Cálculo I

Engenharia

Aula 06
Funções Exponenciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Expoentes irracionais

Sejam os números reais: $n, \; b > 0, \;\; p/q > 0$ (racional)

- $b^n = b \times b \times \cdots \times b \quad (n \; fatores)$

- $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n} \qquad$ Se $n = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^0 = 1$

- $b^{p/q} = \left(\sqrt[q]{b}\right)^p = \left(\sqrt[q]{b^p}\right)$

- $b^{-p/q} = \dfrac{1}{b^{p/q}}$

Expoentes irracionais

Regras de expoentes para $b > 0 \in \mathbb{R}$, p e $q \in \mathbb{R}$

1. $b^p b^q = b^{p+q}$

2. $\dfrac{b^p}{b^q} = b^{p-q}$

3. $(b^p)^q = b^{pq}$

Exemplos

$y = 2^5$ $\quad$ $y = 3^{3-2}$ $\quad$ $y = \left(2^3\right)^2$ $\quad$ $y = (3.5)^2$

Expoentes irracionais

Uma das maneiras para se definir potências irracionais como: $2^{\pi},\ 3^{\sqrt{2}}\ ou\ \pi^{-\sqrt{7}}$, consite em exprimi-las usando aproximações sucessivas com potências racionais.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Expoentes irracionais

Uma das maneiras para se definir potências irracionais como: 2^{π}, $3^{\sqrt{2}}$ *ou* $\pi^{-\sqrt{7}}$, consite em exprimi-las usando aproximações sucessivas com potências racionais.

Por exemplo: $2^{\pi} \approx 8{,}8250$
$(\textit{até a } 4^{a} \textit{ casa decimal})$

Tabela 0.5.1

x	2^x
3	8,000000
3,1	8,574188
3,14	8,815241
3,141	8,821353
3,1415	8,824411
3,14159	8,824962
3,141592	8,824974
3,1415926	8,824977

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família de funções exponenciais $f(x) = b^x$

- **Função exponencial:** $f(x) = b^x, \quad b > 0$

A base b é constante e o expoente x variável

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Família de funções exponenciais $f(x) = b^x$

- **Função exponencial:** $f(x) = b^x, \quad b > 0$

A base b é constante e o expoente x variável

crescente

decrescente

constante

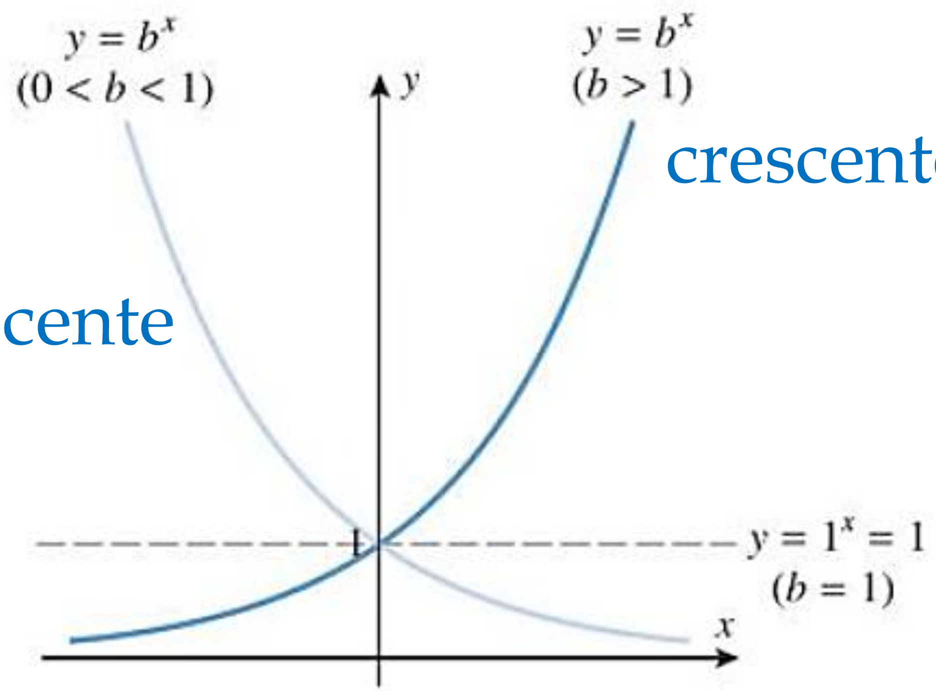


Figura 0.5.1

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Membros da família exponenciais

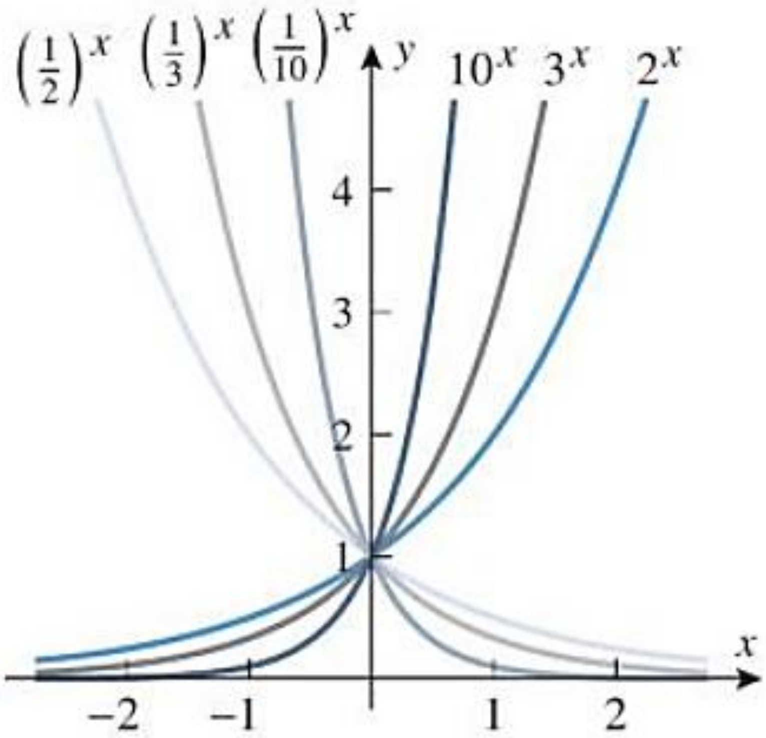


Figura 0.5.2 A família $y = b^x$ ($b > 0$)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Membros da família exponenciais

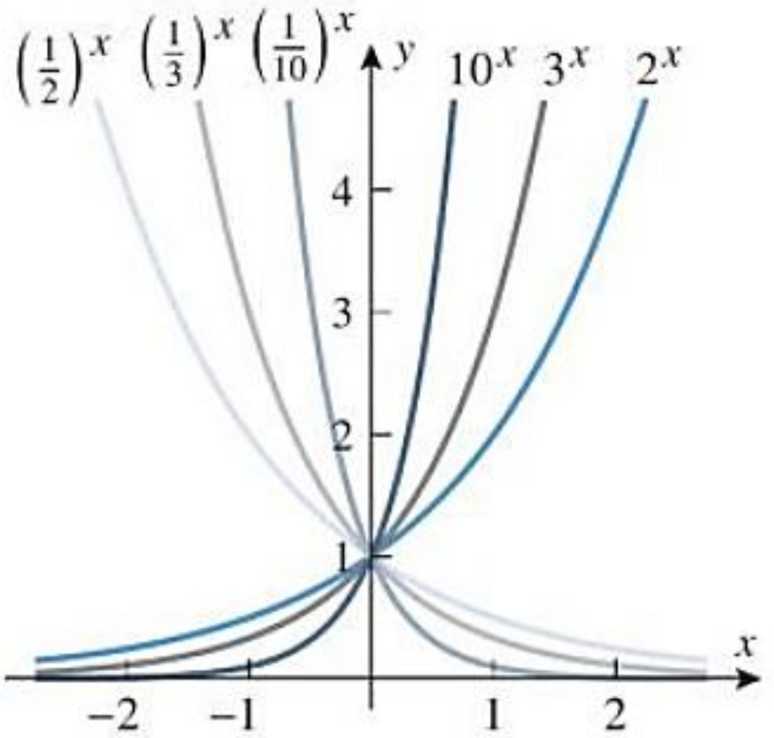


Figura 0.5.2 A família $y = b^x$ $(b > 0)$

Quanto maior a base $b > 1$ mais rapidamente a função $f(x) = b^x$ cresce para $x > 0$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Membros da família exponenciais

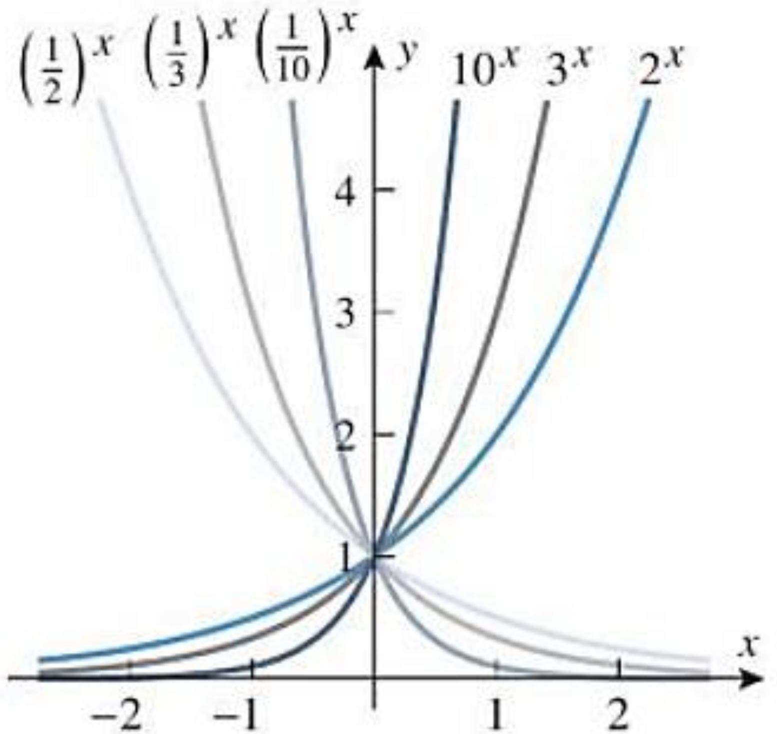


Figura 0.5.2 A família $y = b^x$ $(b > 0)$

Quanto maior a base $b > 1$ mais rapidamente a função $f(x) = b^x$ cresce para $x > 0$;

Se $b > 1$ o domínio de $f(x) = b^x$ é $(-\infty, +\infty)$;

A imagem de $f(x) = b^x$ é $(0, +\infty)$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Esboçar o gráfico de $f(x) = 1 - 2^x$

Encontrar o domínio e imagem

Exemplo 1

Esboçar o gráfico de $f(x) = 1 - 2^x$

Encontrar o domínio e imagem

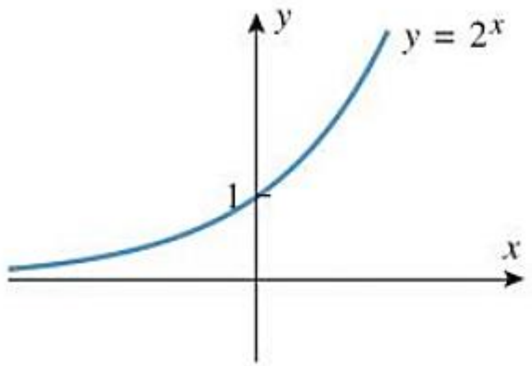


Figura 0.5.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Esboçar o gráfico de $f(x) = 1 - 2^x$

Encontrar o domínio e imagem

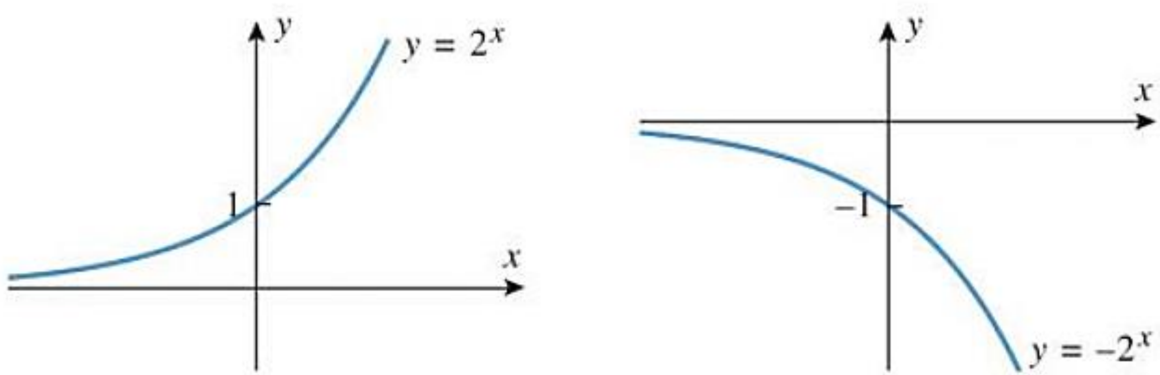


Figura 0.5.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Esboçar o gráfico de $f(x) = 1 - 2^x$

Encontrar o domínio e imagem

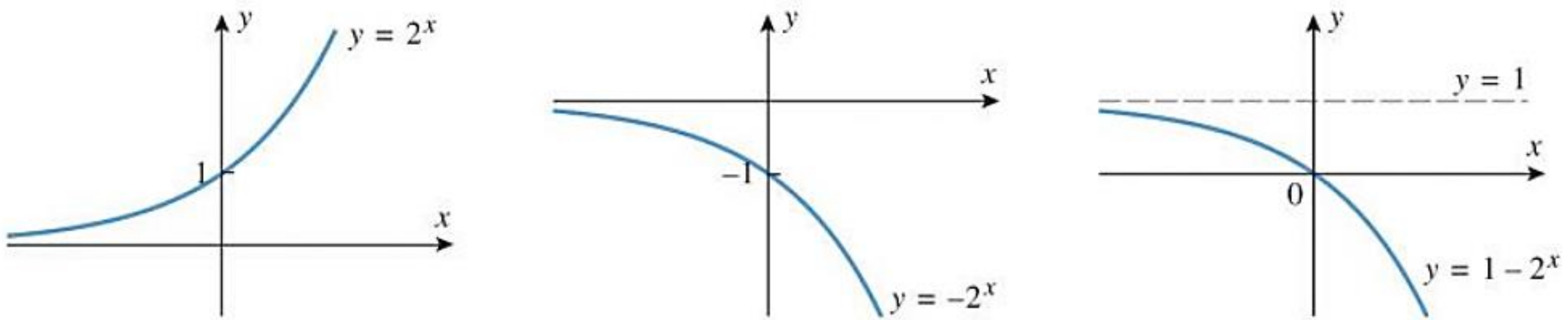
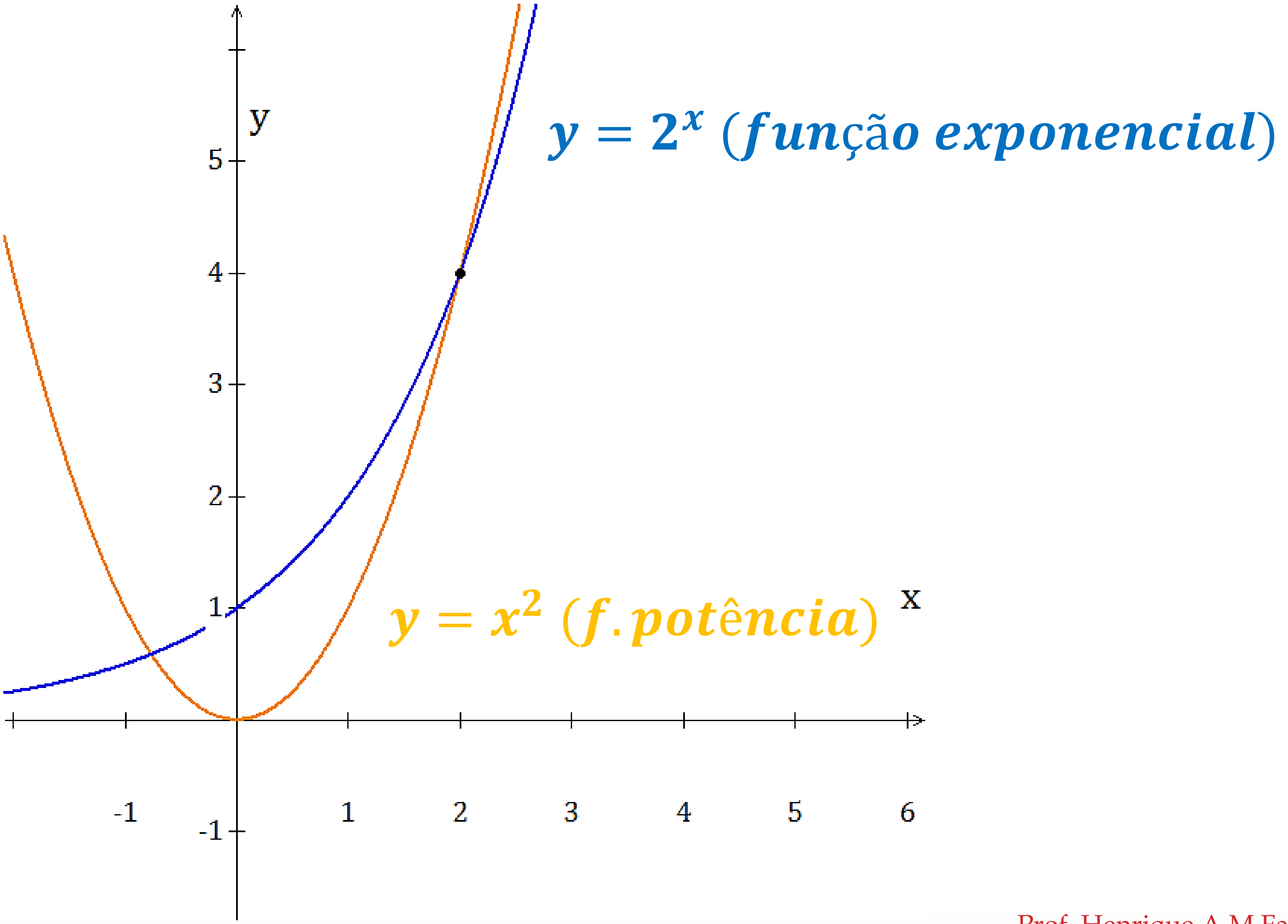


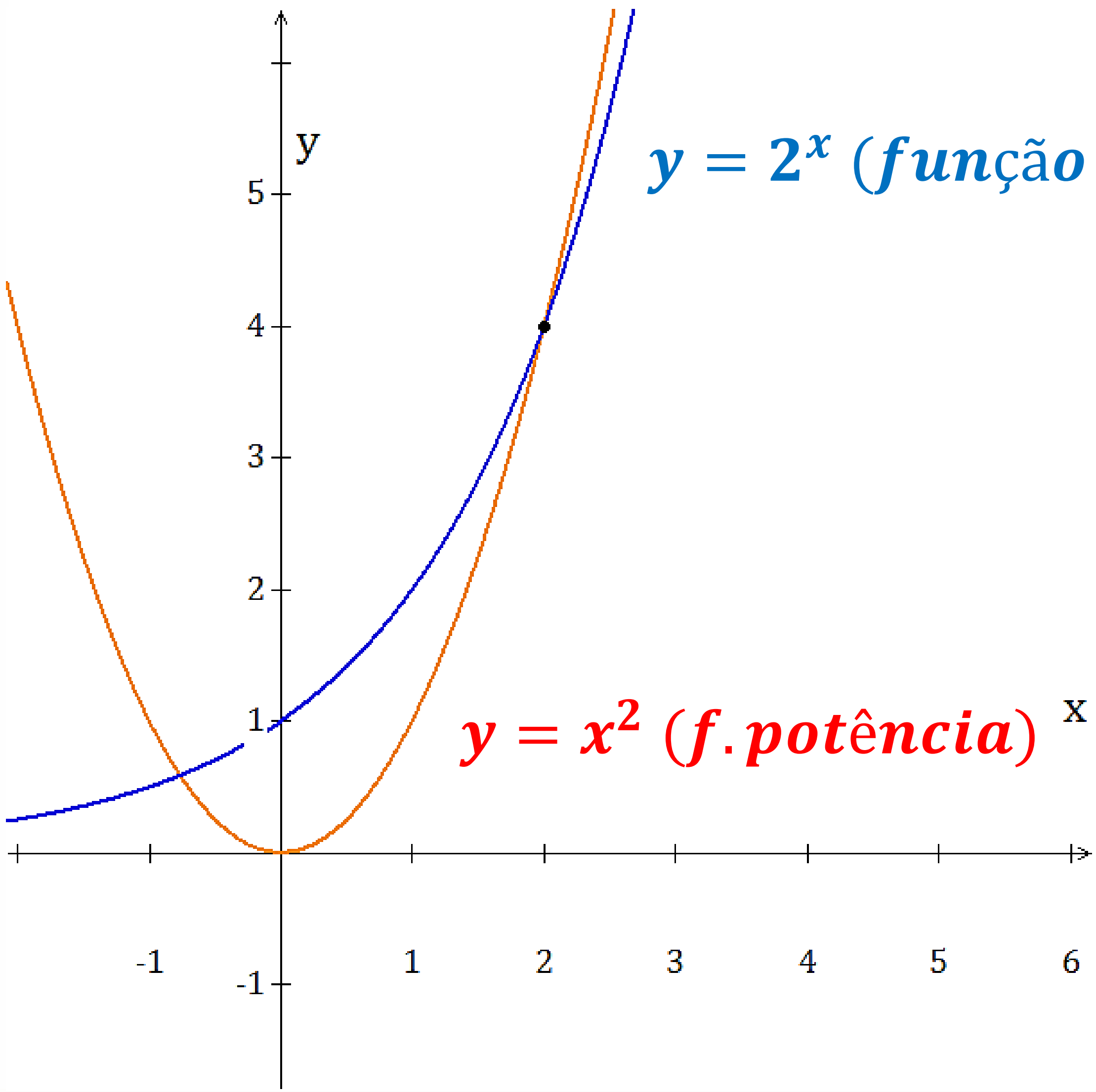
Figura 0.5.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Comparação exponencial / potência



Comparação exponencial / potência



$y = 2^x$ (*função exponencial*)

Para $\boldsymbol{x > 2}$

$\boldsymbol{y = x^2}$ cresce

mais rápido do

que $\boldsymbol{y = 2^x}$.

Funções exponencial natural $f(x) = e^x$

- A escolha da base afeta a forma com que $\boldsymbol{f}(x) = b^x$ cruza o eixo y;

- Há enorme simplificação, no cálculo, quando a base b fornece uma reta tangente de inclinação $m = y = 1$ no ponto (x, y);

Funções exponencial natural $f(x) = e^x$

- A escolha da base afeta a forma com que $\boldsymbol{f}(x) = b^x$ cruza o eixo y;

- Há enorme simplificação, no cálculo, quando a base b fornece uma reta tangente de inclinação $m = y = 1$ no ponto (x, y);

- Essa base existe e foi descoberta pelo matemático suíço Euler, em 1727.

Número e (Constante de Euler)

- A função $f(x) = e^x$ é chamada exponencial natural;

- A base e é um número irracional constante definido pelo limite:

$$\lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x = e \cong 2{,}71828 \ldots$$

Número *e* (Constante de Euler)

x	$e = \lim_{x \to \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right]^x$
1	2
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71827
1.000.000	2,71828

Funções exponencial natural

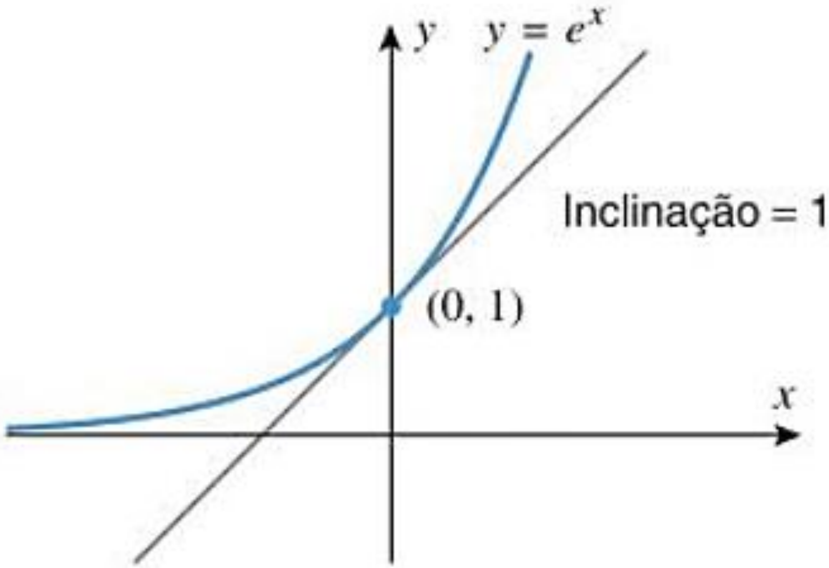


Figura 0.5.4 A reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0, 1)$ tem inclinação 1.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aula 06
Funções Logarítmicas

Logaritmos

Da álgebra, logaritmos são expoentes:

$$\boldsymbol{y} = \log_b x \qquad com: \begin{cases} b > 0 \\ b \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Em que a operação para encontrar x é:

$$\boldsymbol{y} = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$$

Exemplos

$$\log_{10} 100 = 2 \qquad \log_2 16 = 4 \qquad \log_b 1 = 0$$

Funções logarítmicas

Funções da forma:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) = \log_b x \qquad com: \begin{cases} b > 0 \\ b \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

A função logarítmica é a inversa da exponencial:

$$\boldsymbol{y} = \log_b x \quad \Leftrightarrow \quad x = b^y$$

Funções logarítmicas

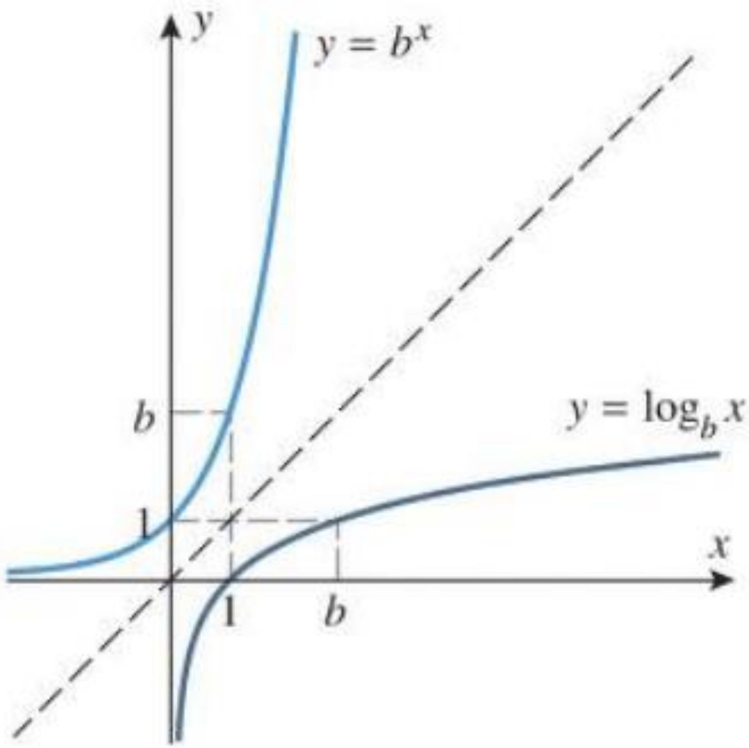


Figura 0.5.6

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções logarítmicas

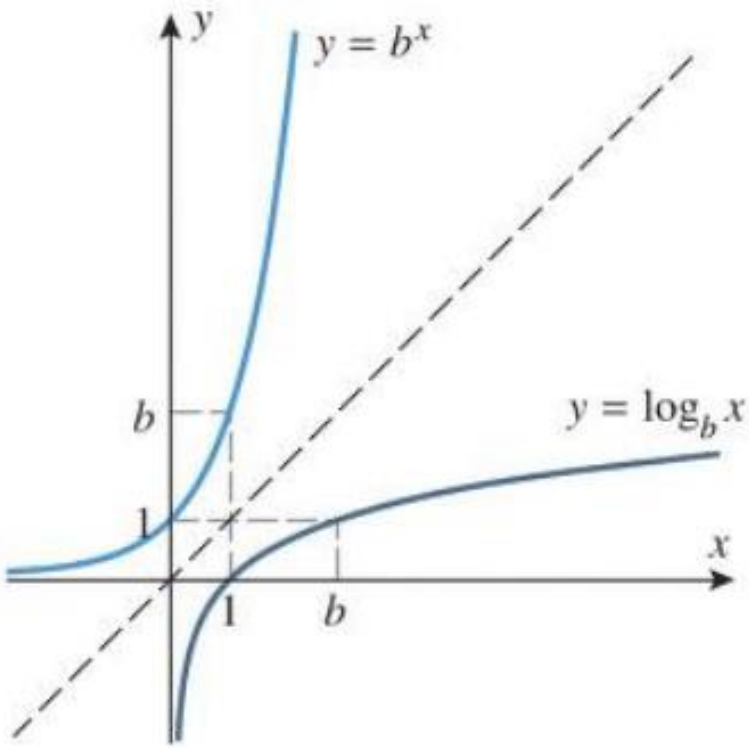


Figura 0.5.6

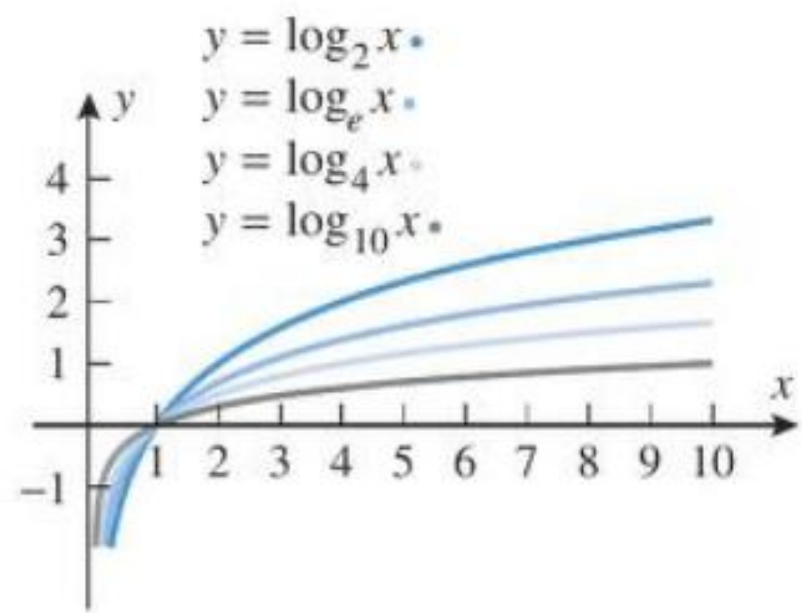


Figura 0.5.7 A família $y = \log_b x \ (b > 1)$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Funções logarítmicas na base *e*

Na base *e* (logaritimo natural ou neperiano):

$$\log_e x = \ln x \qquad com: \ \ x > 0$$

$$\boldsymbol{y} = \ln x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = e^y$$

A função logarítmica natural será:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \ln x \qquad x > 0$$

Exemplos

$$\ln 1 = 0 \qquad \ln e = 1 \qquad \ln 1/e = -1$$

Propriedades dos logaritmos

Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}$ números reais positivos, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$.

1. $\log_{\boldsymbol{b}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$
2. $\log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \mathbf{1}$

Propriedades dos logaritmos

Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{c}$ números reais positivos, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$.

1. $\log_{\boldsymbol{b}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$
2. $\log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
3. $\log_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{ac}) = \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} + \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{c}$
4. $\log_{\boldsymbol{b}} \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\right) = \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} - \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{c}$
5. $\log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$

Propriedades dos logaritmos

Sejam $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{c}$ números reais positivos, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$.

1. $\log_{\boldsymbol{b}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$
2. $\log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{b} = \mathbf{1}$
3. $\log_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{ac}) = \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} + \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{c}$
4. $\log_{\boldsymbol{b}} \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}\right) = \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} - \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{c}$
5. $\log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$

$\log_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{u} \pm \boldsymbol{v}) \neq \log_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} \pm \log_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{c}$

Propriedades dos logaritmos neperianos

Sejam $\boldsymbol{a, c, e = 2,7182...}$ reais positivos, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$.

1. $\boldsymbol{ln\,1 = 0}$
2. $\boldsymbol{ln\,e = 1}$

Propriedades dos logaritmos neperianos

Sejam $\boldsymbol{a, c, e = 2,7182...}$ reais positivos, $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$.

1. $\boldsymbol{ln\,1 = 0}$
2. $\boldsymbol{ln\,e = 1}$
3. $\boldsymbol{ln\,(ac) = ln\,a + ln\,c}$
4. $\boldsymbol{ln\left(\frac{a}{c}\right) = ln\,a - ln\,c}$
5. $\boldsymbol{ln\,a^r = r\,ln\,a}$

Propriedades dos logaritmos neperianos

Sejam $a, c, e = 2,7182...$ reais positivos, $r \in \mathbb{R}$.

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln e = 1$
3. $\ln (ac) = \ln a + \ln c$
4. $\ln \left(\frac{a}{c}\right) = \ln a - \ln c$
5. $\ln a^r = r \ln a$
6. $\ln e^x = x$
7. $e^{\ln x} = x$

Tabela 0.5.3

CORRESPONDÊNCIA ENTRE AS PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS E EXPONENCIAIS

PROPRIEDADE DE b^x	PROPRIEDADE DE $\log_b x$
$b^0 = 1$	$\log_b 1 = 0$
$b^1 = b$	$\log_b b = 1$
Imagem é $(0, +\infty)$	Domínio é $(0, +\infty)$
Domínio é $(-\infty, +\infty)$	Imagem é $(-\infty, +\infty)$
O eixo x é uma assíntota horizontal	O eixo y é uma assíntota vertical

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Propriedades de cancelamento

$$\log_b b^x = x \qquad para\ todo\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$b^{\log_b x} = x \qquad para \quad x > 0$$

$$\ln e^x = x \qquad para\ todo\ \ x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad para \quad x > 0$$

Exemplos

Funções b^x *e* $\log_b x$ cancelam o efeito da outra quando compostas.

$$\log_{10} 10^x = x \qquad 10^{\log x} = x$$

Exercício

Funções e^x, $\ln x$, do mesmo modo, cancelam o efeito da outra.

$$\ln e^5 = 5 \qquad e^{\ln \pi} = \pi$$

Resolução de equações envolvendo exponenciais e logaritmos

A propriedades dos logaritmos são usadas para expandir ou condensar somas e diferenças.

Deve-se observar a relação inversa entre funções:

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \ln y \quad se \;\; y > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}$$

$$y = b^x \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \log_b y \quad se \;\; y > 0, x \in \mathbb{R}, \; b > 0, b \neq 1$$

Exemplo: aplicação de logaritmo

(a) $\log \dfrac{xy^5}{\sqrt{z}} =$ (expandir)

(b) $\dfrac{1}{3}\ln x - \ln(x^2 - 1) + 2\ln(x + 3) =$ (condensar)

Exercício

$$5\ln 2 + \ln 3 - \ln 8 = \text{(condensar)}$$

Resolução de equações envolvendo exponenciais e logaritmos

Uma equação $\log_b x = k$ pode ser resolvida para x reescrevendo-a na forma $x = b^k$;

A equação $b^x = k$ pode ser resolvida tomando-se um logaritmo qualquer em ambos os lados.

Prof. Henrique A M Faria

Exemplo 2

Encontre x tal que:

(a) $\log x = \sqrt{2}$ (b) $\ln(x+1) = 5$ (c) $5^x = 7$

Exercício

Resolva para x: $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

Mudança de base em logaritmos

Se $\boldsymbol{y = \log_b x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{b^y = x}$

Tomando-se o logaritmo, em outra base,

em ambos os lados da relação $b^y = x$:

Mudança de base em logaritmos

Se $\boldsymbol{y = \log_b x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{b^y = x}$

Tomando-se o logaritmo, em outra base,

em ambos os lados da relação $b^y = x$:

$$ln\, b^y = ln\, x \quad \Rightarrow \quad y\, ln\, b = ln\, x \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{ln\, x}{ln\, b}}$$

Exemplo 5

Resolver: $y = \log_2 5$

Crescimento e decrescimento exponencial e logarítmico

O comportamento é ilustrado na tabela 1.6.5:

Tabela 0.5.5

x	e^x	$\ln x$
1	2,72	0,00
2	7,39	0,69
3	20,09	1,10
4	54,60	1,39
5	148,41	1,61
6	403,43	1,79
7	1096,63	1,95
8	2980,96	2,08
9	8103,08	2,20
10	22026,47	2,30
100	$2{,}69 \times 10^{43}$	4,61
1000	$1{,}97 \times 10^{434}$	6,91

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Crescimento e decrescimento exponencial e logarítmico

O comportamento é ilustrado na tabela 1.6.5:

$f(x) = e^x$ cresce sem cota, com imagem $(0, +\infty)$;

$f(x) = ln\, x$ também cresce sem cota, porém, mais lentamente.

Tabela 0.5.5

x	e^x	$\ln x$
1	2,72	0,00
2	7,39	0,69
3	20,09	1,10
4	54,60	1,39
5	148,41	1,61
6	403,43	1,79
7	1096,63	1,95
8	2980,96	2,08
9	8103,08	2,20
10	22026,47	2,30
100	$2{,}69 \times 10^{43}$	4,61
1000	$1{,}97 \times 10^{434}$	6,91

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Crescimento e decrescimento exponencial e logarítmico

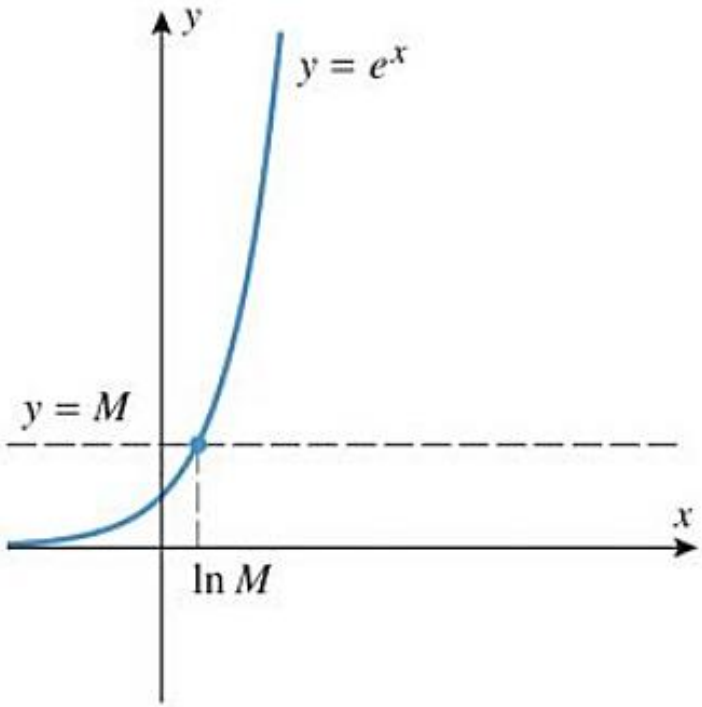


Figura 0.5.8 O valor de $y = e^x$ excederá um valor positivo M arbitrário com $x > \ln M$.

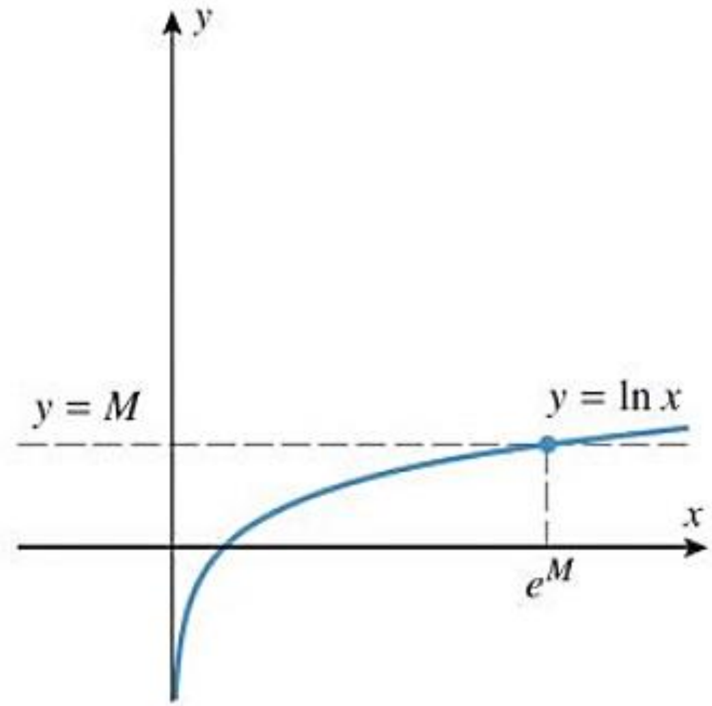


Figura 0.5.9 O valor de $y = \ln x$ excederá um valor positivo M arbitrário com $x > e^M$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Escalas logarítmicas na Ciência e Engenharia

- Os logaritmos são usados para tratar quantidades cujas unidades variam sobre um conjunto amplo de valores;

- Observa-se que se $\boldsymbol{y} = \mathbf{log}\,\boldsymbol{x}$, aumentando-se $\boldsymbol{x}$ por um fator de $\mathbf{10}$, adiciona-se $\mathbf{1}$ unidade a $\boldsymbol{y}$;

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{log}\,\mathbf{10}\boldsymbol{x} = \log \mathbf{10} + \log \boldsymbol{x} = \mathbf{1} + \boldsymbol{y}$$

Exemplo 6

Sabendo que o **nível de som $\boldsymbol{\beta}$** é definido por:

$$\boldsymbol{\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_o}\right)\ [dB].}$$

Sendo $\boldsymbol{I_o} = 10^{-12}\ W/m^2$ a intensidade de referência (limiar de audição humana) e $\boldsymbol{I}$ uma intensidade qualquer.

Qual a razão entre as intensidades correspondentes aos níveis 120 dB e 92 dB.

Exercício

A **acidez de uma substância (pH)** é definida por:

$$\boldsymbol{pH = -\log(H^+)}$$

Sendo H^+ a concentração de íons de hidrogênio, medida em moles por litro. Uma substância é ácida se tiver $pH > 7$ e básica se tiver $pH < 7$. Pede-se:

(a) Encontre o pH do café que apresenta concentração de $1{,}2.\,10^{-6}\,\frac{mol}{L}\,de\ H^+$;

(b) Encontrar a concentração de H^+ de uma substância de pH 2,44.

Dados: $\mathbf{log\ 1,2 = 0,0792}$ $\quad$ $\mathbf{10^{-2,44} = 0,0036}$

Para depois desta aula:

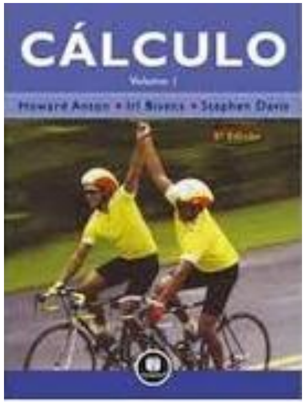
- Reler o capítulo do livro texto (Howard);
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Realizar a lista de exercícios (baixar no site);

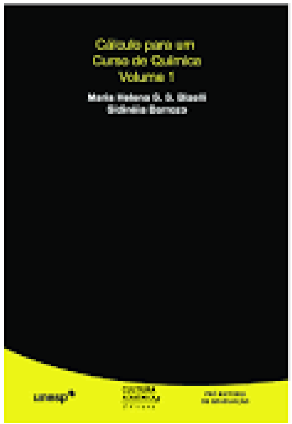
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br