Cálculo I

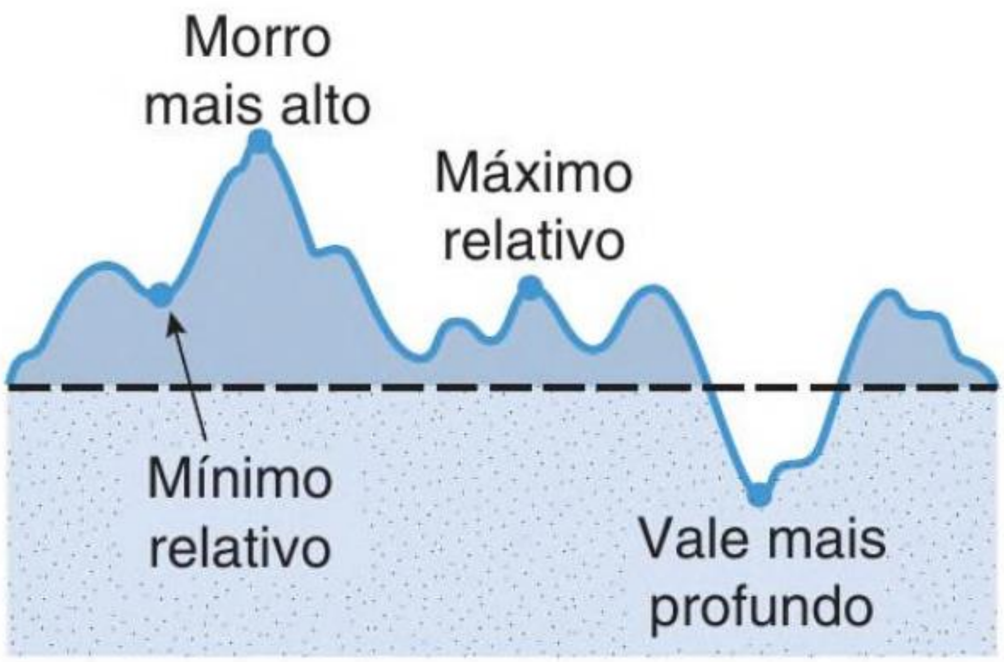
Licenciatura em Química

Máximos e mínimos de uma função

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

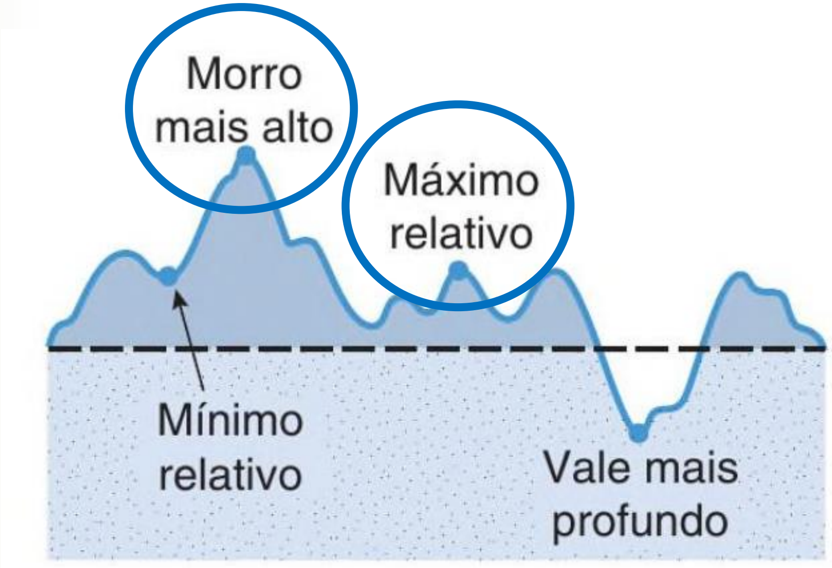
5.2 – Máximos e mínimos relativos

- ✓ Imaginemos o gráfico de uma função como um cordilheira de montanhas;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

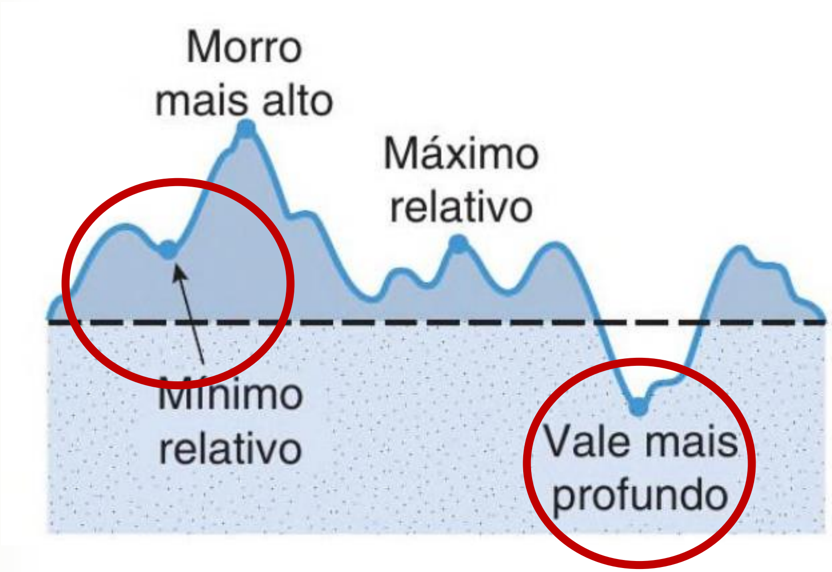
5.2 – Máximos e mínimos relativos



- ✓ Morros são chamados de máximos;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

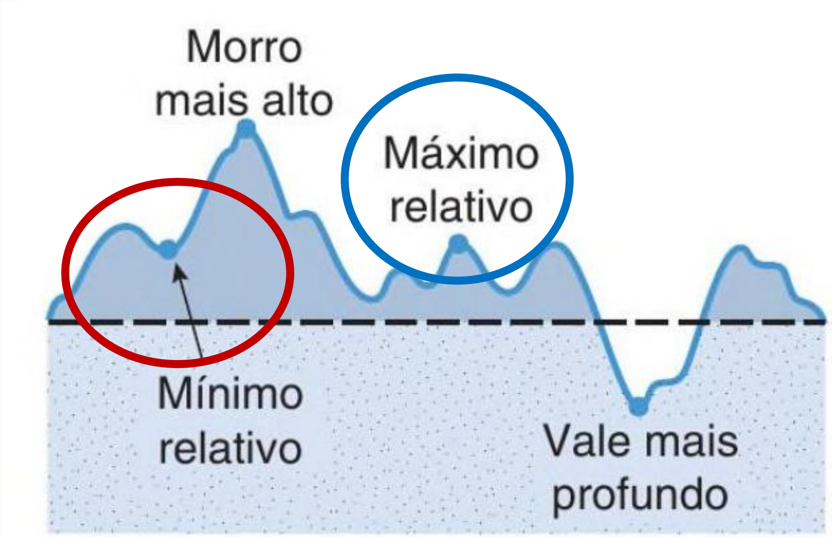
5.2 – Máximos e mínimos relativos



- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5.2 – Máximos e mínimos relativos



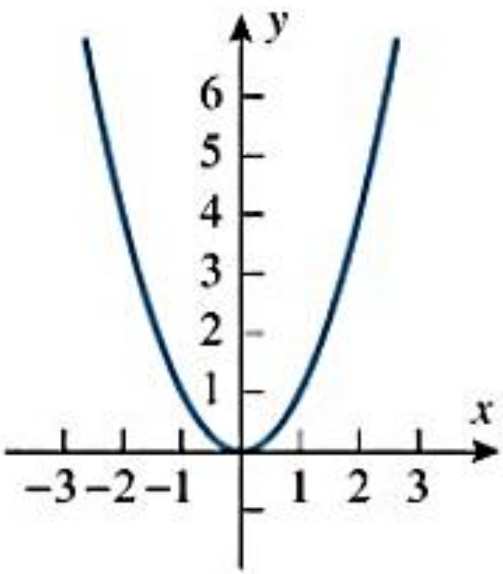
- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;
- ✓ Ambos, máximos e mínimos, são relativos quando analisados em uma vizinhança.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5.2 – Máximos e mínimos relativos

4.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f tem um ***máximo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ em cada x no intervalo. Analogamente, diz-se que f tem um ***mínimo relativo*** em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ em cada x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0, diz-se que f tem um ***extremo relativo*** em x_0.

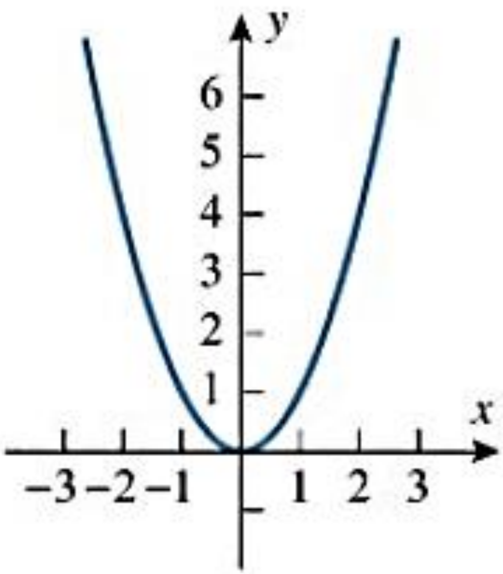
Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções



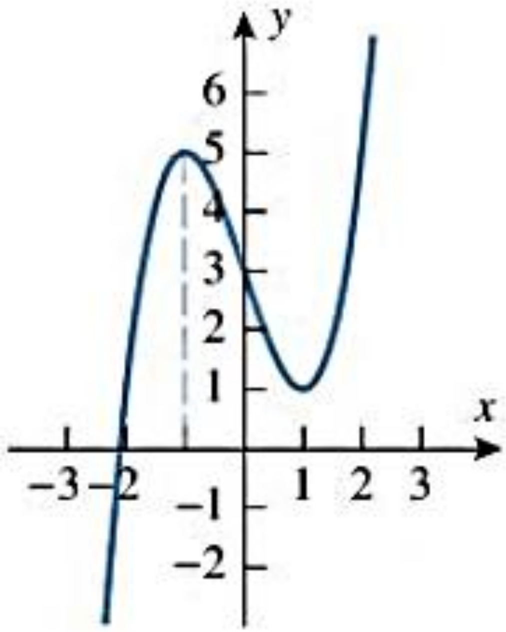
$$\boxed{y = x^2}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções



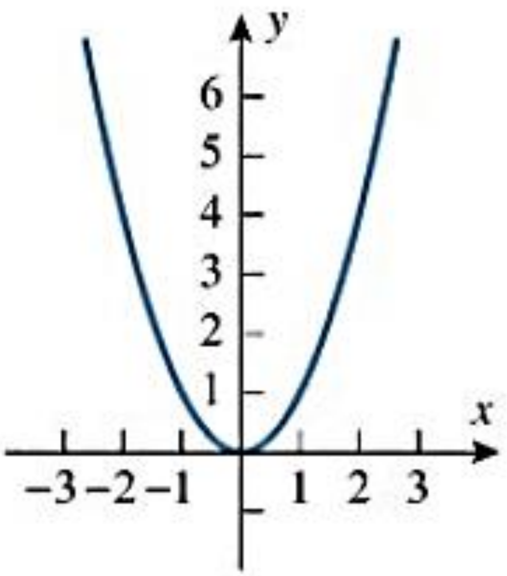
$y = x^2$

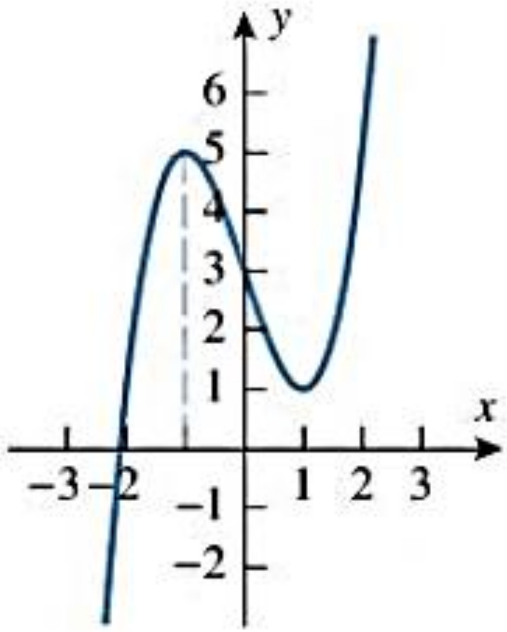


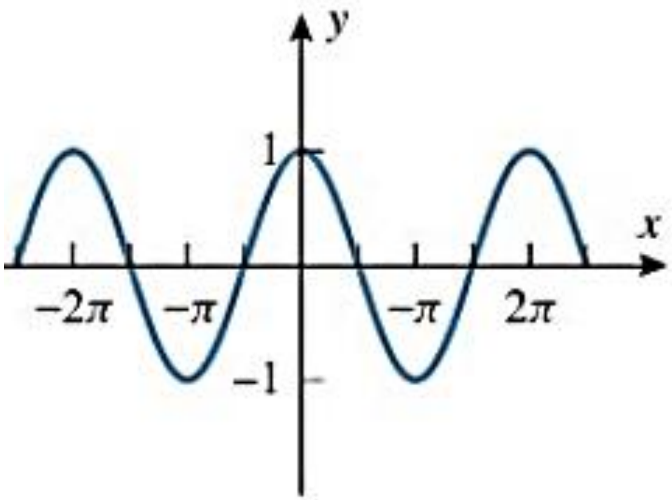
$y = x^3 - 3x + 3$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções





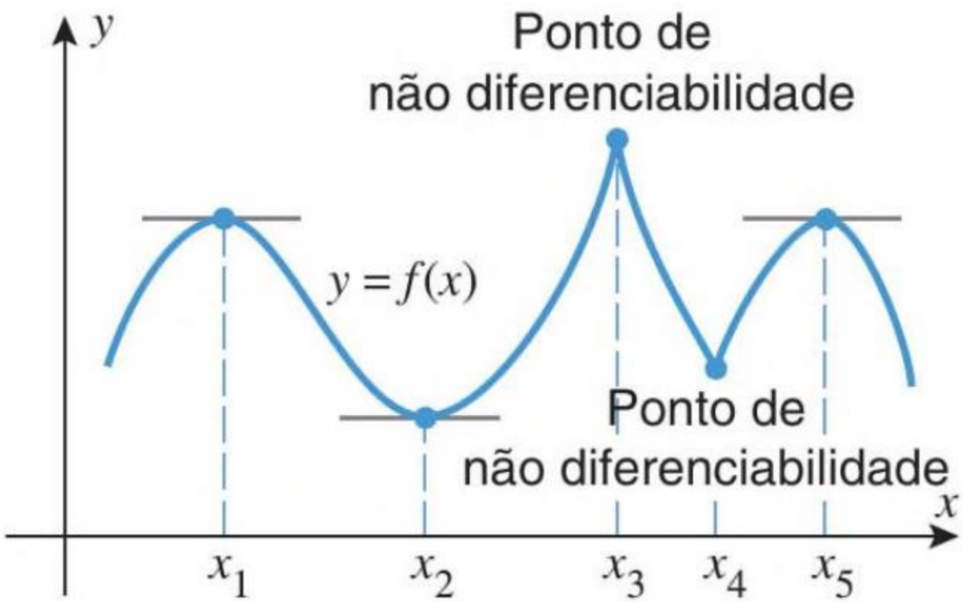


Nas três funções, ocorrem extremos relativos no pontos em que a reta tangente é horizontal.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

- ✓ Um extremo relativo pode ocorrer também em um ponto em que a função não é diferenciável.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

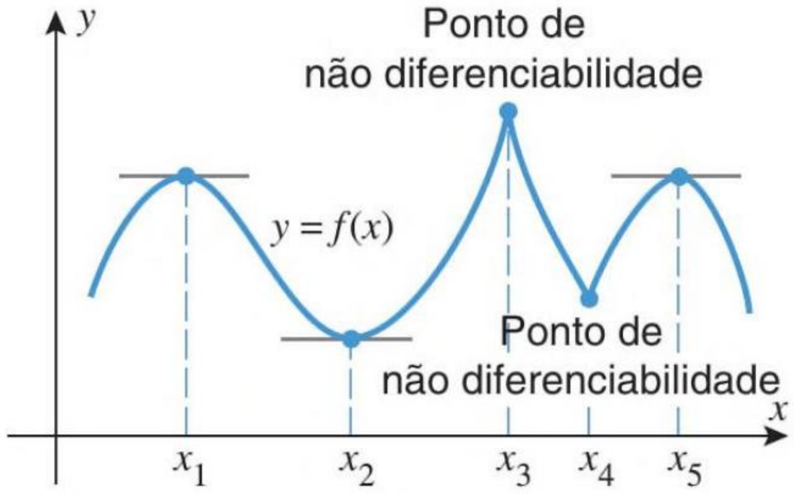


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: *f* tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

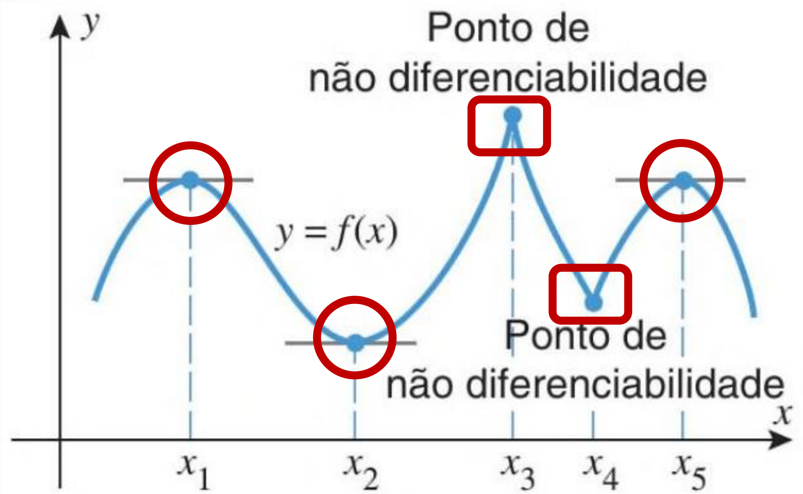


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: *f* tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

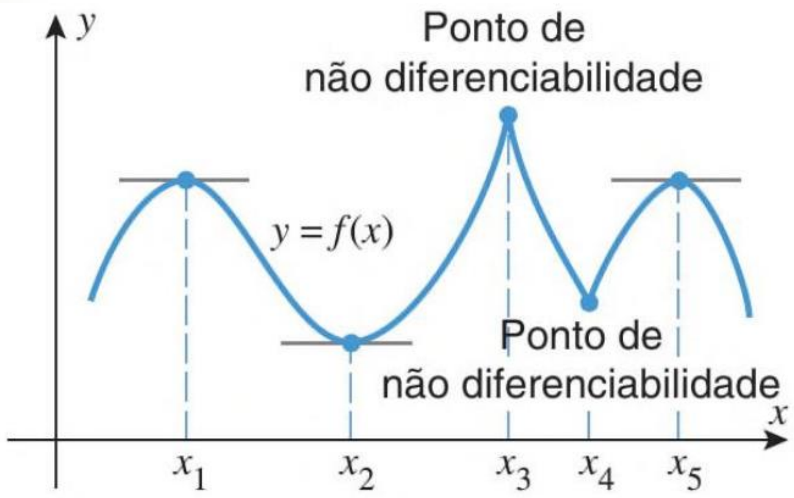


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: *f* tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

- ✓ **Ponto estacionário**: *f* tem reta tangente horizontal.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

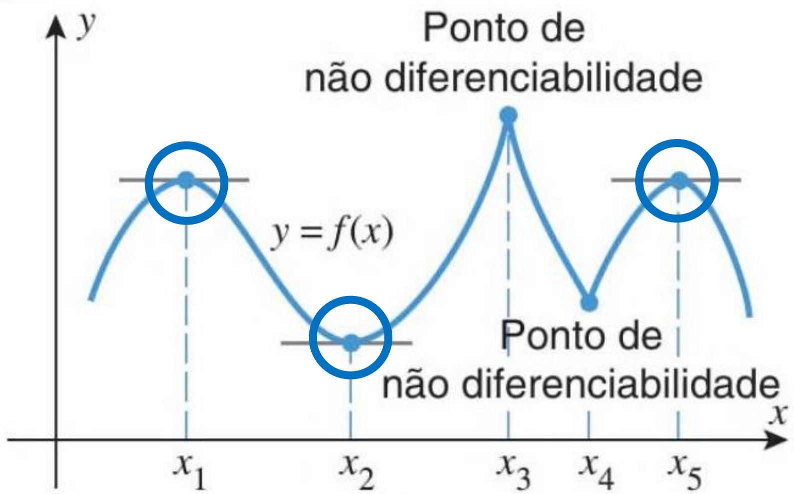


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico**: *f* tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;
- ✓ **Ponto estacionário**: *f* tem reta tangente horizontal.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos relativos de uma função

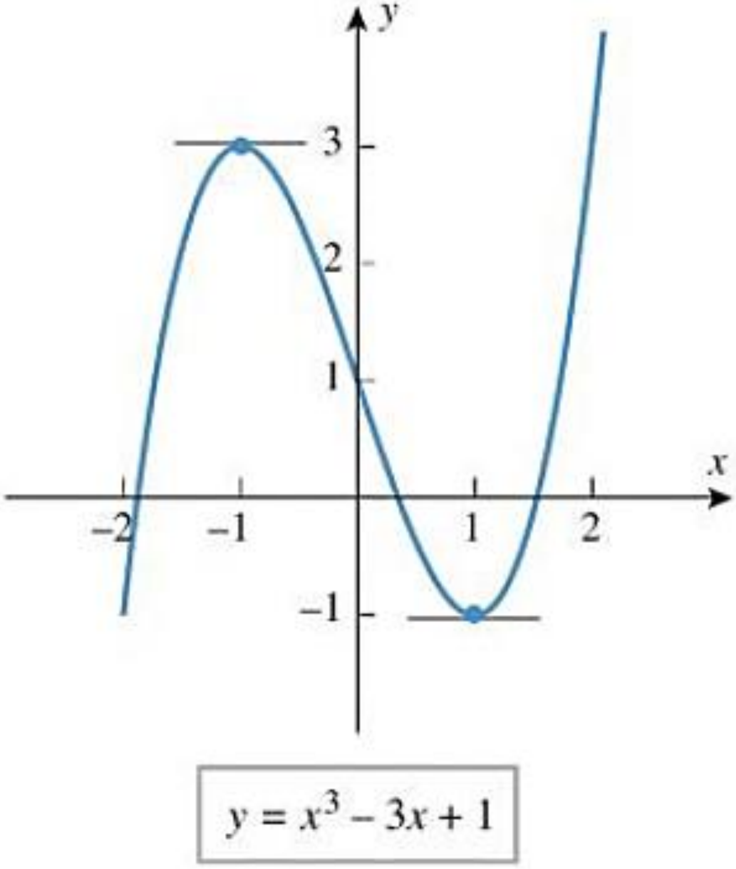
4.2.2 TEOREMA *Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto* x_0. *Se f tiver um extremo relativo em* $x = x_0$, *então* $x = x_0$ *será um ponto crítico de f; assim, ou* $f'(x_0) = 0$ *ou f não é diferenciável em* x_0.

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

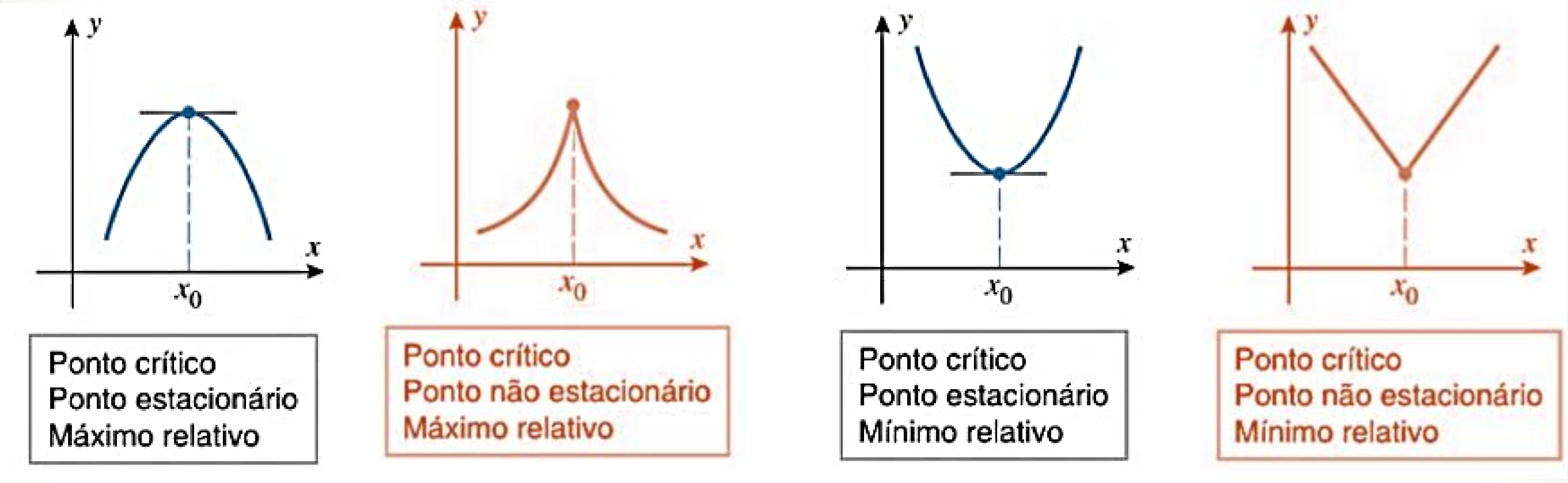
Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$



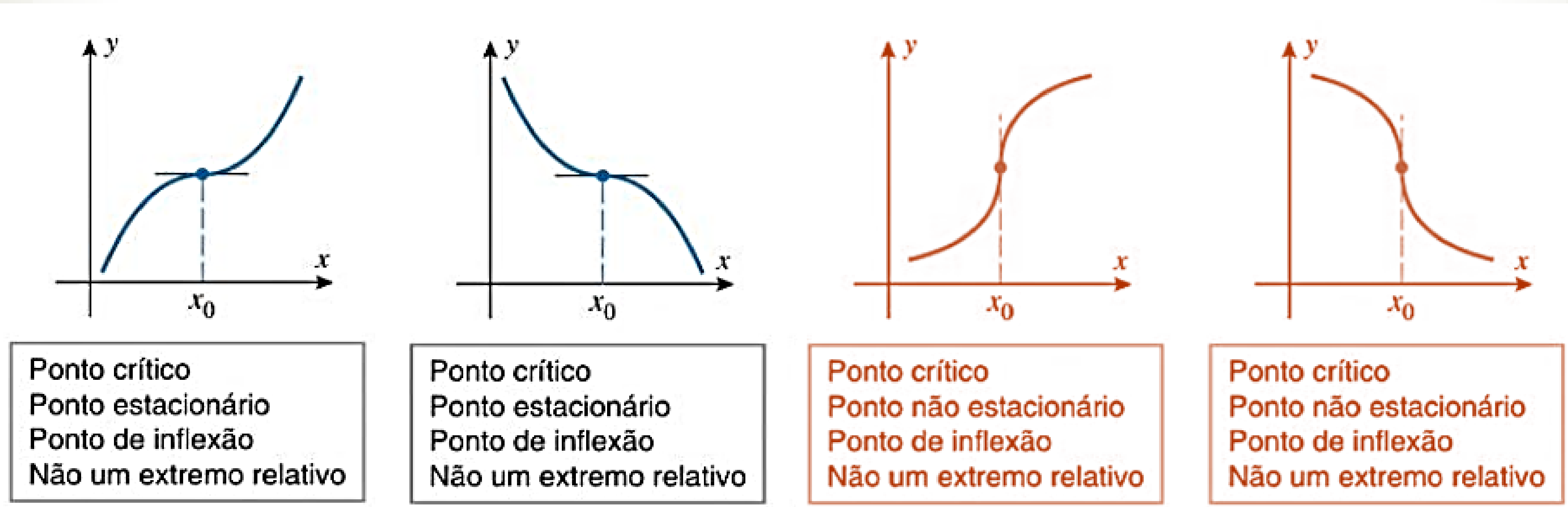
Teste da derivada primeira (f')

- ✓ Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos quem f' muda de sinal.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da derivada primeira (f')



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico* x_0.

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(a) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(*a*) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(*b*) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA ***(Teste da Derivada Primeira)*** *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0.*

(a) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(b) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(c) *Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f não tem extremo relativo em x_0.*

Teste da derivada primeira (f')

O sinal das derivadas na proximidade de x_0 **definem se é um ponto de mínimo ou de máximo.**

- $\boldsymbol{f}$ tem Máximo relativo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e:

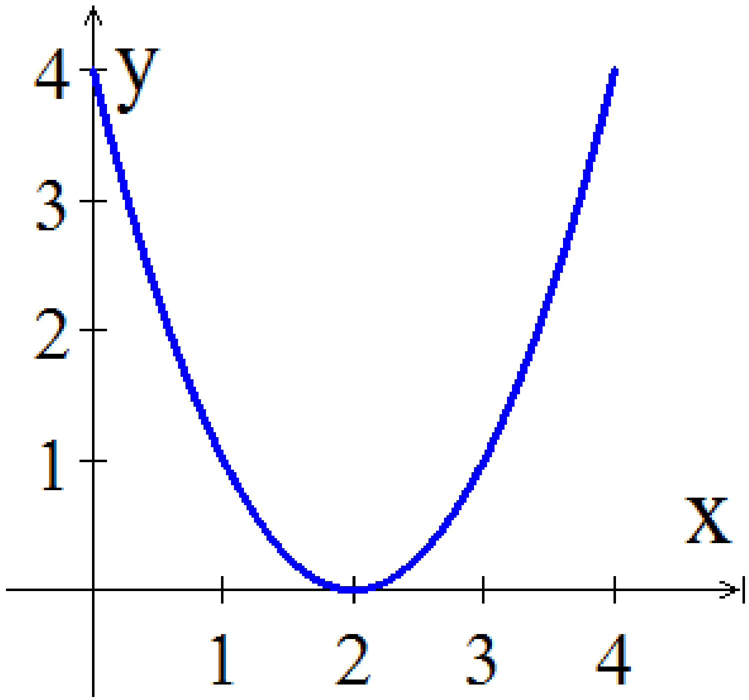
$$f'(x) > 0 \quad \forall\ x\ < \boldsymbol{x_o}$$
$$f'(x) < 0 \quad \forall\ x\ > \boldsymbol{x_o}$$

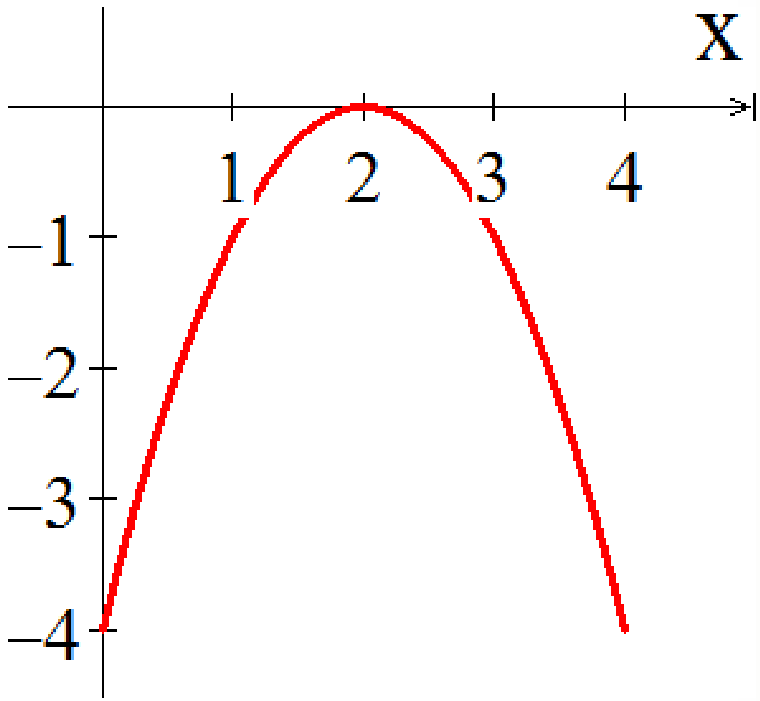
- $\boldsymbol{f}$ tem mínimo relativo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e :

$$f'(x) < 0 \quad \forall\ x\ < \boldsymbol{x_o}$$
$$f'(x) > 0 \quad \forall\ x\ > \boldsymbol{x_o}$$

Exemplo

$$y = (x-2)^2 \qquad\qquad y = -(x-2)^2$$





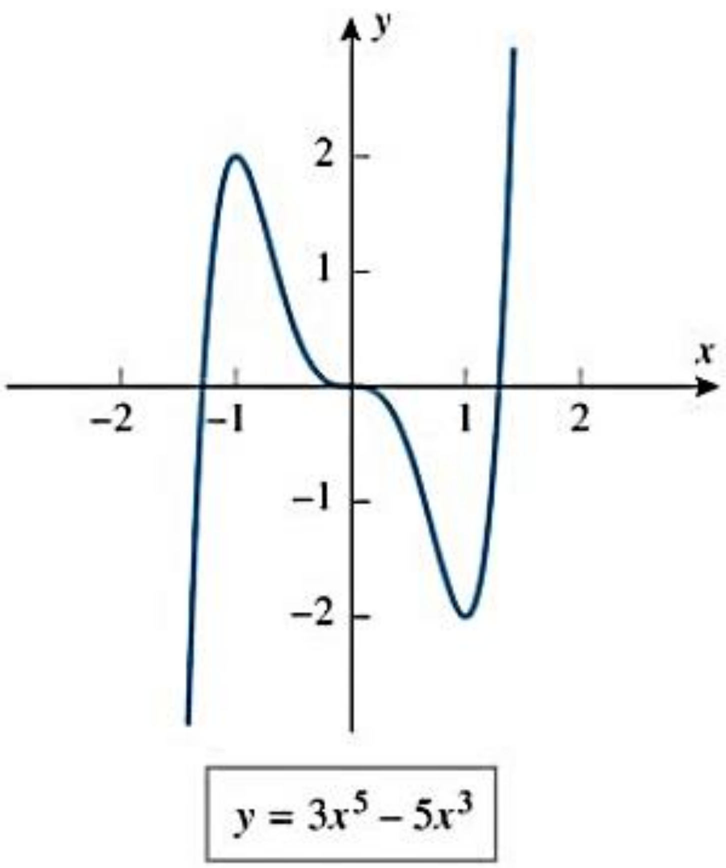
$$x_0 = 2 \;\; \rightarrow f'(2) = 0 \;\; \text{(ponto crítico)}$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$



Teste da derivada segunda (*f''*)

- ✓ O teste da derivada segunda é mais simples para se determinar os pontos críticos de uma função f;

- ✓ Porém, ele não é útil quando a derivada segunda f'' no ponto crítica é nula.

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(*a*) *Se* $f'(x_0) = 0$ *e* $f''(x_0) > 0$, *então f tem um mínimo relativo em x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(b) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0.*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.*

(b) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.*

(c) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo em x_0 ou nenhum dos dois.*

4.4 Teste da derivada segunda (f'')

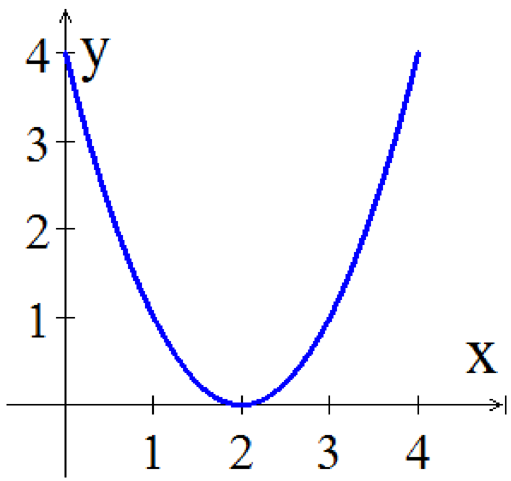
O sinal da **derivada segunda no ponto crítico** $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ **pode definir se o ponto é de máximo ou de mínimo.**

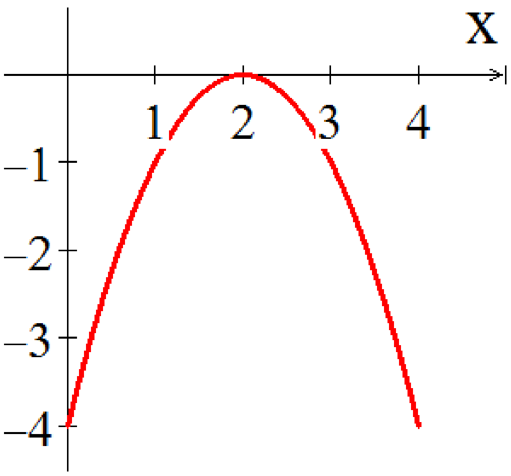
$f''(x_0) < 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{x_0}$ é ponto de Máximo;

$f''(x_0) > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{x_0}$ é ponto de mínimo;

$f''(x_0) = 0$ nada se conclui sobre o ponto.

Exemplo





$$y = (x-2)^2$$

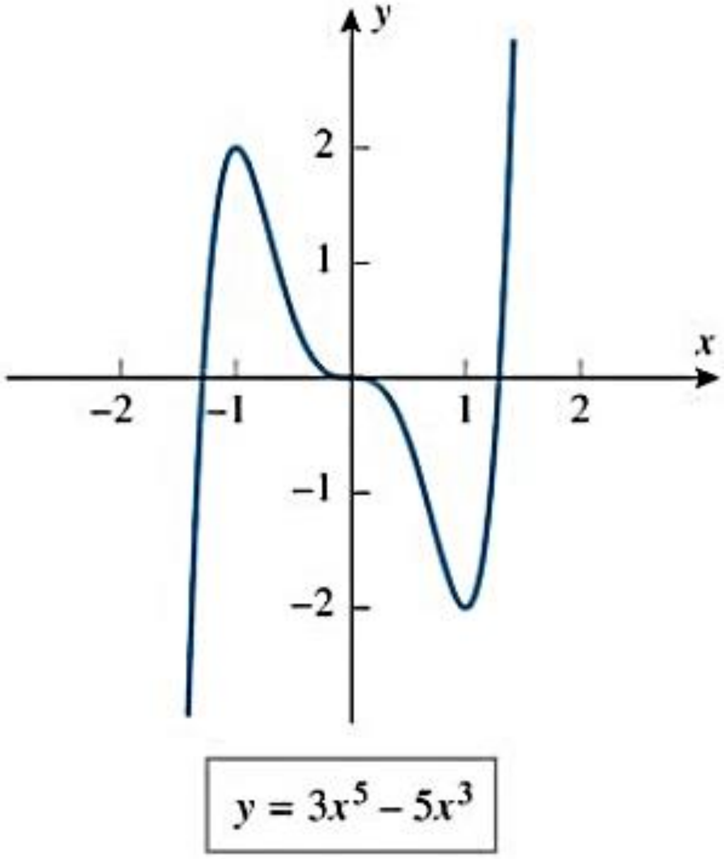
$$y = -(x-2)^2$$

$$y'' = 2 > 0$$

$$y'' = -2 < 0$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$



Máximos e mínimos absolutos

- ✓ Nesta seção consideraremos métodos para encontrar o mais alto dos morros e o mais profundo dos vales de uma curva;

- ✓ Em termos matemáticos, procuraremos o maior e o menor valor de uma função em um determinado intervalo .

Máximos e mínimos absolutos

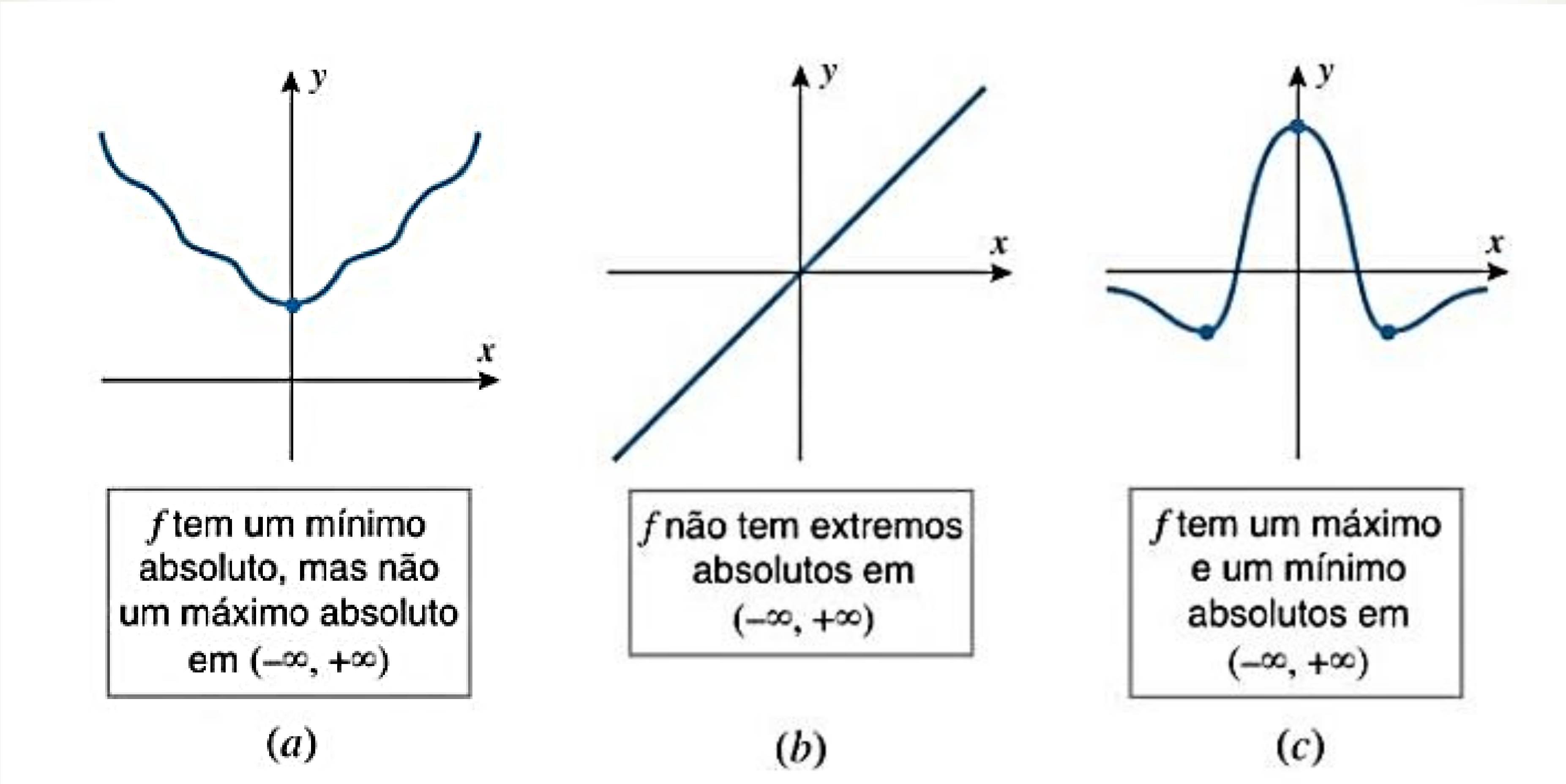
4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um ***máximo absoluto*** em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um ***mínimo absoluto*** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um ***extremo absoluto***.

Máximos e mínimos absolutos

4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um ***máximo absoluto*** em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um ***mínimo absoluto*** em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um ***extremo absoluto***.

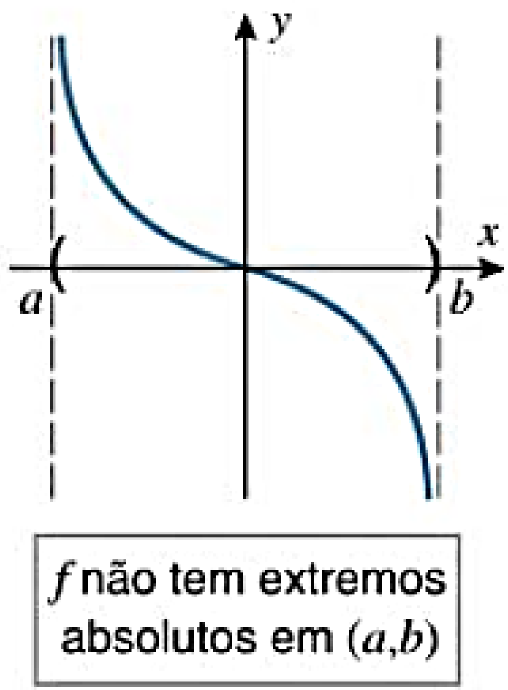
Contudo, não é garantido que uma função tenha extremos absolutos em um intervalo.

Máximos e mínimos absolutos

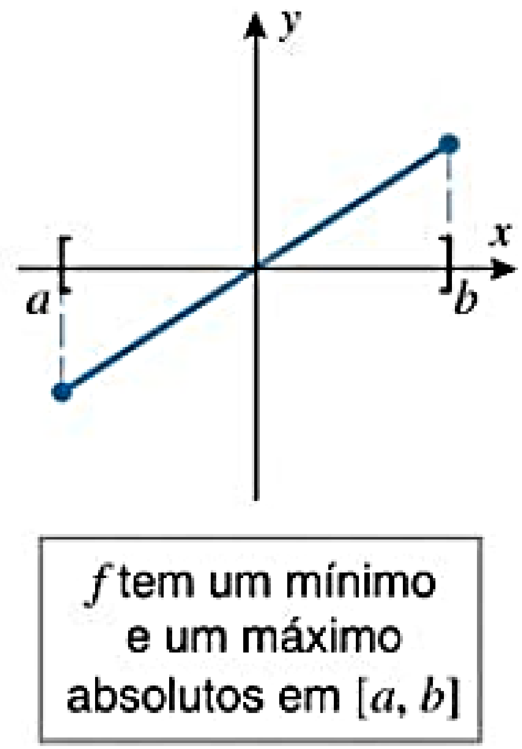


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Máximos e mínimos absolutos



(d)



(e)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema 5.4.2 (*8ª ed. Anton*)

4.4.2 TEOREMA ***(Teorema do Valor Extremo)*** *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito* $[a, b]$*, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em* $[a, b]$.

Teorema 5.4.2 (8ª ed. Anton)

4.4.2 TEOREMA (***Teorema do Valor Extremo***) *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

Teorema 5.4.3 (8ª ed. Anton)

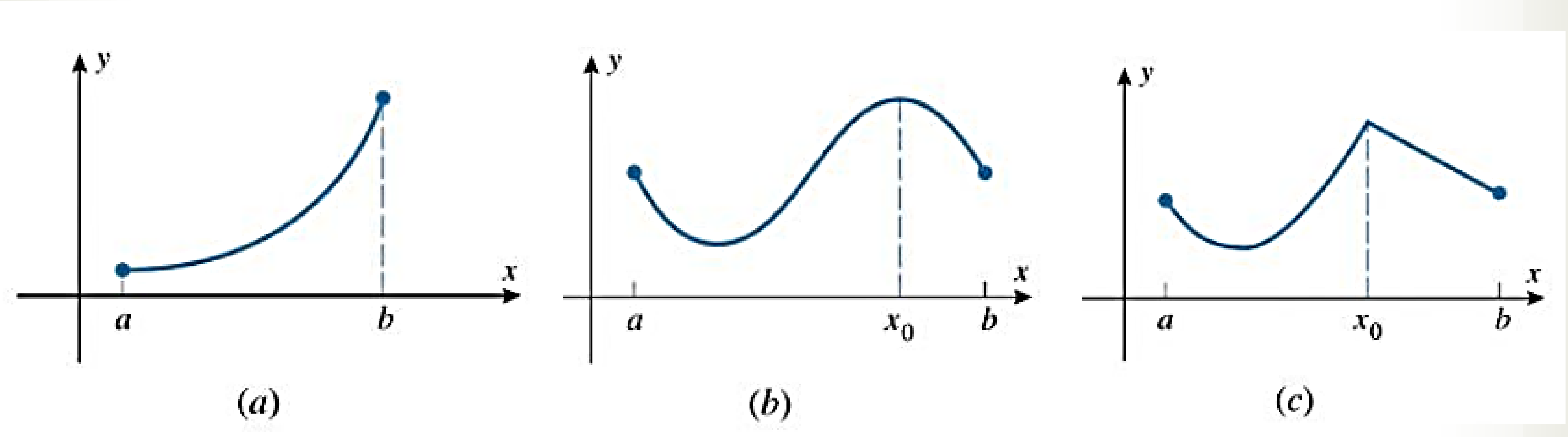
4.4.3 TEOREMA *Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b), então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f.*

Teorema do valor extremo

- ✓ Desse teorema segue que, se *f* **for contínua** no intervalo finito fechado **[a, b]**, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.

Teorema do valor extremo

- ✓ Desse teorema segue que, se *f* **for contínua** no intervalo finito fechado **[a, b]**, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Como encontrar extremos absolutos?

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado $[a, b]$

Passo 1 Encontre os pontos críticos de f em (a, b).

Passo 2 Encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades a e b.

Passo 3 O maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto.

Exemplo 1 – Encontre os extremos absolutos de *f* no intervalo [1, 5]

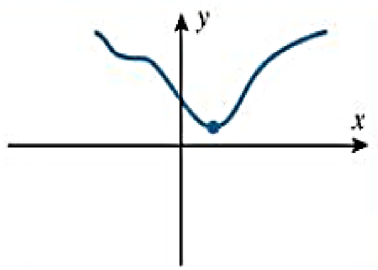
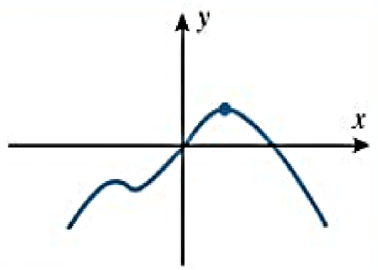
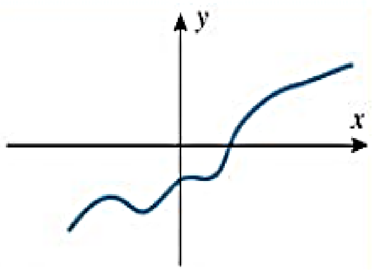
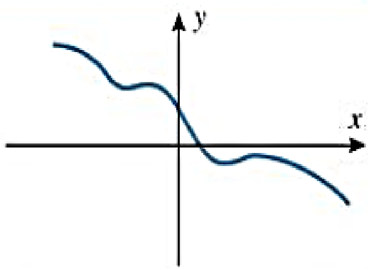
$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$$

Extremos absolutos em intervalos infinitos

- ✓ Seja uma função f contínua em $(-\infty, +\infty)$;
- ✓ Extremos absolutos podem ser deduzidos verificando o comportamento de f no infinito.

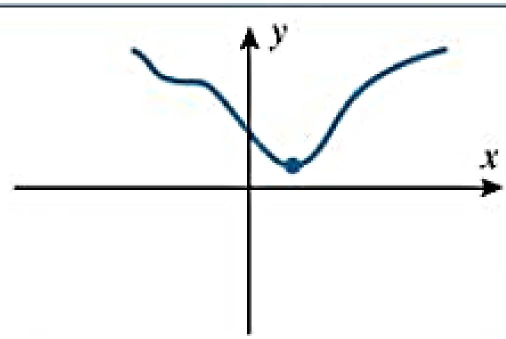
Extremos absolutos em intervalos infinitos

Tabela 4.4.2
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

LIMITES	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO				

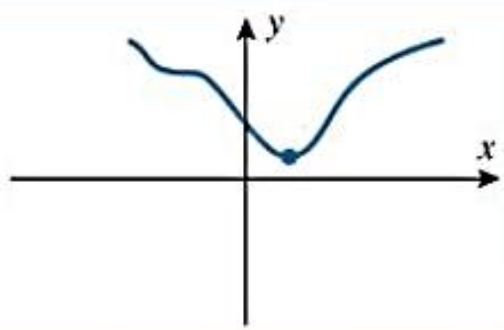
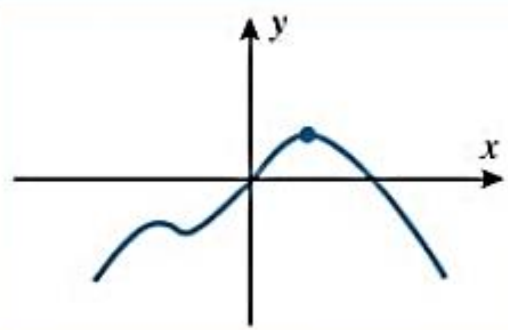
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

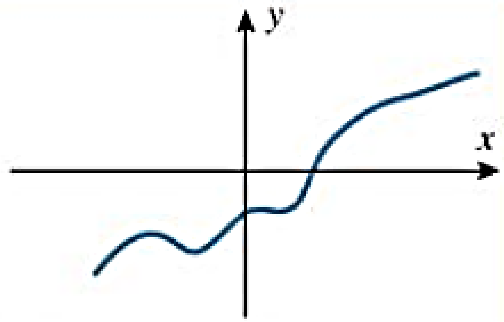
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO		

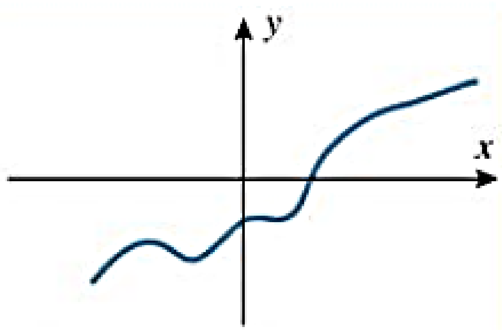
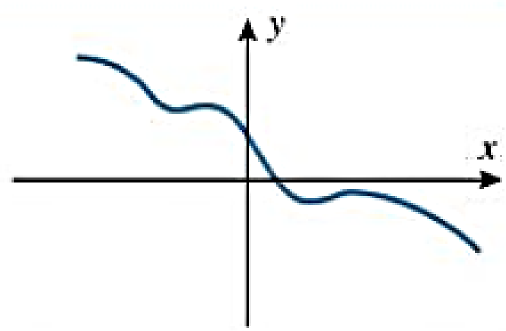
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO		

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 4 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (-∞, +∞)

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

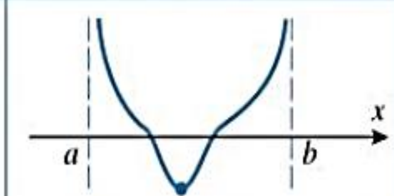
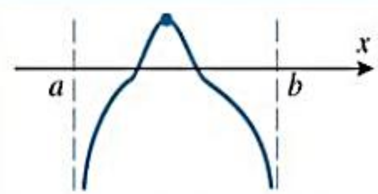
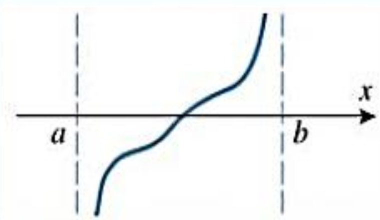
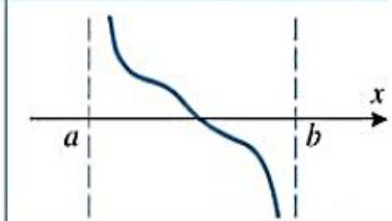
Extremos absolutos em intervalos abertos

- ✓ Seja uma função f contínua em (a, b);
- ✓ Extremos absolutos podem ser obtido verificando o comportamento de de f quando $x \to a^{+}$ e $x \to b^{-}$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

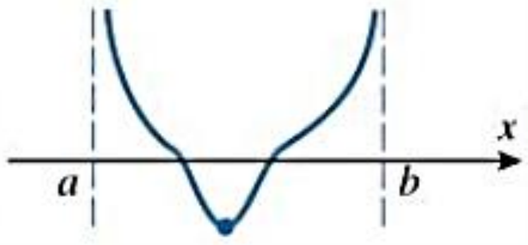
Extremos absolutos em intervalos abertos

Tabela 4.4.3
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

LIMITES	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

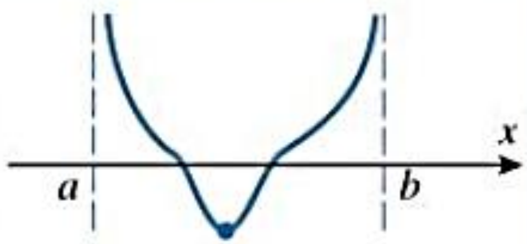
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)
GRÁFICO	

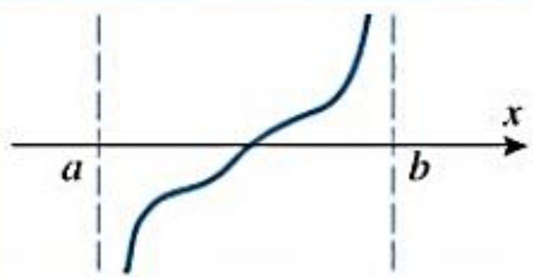
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)
GRÁFICO		

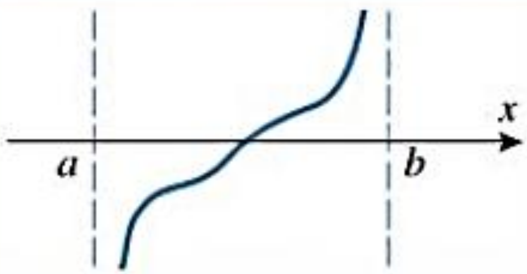
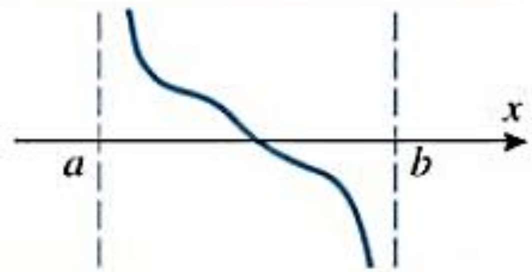
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO	

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE *f* FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO		

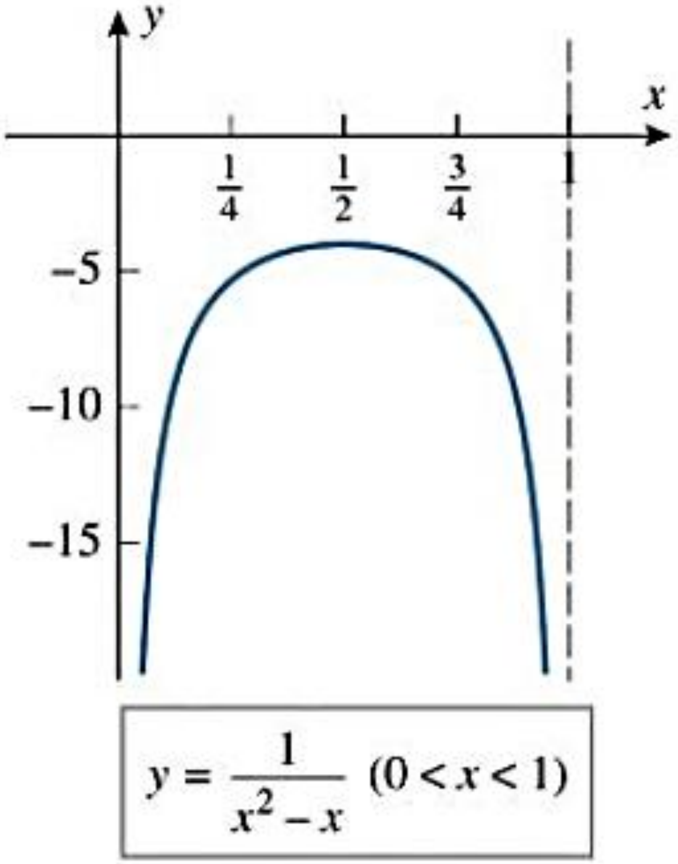
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

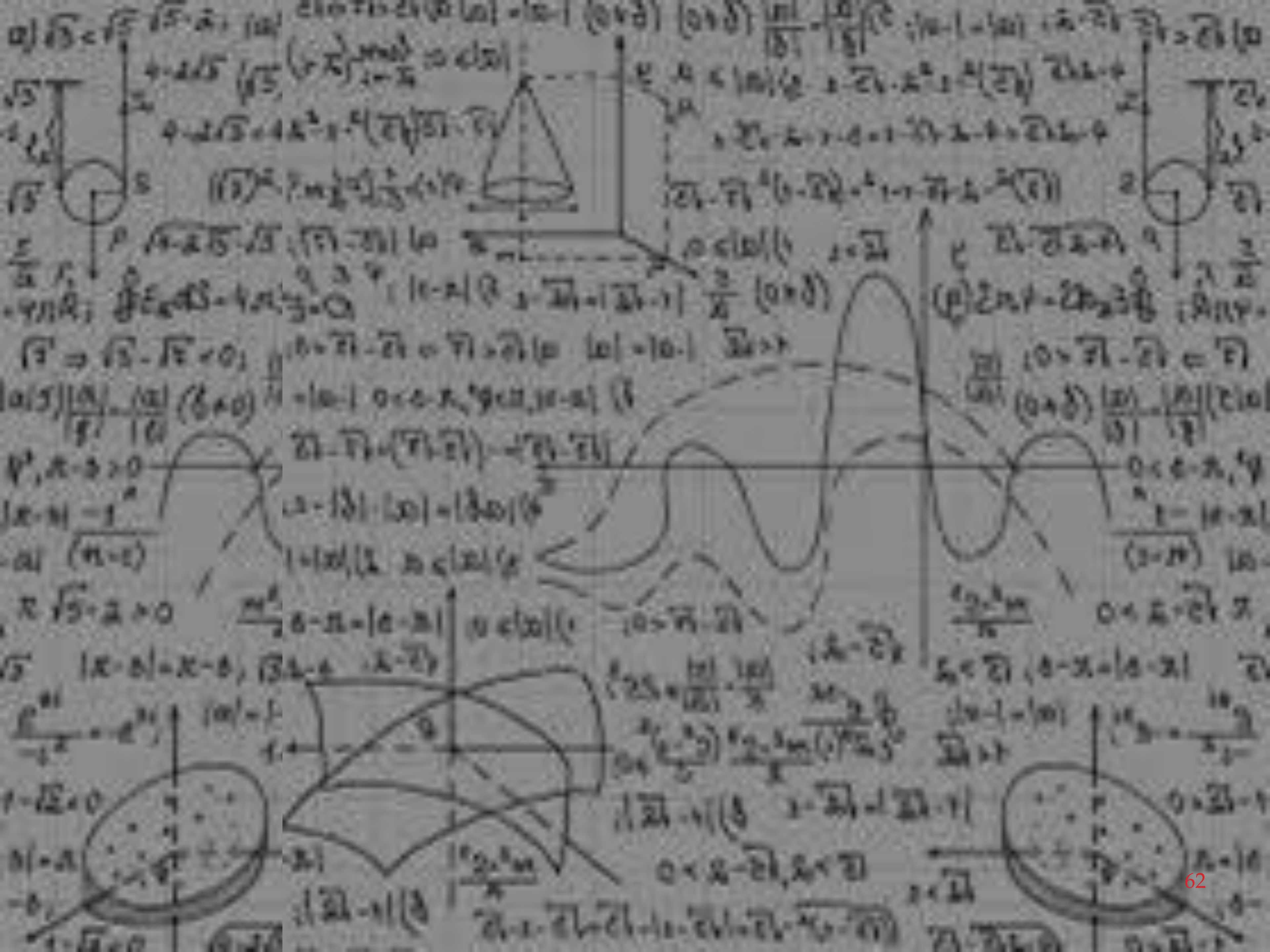
Exemplo 5 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (0, 1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

Exemplo 5 – Determine se *f* tem extremos absolutos no intervalo (0, 1)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$





Para depois desta aula:

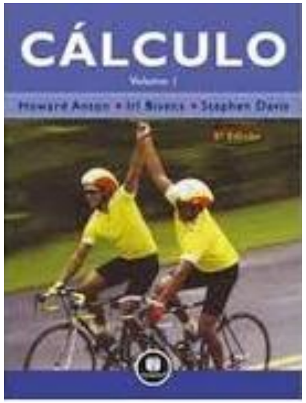
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

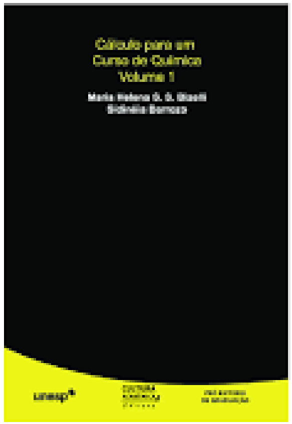
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br