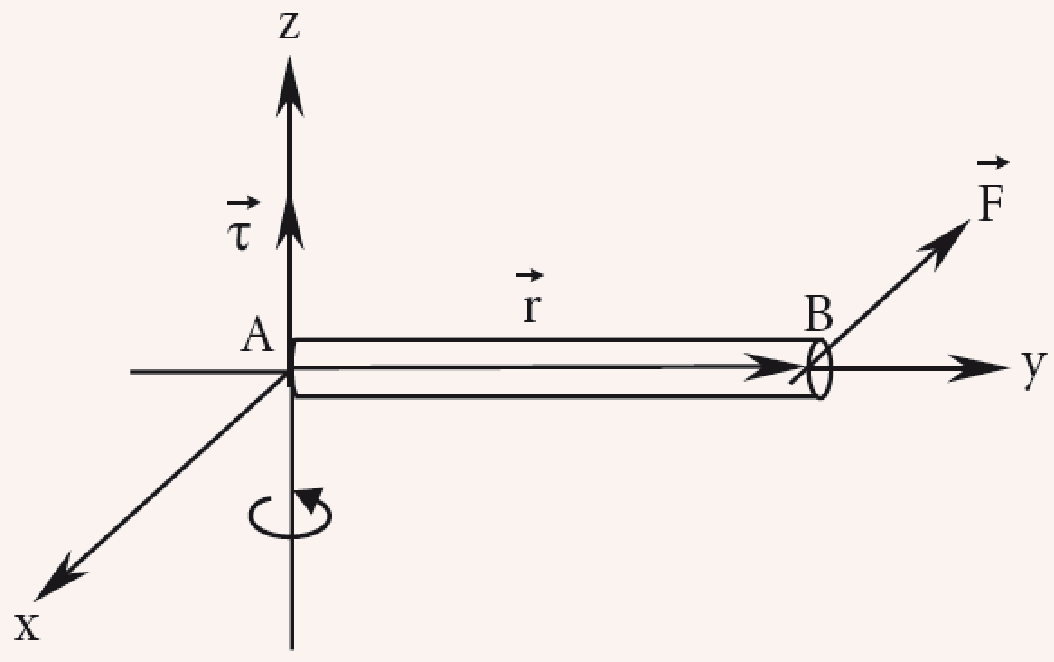


Figura 3.12

Aplicação na Física: Torque ($\vec{\tau}$)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad\qquad |\vec{\tau}| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| sen\theta$$

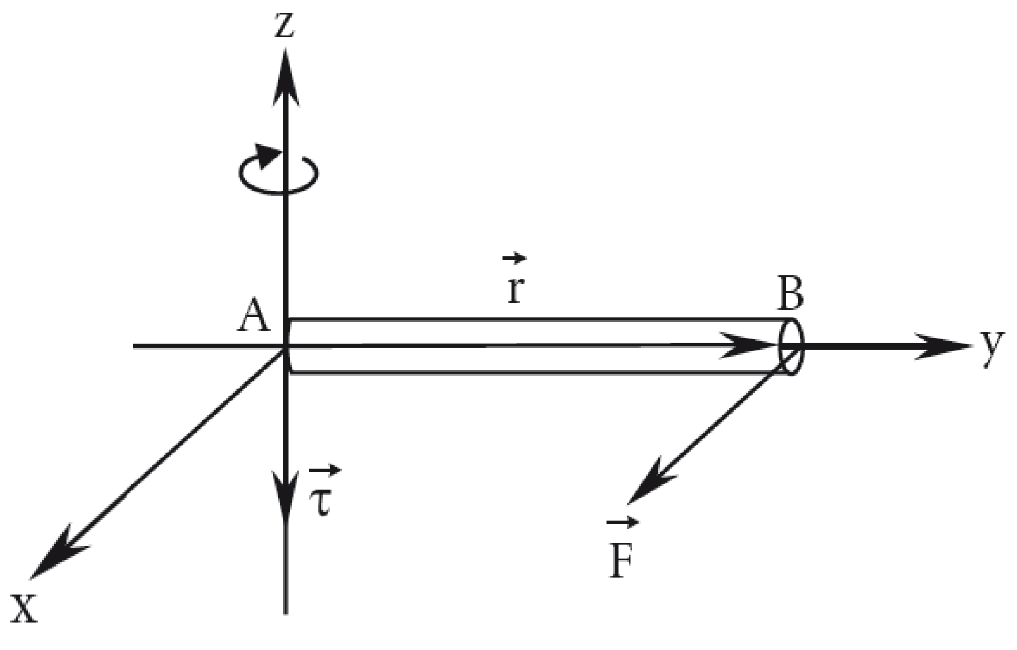


Figura 3.11

Exemplo 3

Calcular o torque sobre uma barra de comprimento $\vec{r} = 2\vec{j}$ [m] sujeita a uma força $\vec{\boldsymbol{F}} = \mathbf{10}\vec{\boldsymbol{i}}\ [N]$. Indicar o sentido de rotação.

Capítulo 4 – Produto Misto

Definição do Produto Misto

Sejam:

$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = Escalar$$

Exercício

Calcular o produto misto entre os vetores

$\vec{u} = (2,3,5)$, $\vec{v} = (-1,3,3)$ e $\vec{w} = (4,-3,2)$.

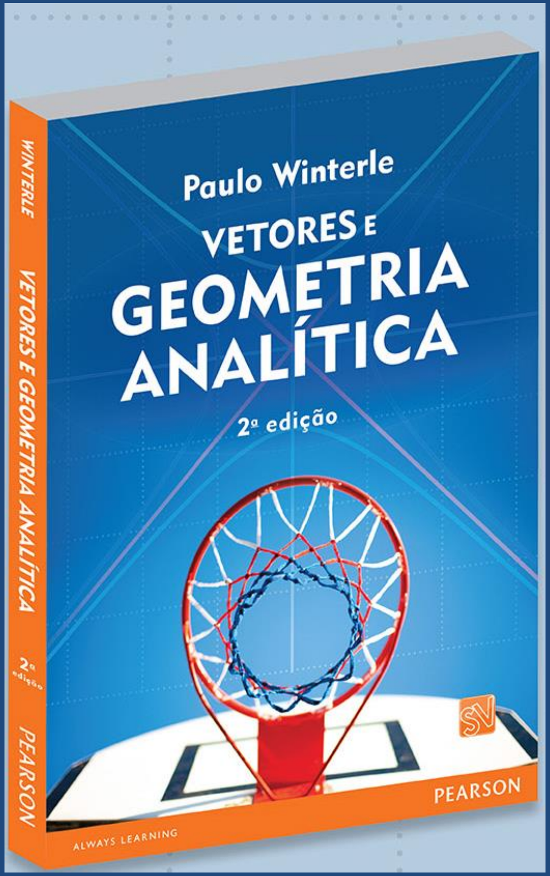
Para depois da aula

- Reler o capítulo 3 e 4 (início) do livro texto.
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Realizar a lista de exercícios.

Próxima aula

- A reta.

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenrique.com

henrique.faria@unesp.br