Capítulo 6 - O plano

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

Aula 1 - Plano

Equação geral do plano

Sejam um plano π em que $A(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a π. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a esse plano π se e somente se o vetor $\overrightarrow{AP}$ for ortogonal a $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

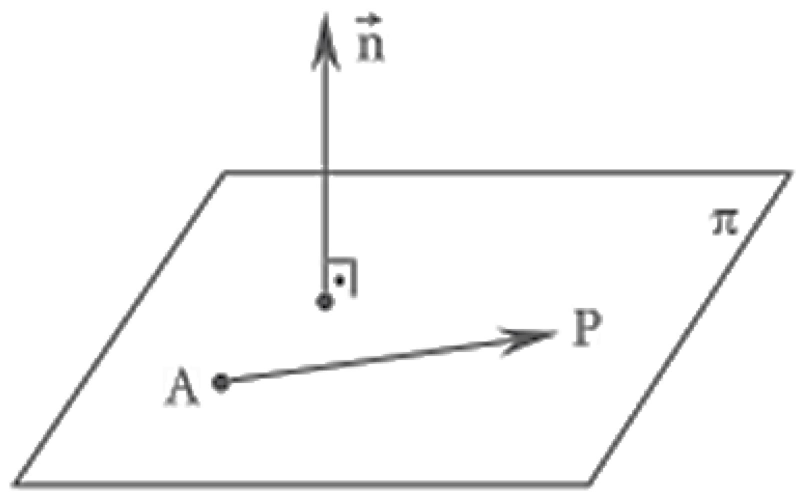


Figura 6.1

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

$$a(x - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{b}(y - \boldsymbol{y_1}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = \boldsymbol{0}$$

$$a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1}) = \boldsymbol{0}$$

Fazendo: $\boldsymbol{d} = (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1})$

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

Equação geral do plano

Observações

a) Qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$ é normal ao plano π;

b) Os componentes a, b, c na equação do plano são as componentes do vetor normal a π;

c) Atribuindo-se valores arbitrários a duas variáveis da equação do plano obtém-se pontos de π.

Exemplo 1

Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,-1,3)}$ e tem vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{3},\boldsymbol{2},-\boldsymbol{4})$.

Exemplo 2

Escrever uma equação geral do plano $\boldsymbol{\pi}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,1,3)}$ e é paralelo ao plano:

$$\boldsymbol{\pi_1: 3x - 4y - 2z + 5 = 0}.$$

Exercícios em classe

A reta $\boldsymbol{r}$ é ortogonal ao plano $\boldsymbol{\pi}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,1,-2)}$. Determinar uma equação geral desse plano e representá-lo graficamente.

$$\boldsymbol{r}: \{\boldsymbol{x = 5 + 3t} \quad \boldsymbol{y = -4 + 2t} \quad \boldsymbol{z = 1 + t}.$$

$\boldsymbol{Resp}$: $\boldsymbol{3x + 2y + z - 6 = 0}$

Equação vetorial do plano

Seja $\boldsymbol{A(x_0, y_0, z_0)}$ um ponto pertencente a π, $\vec{u} = (\boldsymbol{a_1, b_1, c_1})$ e $\vec{v} = (\boldsymbol{a_2, b_2, c_2})$ dois vetores paralelos a esse plano π. Supondo que os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sejam paralelos tem-se:

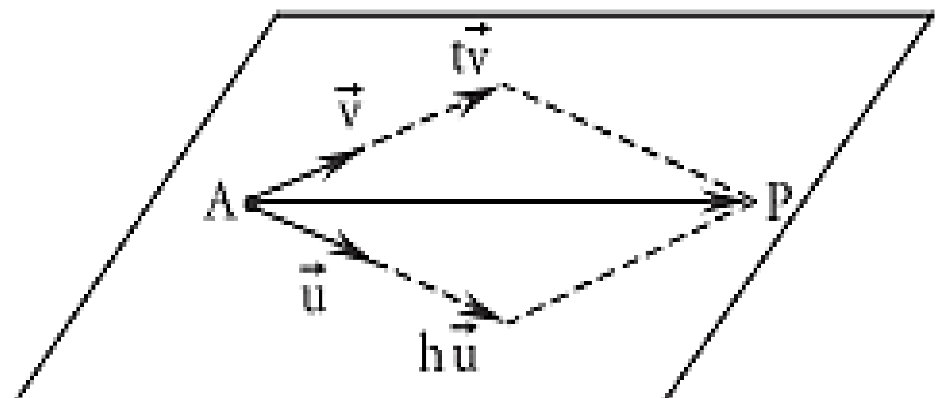


Figura 6.3

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}}$$

$$h, t \in \mathbb{R}$$

Equação vetorial do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Equação vetorial do plano

Equações paramétricas do plano

Da equação vetorial do plano tem-se:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t,\ y_0 + b_1 h + b_2 t,\ z_0 + c_1 h + c_2 t)$$

Da igualdade de vetores:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$$

Equações paramétricas do plano

Exemplo 3

Um plano $\boldsymbol{\pi}$ passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,2,-1)}$ e é paralelo aos vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{5}, -\mathbf{3})$ **.** Obter a equação geral, vetorial e as equações paramétricas de $\boldsymbol{\pi}$.

$\boldsymbol{Resp}: \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}\boldsymbol{y} + \mathbf{7}\boldsymbol{z} - \mathbf{11} = \mathbf{0}$

Exercícios em classe 2

Determinar uma equação geral do plano $\boldsymbol{\pi}$ que contém as retas:

$\boldsymbol{Resp}: -\mathbf{9}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} - \mathbf{7} = \mathbf{0}$

$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Equação vetorial de um paralelogramo

Sejam os pontos $\boldsymbol{A, B\ e\ C}$, não colineares, pertencente ao plano π.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo, definido pela relação de um vetor qualquer:

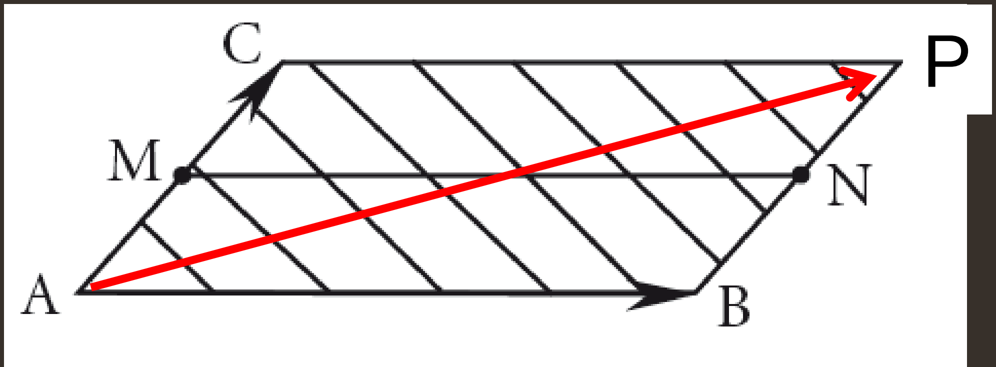


Figura 6.8

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Ou

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

Com: $h\ e\ t\ \in [0, 1]$

Equação vetorial de um paralelogramo

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$P = A + h(B - A) + t(C - A)$$

Ponto qualquer do paralelogramo

$$\textbf{Para:} \quad h = t = 0 \quad \rightarrow \quad P = A$$

$$\textbf{Para:} \quad h = 1 \quad e \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P = B$$

Aula 2 - Plano

Casos particulares da equação geral do plano

Seja a equação geral do plano:

$$\boldsymbol{ax + by + cz + \mathrm{d} = 0}$$

Análise dos casos com exemplo numérico:

$$\boldsymbol{3x + 4y + 2z - 12 = 0}$$

Casos 0 – Plano original

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $y = z = 0$

$$3x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

p/ $x = z = 0$

$$4y = 12 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

p/ $x = y = 0$

$$2z = 12 \quad \rightarrow \quad z = 6$$

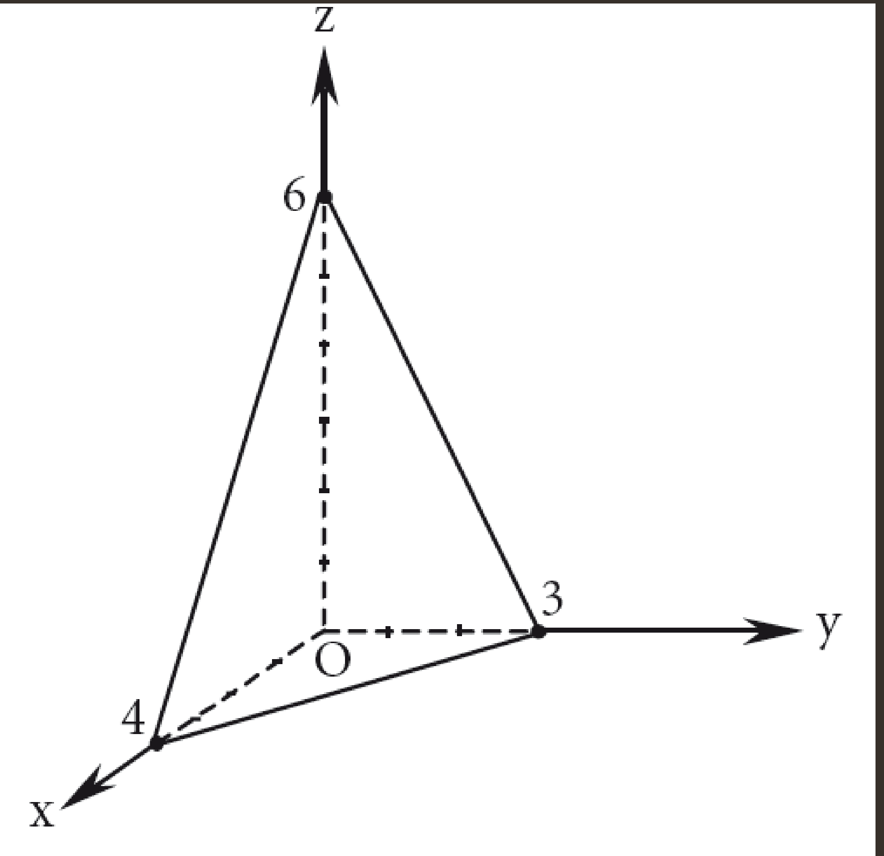


Figura 6.9

Casos 1 – $d = 0$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

p/ $y = z = 0 \rightarrow x = 0$

p/ $x = z = 0 \rightarrow y = 0$

p/ $x = y = 0 \rightarrow z = 0$

p/ $y = z = 1 \rightarrow x = -2$

p/ $x = z = 1 \rightarrow y = -5/4$

p/ $x = y = 1 \rightarrow z = -7/2$

Casos 2 – $a = 0$ $(coeficiente\ de\ x)$

$$4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $z = 0 \rightarrow y = 3$

p/ $y = 0 \rightarrow z = 6$

- Plano não tem ponto comum com eixo x;
- Paralelo ao eixo da variável ausente;

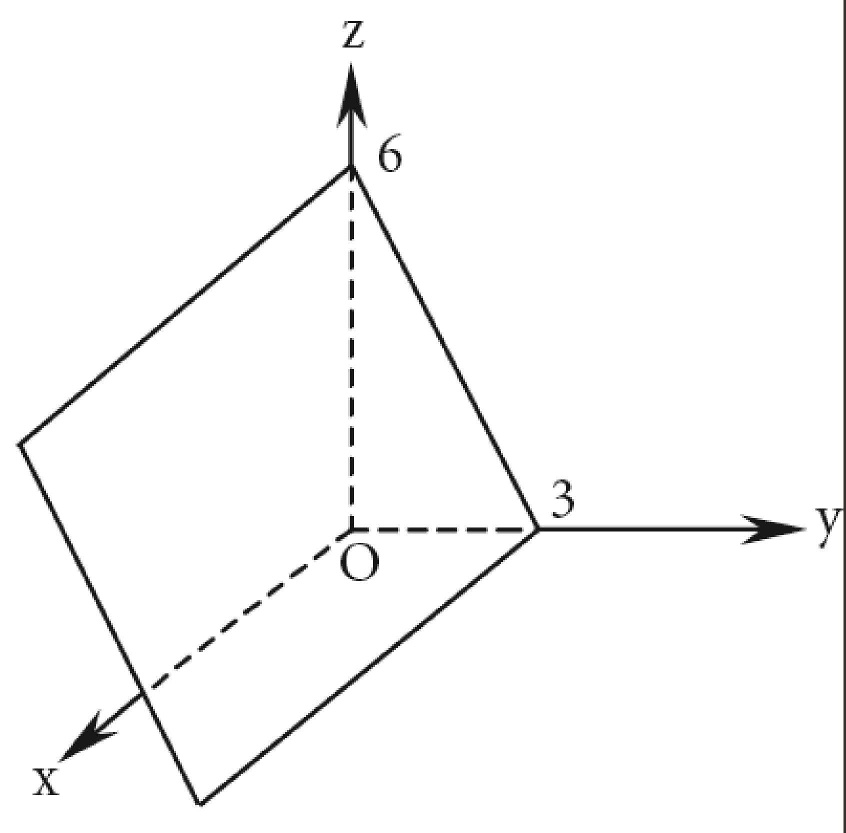


Figura 6.10

Casos 2 – $a = 0$ $(coeficiente\ de\ x)$

$4y + 2z - 12 = 0$

p/ $z = 0 \rightarrow y = 3$

p/ $y = 0 \rightarrow z = 6$

- Plano não tem ponto comum com eixo x;
- Paralelo ao eixo da variável ausente;
- Se $d = 0$ intercepta o eixo da variável ausente.

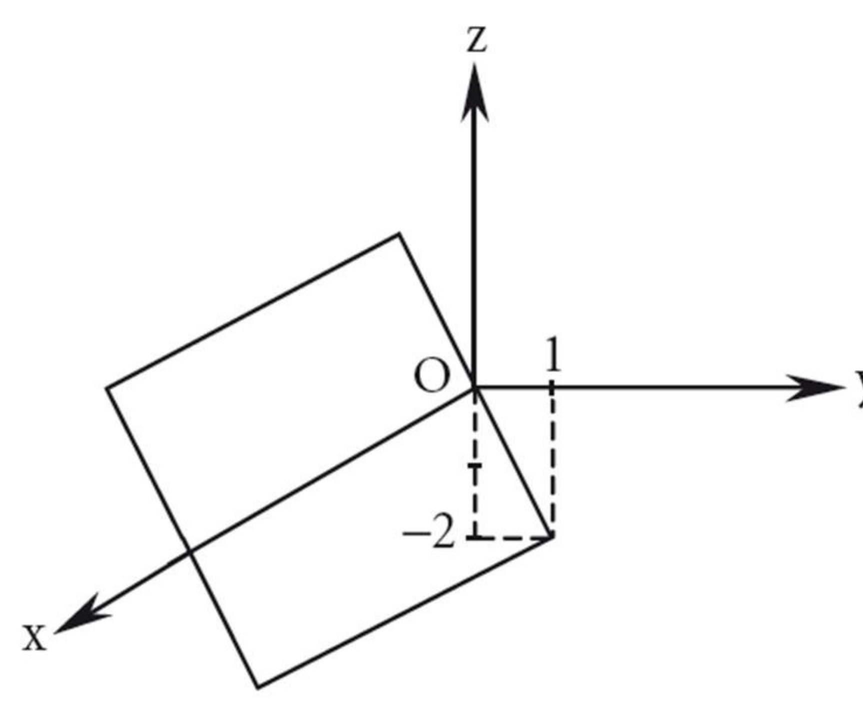


Figura 6.11

Casos 3 – $a = b = 0$

$2z - 12 = 0$

$\rightarrow \quad z = 6$

- Todos os pontos do plano são do tipo $(x, y, 6)$;
- Paralelo ao plano xoy e intercepta $z = 6$

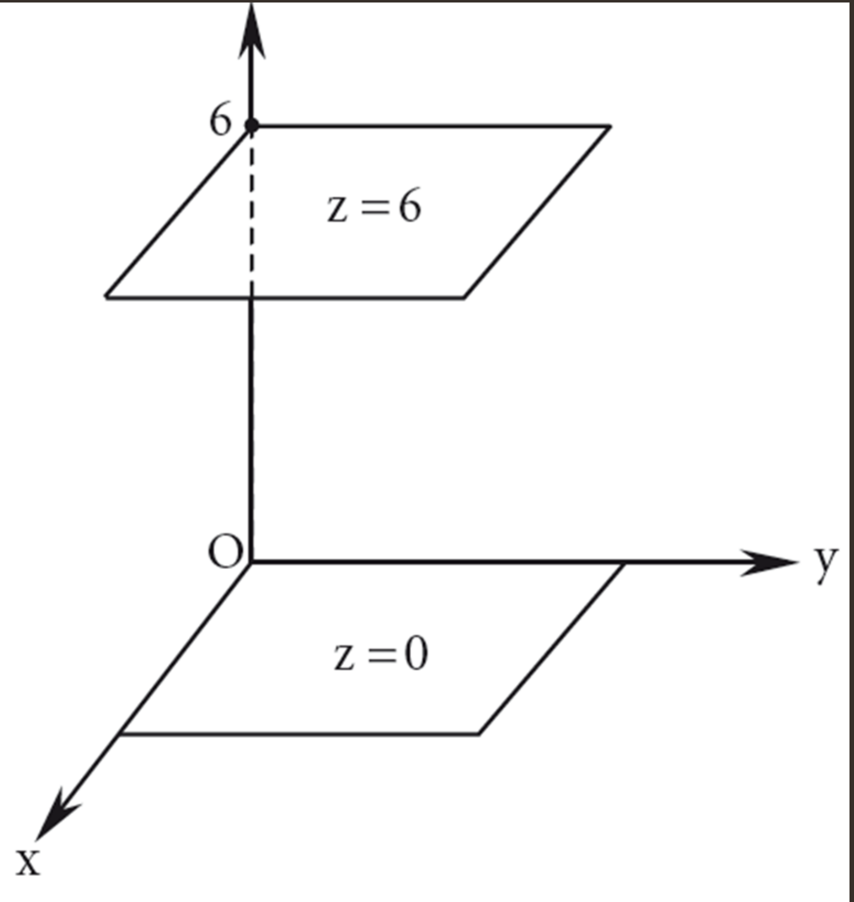


Figura 6.14

Casos 3 – *analogamente*

$\mathbf{4y - 12 = 0 \;\rightarrow\; y = 3}$ $\qquad$ $\mathbf{3x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 4}$

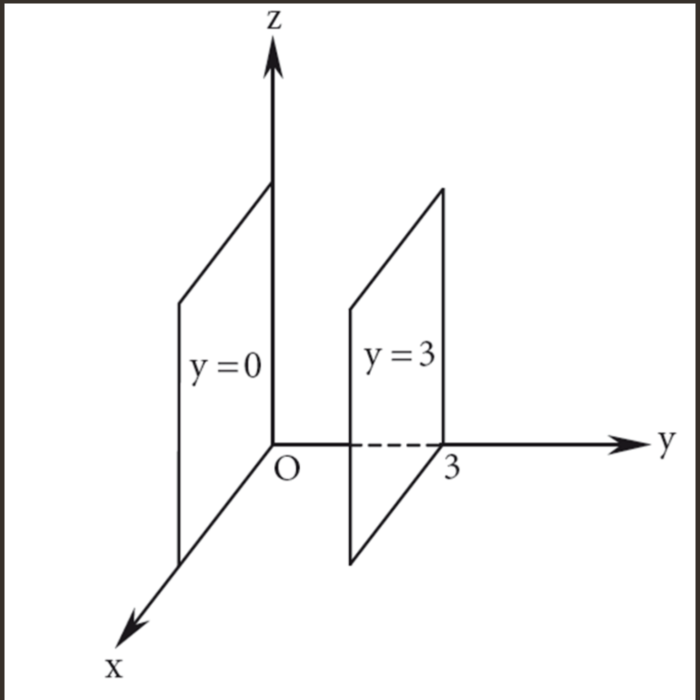


Figura 6.15

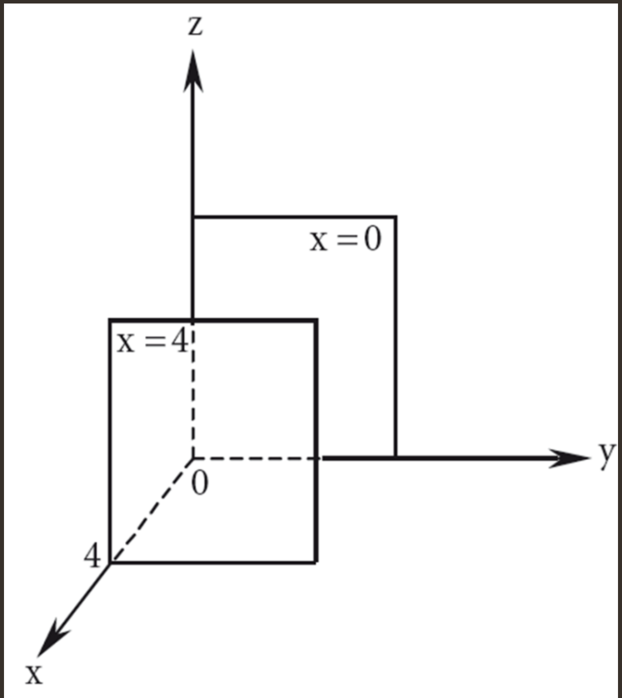


Figura 6.16

Ângulo entre dois planos

Sejam dois planos π_1 *e* π_2 com vetores normais $\overrightarrow{n_1}$ *e* $\overrightarrow{n_2}$, respectivamente.

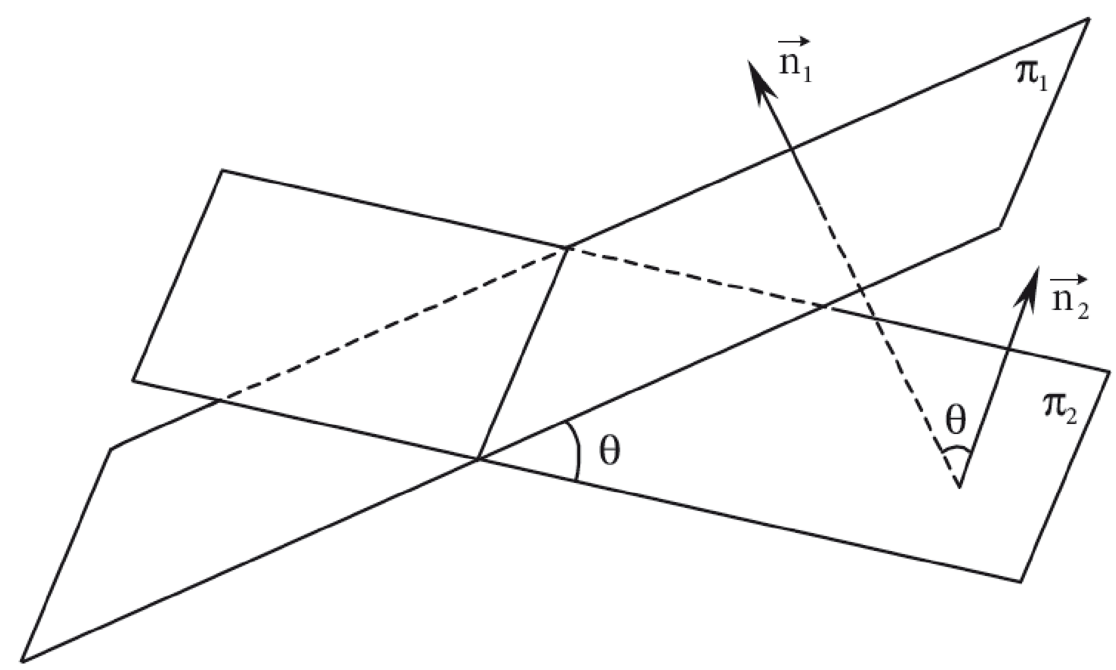


Figura 6.17

Ângulo entre dois planos

O menor ângulo que os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ formam entre si é o ângulo entre planos:

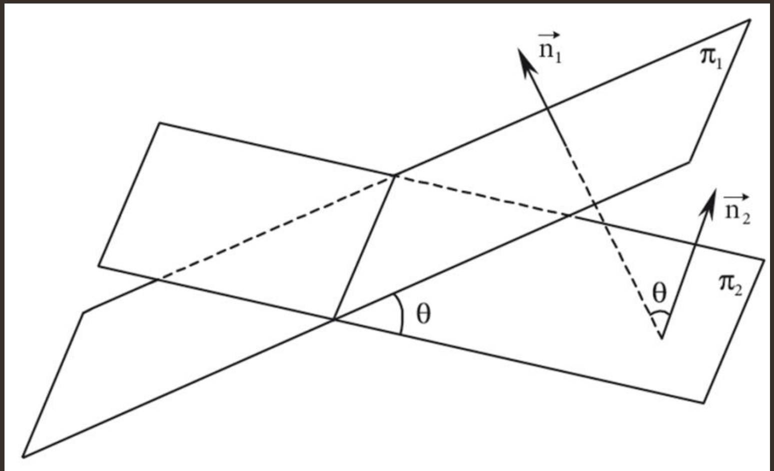


Figura 6.17

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 1

Determine o ângulo entre os planos: *resp.: 30º*

π_1: $2x + y - z + 3 = 0$ π_2: $x + y - 4 = 0$.

Exercício em classe

Determine uma equação geral do plano que seja:

(a) Paralelo ao plano $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{2x - 3y - z + 5 = 0}$ e que contenha o ponto $\boldsymbol{A(4, -2, 1)}$.

$\boldsymbol{Resp.}$: $\mathbf{2x - 3y - z - 13 = 0}$

Exercício em classe

(b) Perpendicular a reta: $\boldsymbol{Resp.:}$ $\mathbf{2x - 3y + 4z - 1 = 0}$

r: $x = 2 + 2t \qquad y = 1 - 3t \qquad z = 4t.$

Exercício em classe

(c) Escrever o sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

$\mathrm{A}(1, 0, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 2, -1)$ e $C(1, 1, -1)$.

$\boldsymbol{Resp.:}$ $\boldsymbol{x = 1 - 2h}$ $\boldsymbol{y = 2h + t}$ $\boldsymbol{z = 2 - 3h - 3t}$

Aula 3 - Plano

Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares quando o produto escalar entre seus vetores normais é nulo.

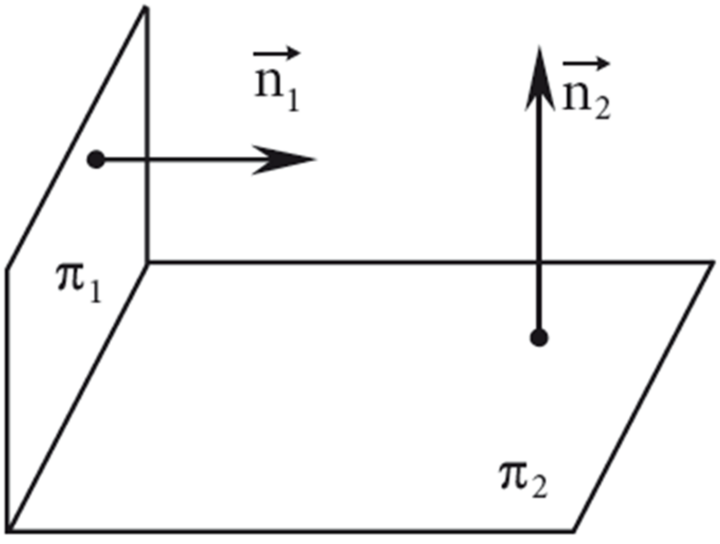


Figura 6.18

$$\pi_1 \perp \pi_2 \iff \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$$

$$\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 0$$

Exemplo 1

Verificar se os planos são perpendiculares:

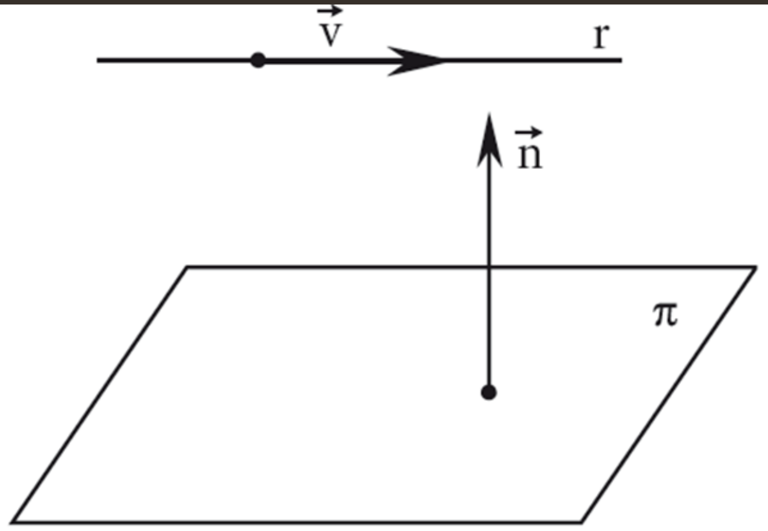
$$\boldsymbol{\pi_1}: \; \boldsymbol{x + y - 4 = 0} \qquad \boldsymbol{\pi_2}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 - h + 2t} \\ \boldsymbol{y = h + t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases} .$$

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta r com direção de $\vec{v}$ e um plano π com vetor normal $\vec{n}$.

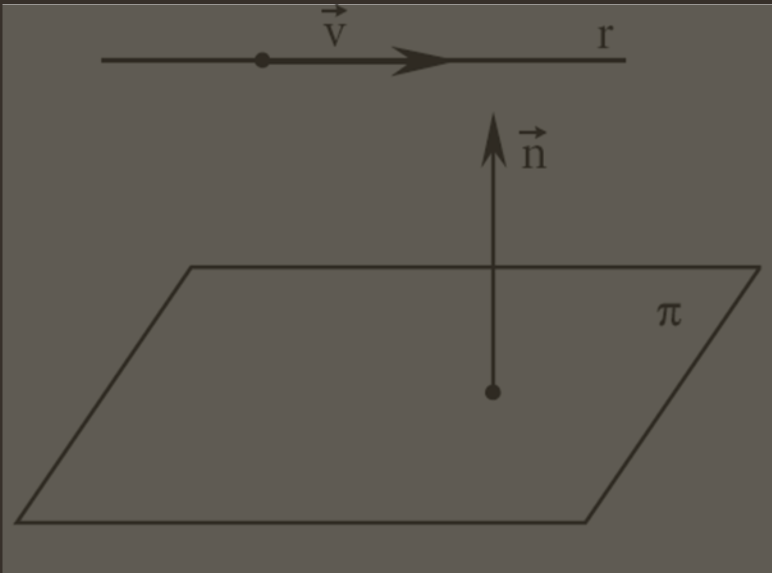


$$r \parallel \pi_2 \ \ se \ \ \vec{v} \perp \vec{n}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{n} = 0$$

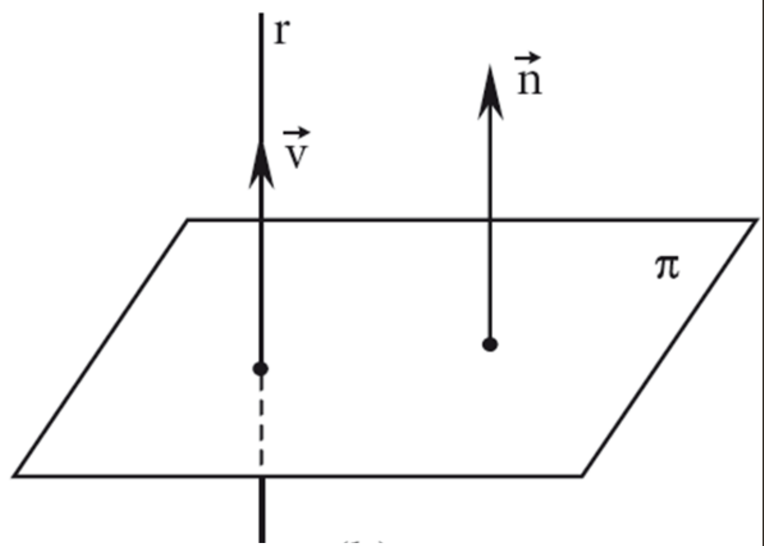
Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.



$$\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\pi_2} \;\; \boldsymbol{se} \;\; \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$$

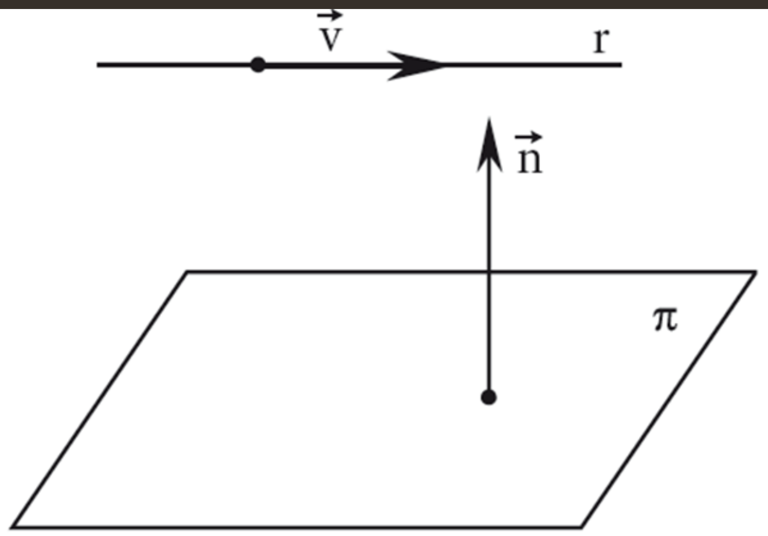


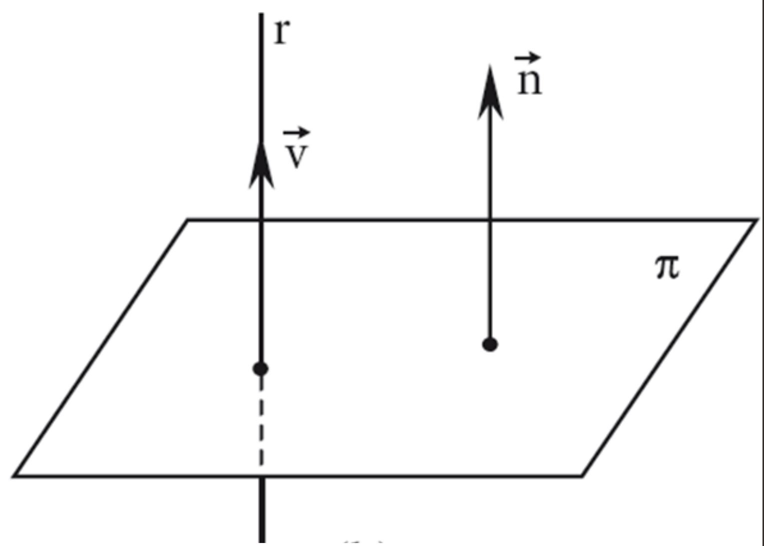
$$\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi_2} \;\; \boldsymbol{se} \;\; \vec{\boldsymbol{v}} \parallel \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.





$$\boldsymbol{r \parallel \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \perp \vec{n}}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} \bullet \vec{n} = 0}$$

$$\boldsymbol{r \perp \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \parallel \vec{n}}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = k\vec{n} \qquad (k \in \mathbb{R})}$$

Reta contida em um plano

A reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ está contida no plano $\boldsymbol{\pi}$ se uma das duas condições for satisfeita:

I. $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B}$ pertencerem,

simultaneamente, a $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi}$;

II. Um ponto pertencer a $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{\pi}$ e ainda $\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$.

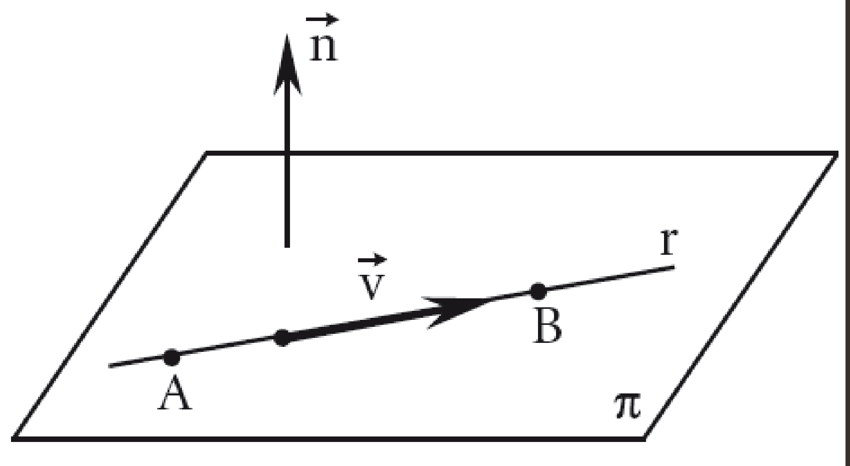


Figura 6.20

Exemplo 2

Determinar os valores de $\boldsymbol{m}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{n}$ para que a reta $\boldsymbol{r}$ esteja contida no plano $\boldsymbol{\pi}$:

resp.: m=3 e n=-1

$$\boldsymbol{\pi}: \; \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{my} + \boldsymbol{nz} - \mathbf{5} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{3} + \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1} - \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{z} = -\mathbf{2} - \boldsymbol{t} \end{cases}$$

Exercício

Obter a equação geral do plano que contenha o ponto $\boldsymbol{A(3,-2,-1)}$ e a reta $\boldsymbol{r}$ definida pelas equações:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x+2y+z-1=0} \\ \boldsymbol{2x+y-z+7=0} \end{cases}$$

Aula 4 - Plano

Intersecção de dois planos

Sejam dois planos não paralelos e uma reta r .

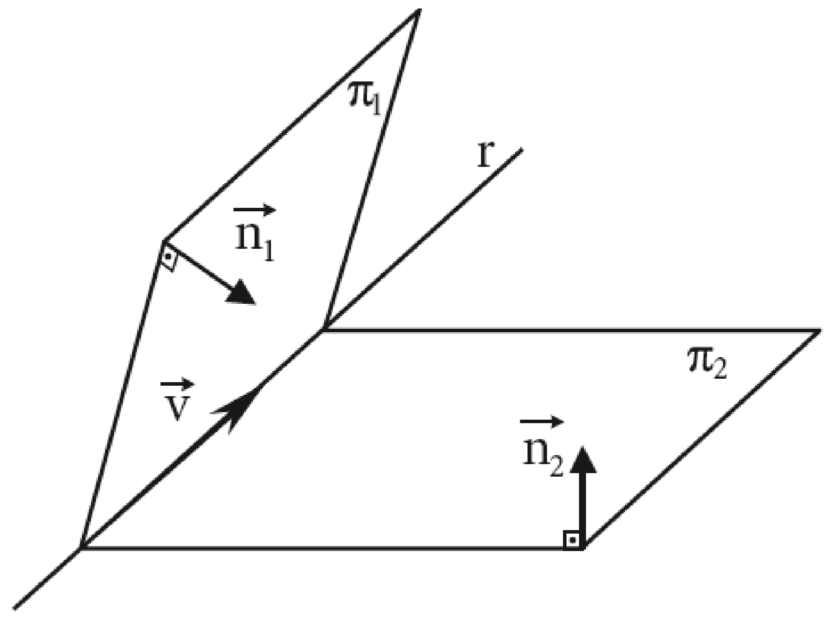


Figura 6.21

Intersecção de dois planos

- A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta r cujas equações se deseja determinar;

- São dois procedimentos básicos para determinar r.

Intersecção de dois planos

Procedimento 1

- Coordenadas de $P(x, y, z) \in r$ satisfaz as equações de π_1 e π_2.

Procedimento 2

- Derterminar um ponto $P(x, y, z) \in r$ e o vetor diretor .

Exemplo

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Exemplo

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: & 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: & x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Voltando y na expressão de z: $\quad z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$z = -2x + 4$$

Exemplo

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: & 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: & x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Equações reduzidas de r

Voltando y na expressão de z: $\quad z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$z = -2x + 4$$

Exemplo

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de r).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$se\ x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: \;\; -y + z - 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = y + 5 \\ \;\pi_2: \;\; +y + 2z - 7 = 0 \; \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$

Exemplo

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de π).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$se\ x = 0$ $\begin{cases} \pi_1: \;\; -y + z - 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = y + 5 \\ \pi_2: \;\; +y + 2z - 7 = 0 \;\rightarrow y + 2(y+5) = 7 \end{cases}$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$P(0, -1, 4)$

Exemplo

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de π).

$$\begin{cases} \pi_1: \; 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: \; x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$se\ x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: \; -y + z - 5 = 0 \; \rightarrow \; z = y + 5 \\ \pi_2: \; +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y+5) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \; \rightarrow \; z = 4 \\ y = -1 \end{cases} \qquad P(0, -1, 4)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (-3, -9, 6)$$

$$r: \; (x, y, z) = (0, -1, 4) + \mathrm{t}(-3, -9, 6)$$

Exercícios em classe

(a) Calcular os valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ para que a reta $\boldsymbol{r}$ esteja contida no plano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{mx + 2y - 3z + n = 0}$

$$r: \ x = -2 + t \qquad y = 3 - 2t \qquad z = 2t.$$

$\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{m = 10 \ \ e \ \ n = 14}$

(b) Encontrar as equações reduzidas na variável $\boldsymbol{x}$ da reta $\boldsymbol{r}$ de intersecção dos planos:

$$\boldsymbol{\pi_1}: \ \boldsymbol{x + y - z + 2 = 0} \qquad \boldsymbol{\pi_2}: \ \boldsymbol{x + y + 2z - 1 = 0}$$

$\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{y = -x - 1 \quad e \quad z = 1}$

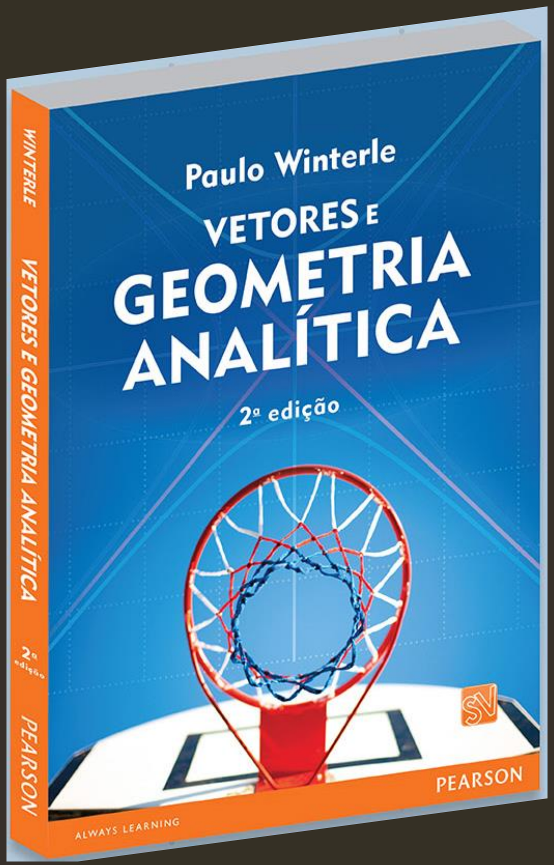
Exercícios em classe

(c) Determinar o ponto de intersecção da reta $\boldsymbol{r}$ de com o plano $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{2x - y + 3z - 9 = 0}$ $\quad$ $\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{A(2, -8, -1)}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \mathbf{y = x - 10} \\ \mathbf{z = -x + 1} \end{cases}$$

(d) Dada a equação geral de $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{3x - 2y - z - 6 = 0}$ determinar um sistema de equações paramétricas desse plano $\quad$ $\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{x = t} \quad \boldsymbol{y = h} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{z = -6 + 3h - 2t}$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.