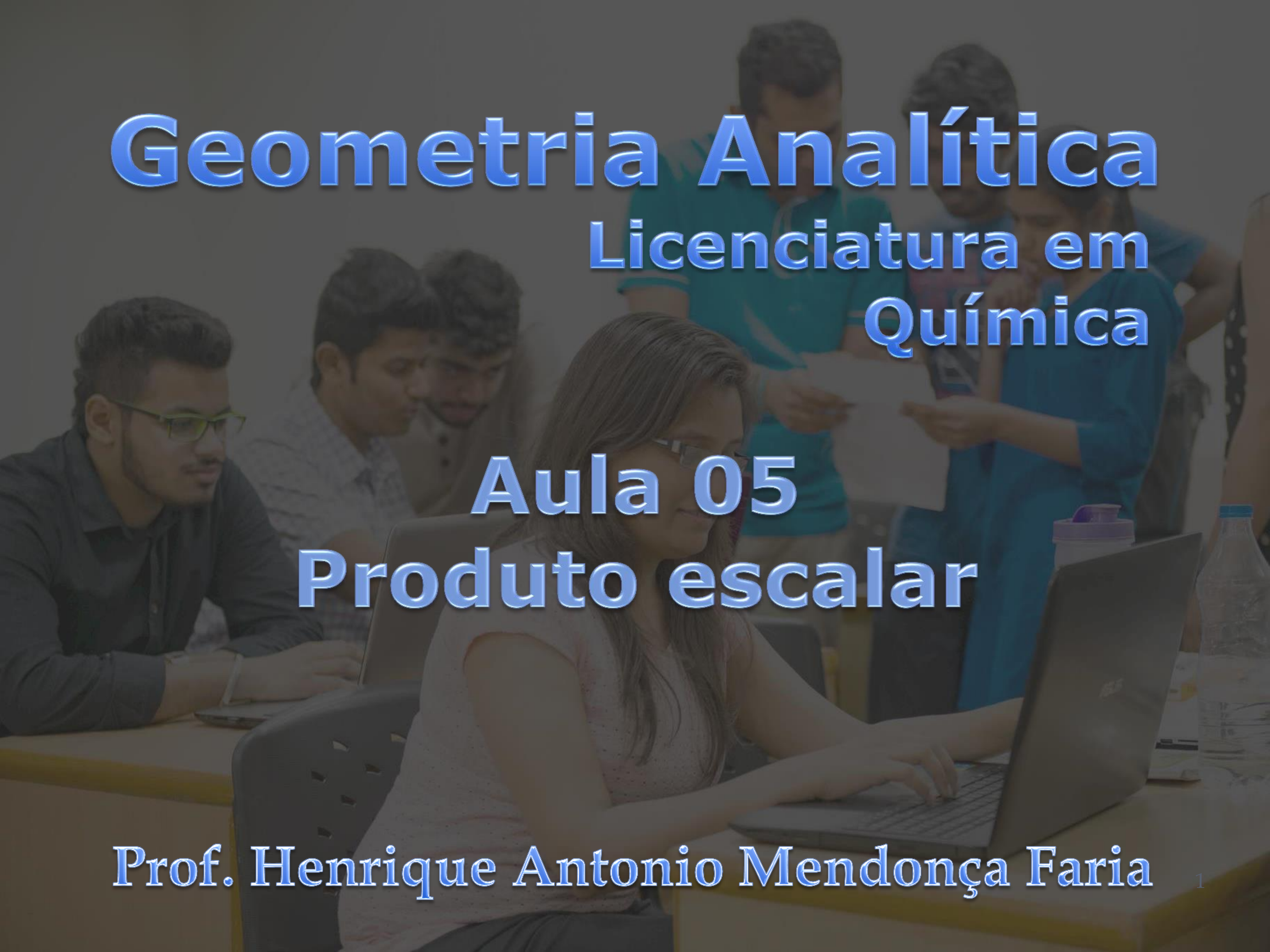


Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Aula 05
Produto escalar

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

Aula 5

3.1 Definição de produto escalar

Sejam: $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$

O produto escalar, denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, é a operação:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

O resultado do produto escalar é um número real.

Exemplo 1

a) Sendo : $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Dados $\vec{u} = (4, \propto, -1)$ **e** $\vec{v} = (\propto, 2, 3)$ e os

pontos $A = (4, -1, 2)$ **e** $B = (3, 2, -1)$

determinar $\propto$ tal que:

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \overrightarrow{BA}\right) = 5$$

3.2 Módulo de um vetor

Se $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou $\vec{v} = (x, y, z)$

Em que x, y, z são os componentes de $\vec{v}$ na base canônica $C = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

O módulo desse vetor ($|\vec{v}|$) é definido por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Versor

O versor $\vec{\boldsymbol{u}}$ de um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ é um vetor unitário na mesma direção e sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Calculado por:

$$\textbf{Versor} \quad \rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{u}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}}{|\vec{\boldsymbol{v}}|}$$

Exemplo 2

a) Dado o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$, mostrar que seu versor $\vec{\boldsymbol{u}}$ é um vetor unitário de mesmo sentido de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

b) Determinar o número real $\propto$ para que o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = (\propto, -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$ seja unitário.

3.3 Propriedade do produto escalar

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$,

$\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ e $m \in \mathbb{R}$

1. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

   $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$

2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (comutativa)

3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributiva)

4. $(m\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (m\,\vec{v})$ (distributiva)

5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

3.4 Ângulo entre dois vetores

O cosseno do ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definido pela razão entre o produto escalar e os módulos destes vetores.

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

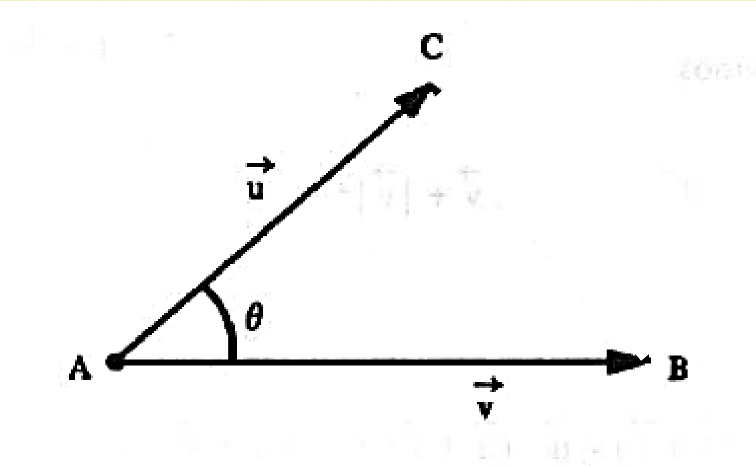
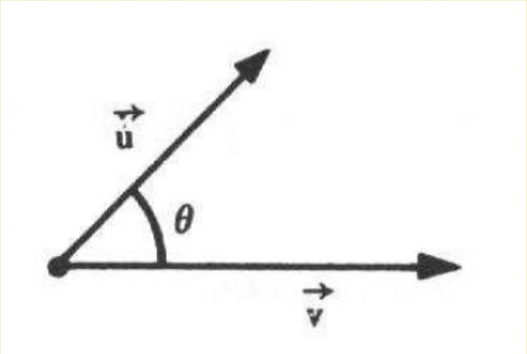


Figura 3.4

Há três situações para o ângulo

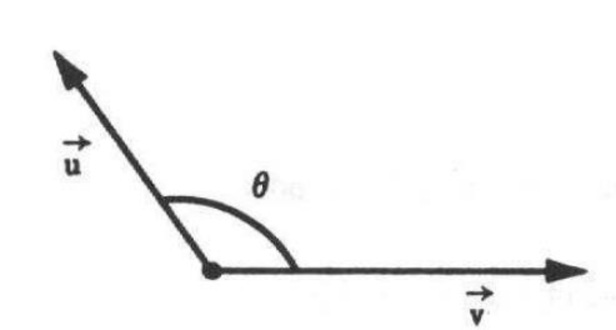
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0, \quad \cos\theta > 0$

$$\mathbf{0 \leq \boldsymbol{\theta} < 90°}$$



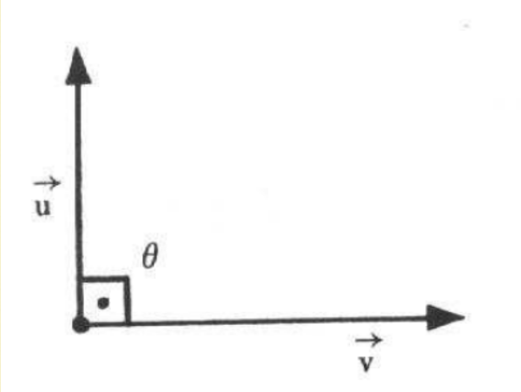
Se $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0, \quad \cos\theta < 0$

$$\mathbf{90° < \boldsymbol{\theta} \leq 180°}$$



Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \cos\theta > 0$

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{90°}$$



Ângulos notáveis

θ (graus)	θ (rad)	$\mathrm{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\mathrm{tg}\theta = \dfrac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta}$
30	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exemplo 3

a) Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{4})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$.

b) Determine um vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ ortogonal aos vetores $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{1}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{2}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$.

Respostas: a) $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{45°}$ b) $\vec{\boldsymbol{v}} = (1,1 - 1)$

Exemplo 3

c) Sabendo que $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, -\mathbf{1})$ forma um ângulo de 60° com o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, definido pelos pontos $A(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$ e $B(\mathbf{4}, \mathbf{0}, \boldsymbol{m})$, calcule $\boldsymbol{m}$.

d) Calcule os produtos escalares entre os vetores da base canônica: $\vec{\boldsymbol{\imath}} \cdot \vec{\boldsymbol{\jmath}}$, $\vec{\boldsymbol{\jmath}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}}$ e $\vec{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{\imath}}$.

Respostas: c) $\boldsymbol{m} = -\mathbf{4}$

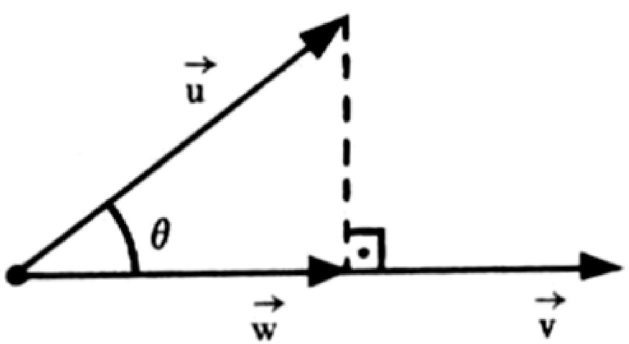
Aula 6

Projeção de um vetor e Produto escalar no R^2

3.6 Projeção de um vetor

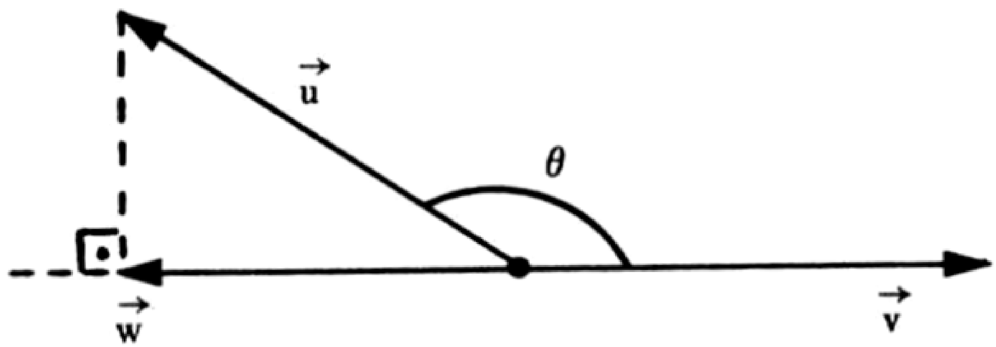
Sejam: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos e $\boldsymbol{\theta}$ o ângulo formado entre eles.

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ permite duas situações:



$\boldsymbol{\theta} < \mathbf{90°}$

ângulo agudo



$\mathbf{90°} < \boldsymbol{\theta} < \mathbf{180°}$

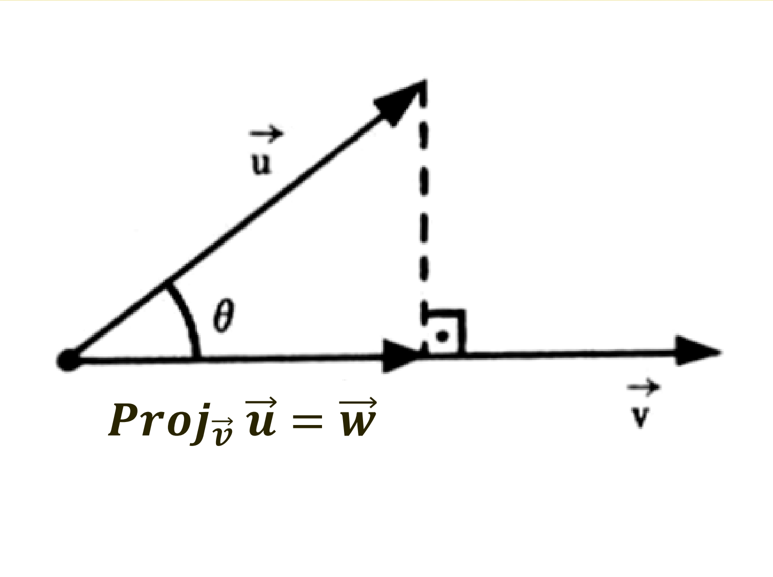
ângulo obtuso

3.6 Projeção de um vetor

A projeção ($\vec{w}$) de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ é denotada por:

$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \vec{w}$$

E calculada por:



$$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}$$

Exemplo 1

Determinar o vetor projeção de $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$ sobre $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{0})$.

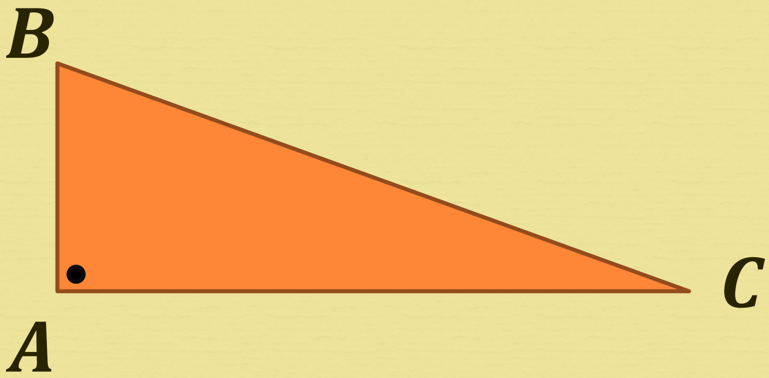
$$\boldsymbol{Proj}_{\vec{v}}\,\vec{\boldsymbol{u}} = \left(\frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}\right)\vec{\boldsymbol{v}}$$

Exercício em classe

Sejam os pontos $\boldsymbol{A(1,2,-1)}$, $\boldsymbol{B(-1,0,-1)}$ e $\boldsymbol{C(2,1,2)}$, vértices de um triângulo.

a) Mostrar que o triângulo $\boldsymbol{ABC}$ é retângulo em $\boldsymbol{A}$.

b) Calcular a medida da projeção do cateto $\boldsymbol{AB}$ sobre a hipotenusa $\boldsymbol{BC}$.



3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Todas as propriedades e operações definidas para o espaço (R^3) são válidas para o R^2 (plano).

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$ (produto escalar);
- $|\vec{u}| = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ (módulo do vetor);
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ o ângulo θ entre os vetores é:

$$cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

3.7 Produto escalar no plano (R^2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, $\propto \in \mathbb{R}$

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ se e somente se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- $Proj_{\vec{v}}\, \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}}\right) \vec{v}$ (projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$);
- Valem todas as propriedades do produto escalar (comutativa, distributivas e outras).

Exemplo 2

Calcular a soma dos módulos dos vetores no plano $|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}|$, sabendo que $|\vec{\boldsymbol{u}}| = \mathbf{4}$, $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \mathbf{3}$ e o ângulo entre $\vec{\boldsymbol{u}}$ $\boldsymbol{e}$ $\vec{\boldsymbol{v}}$ é $\mathbf{60°}$. Considerar $\vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Resposta: $\sqrt{\mathbf{37}}$

Exemplo 3

Sabendo que $|\vec{\boldsymbol{u}}| = \mathbf{2}$, $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \mathbf{3}$ e o ângulo entre

$\vec{\boldsymbol{u}}\ \boldsymbol{e}\ \vec{\boldsymbol{v}}$ é $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\ [\boldsymbol{rad}]$.

Determine: $|(\mathbf{2}\vec{\boldsymbol{u}} - \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} - \mathbf{2}\vec{\boldsymbol{v}})|$

Resposta: $26 + 15\sqrt{2}$

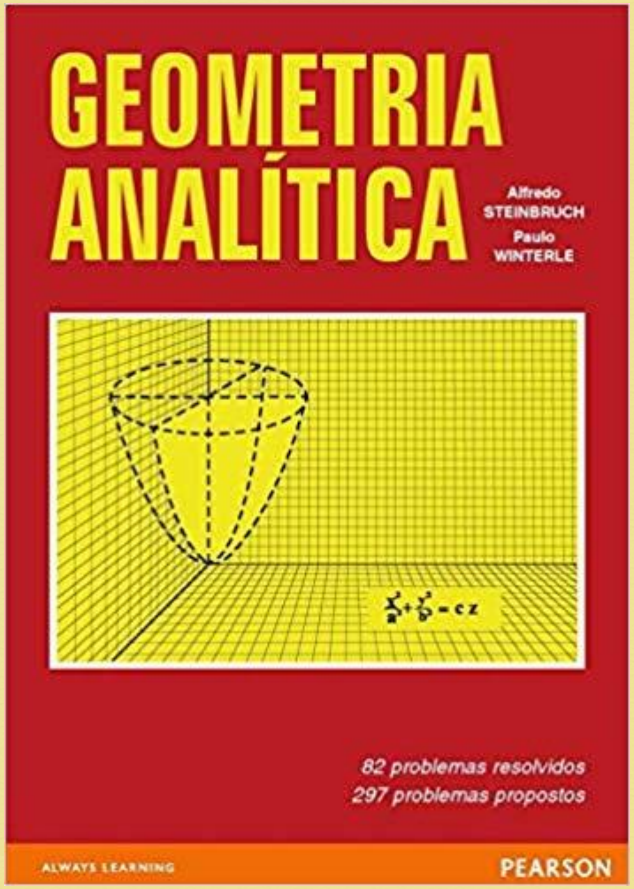
Resolver os problemas propostos:

p. 90: 2, 3, 5, 6, 12, 14, 15, 17, 23, 27, 29, 33 e 34.

p. 92: 35, 36, 40, 41

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.



Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>

Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

http://lattes.cnpq.br/1614784455223743