

Cálculo I

Licenciatura em Química

Gráficos de curvas

Como traçar

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Crescimento e decrescimento

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

- $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ Máximo em x_0
- $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ mínimo em x_0

Crescimento e decrescimento

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

- $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ Máximo em x_0
- $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ mínimo em x_0

- ✓ Se $f' > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ *creciente*
- ✓ Se $f' < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ *decreciente*

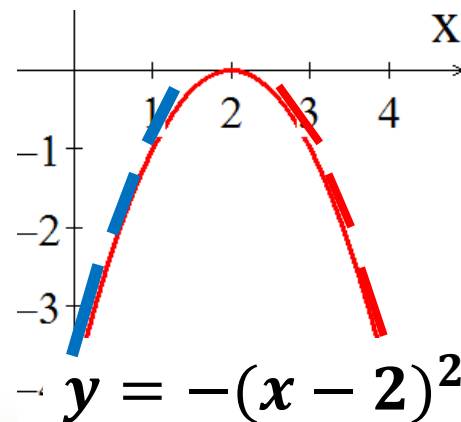
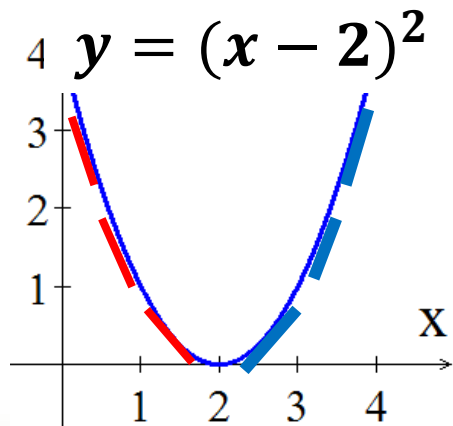
Crescimento e decrescimento

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

- $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ Máximo em x_0
- $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b] \rightarrow$ mínimo em x_0

✓ Se $f' > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ *crecente*

✓ Se $f' < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ *decrescente*



$x_0 = 2 \rightarrow$
 $f'(2) = 0$
(ponto crítico)

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

➤ f tem Máximo em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \forall x > x_0 \end{cases}$$

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

➤ f tem **Máximo** em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \forall x > x_0 \end{cases}$$

➤ f tem **mínimo** em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:
$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \forall x > x_0 \end{cases}$$

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$ e $x_0 \in (a, b)$

➤ f tem **Máximo** em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:
$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall x < x_0 \\ f'(x) < 0 & \forall x > x_0 \end{cases}$$

➤ f tem **mínimo** em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:
$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall x < x_0 \\ f'(x) > 0 & \forall x > x_0 \end{cases}$$

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de Máximo;
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de mínimo;
- $f''(x_0) = 0$ nada se conclui sobre o ponto.

Concavidade e ponto de inflexão

- Embora, quando: $f''(x_0) = 0$ o teste da derivada segunda não forneça conclusão, é possível identificar se ocorre mudança na concavidade.
- Se x_0 não for ponto crítico poderá ser um ponto de inflexão.

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f é contínua em $[a, b]$ e com derivadas f' , f'' no intervalo (a, b) .

Em termos de concavidade a função pode ser:

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f é contínua em $[a, b]$ e com derivadas f' , f'' no intervalo (a, b) .

Em termos de concavidade a função pode ser:

➤ **Côncava para baixo (derrama água):**

se o gráfico de f estiver **abaixo** de todas as suas tangentes no intervalo (a, b) ;

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f é contínua em $[a, b]$ e com derivadas f' , f'' no intervalo (a, b) .

Em termos de concavidade a função pode ser:

➤ **Côncava para baixo (derrama água):**

se o gráfico de f estiver **abaixo** de todas as suas tangentes no intervalo (a, b) ;

➤ **Côncava para cima (segura água):**

se o gráfico de f estiver **acima** de todas as suas tangentes no intervalo (a, b) .

Função côncava para cima ou para baixo

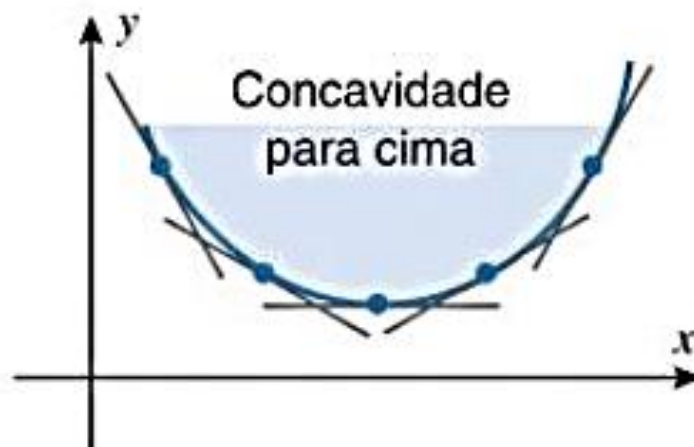


Côncava para baixo
gráfico de f está
abaixo das tangentes.

Função côncava para cima ou para baixo



Côncava para baixo
gráfico de f está
abaixo das tangentes.



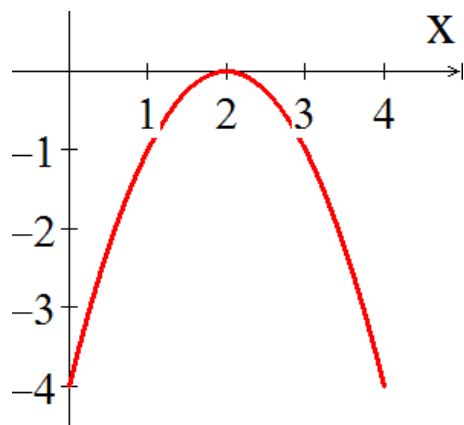
Côncava para cima
gráfico de f está
acima das tangentes.

Teste da concavidade

Seja f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$:

Se $f'' < 0 \quad \forall x \in (a, b)$

f côncava p/baixo



$$y = -(x - 2)^2$$

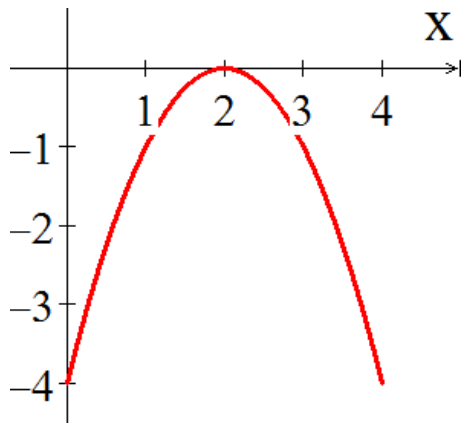
$$y'' = -2 < 0$$

Teste da concavidade

Seja f é contínua em $[a, b]$ e $f', f'' \exists (a, b)$:

Se $f'' < 0 \quad \forall x \in (a, b)$

f côncava p/baixo

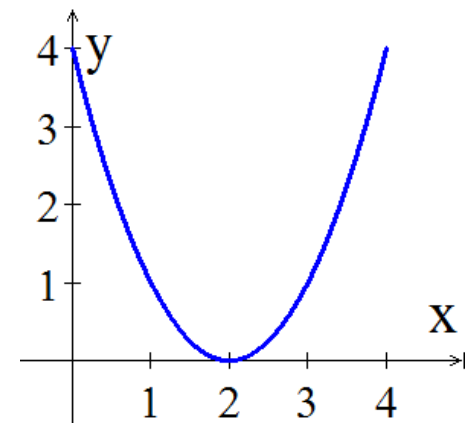


$$y = -(x - 2)^2$$

$$y'' = -2 < 0$$

Se $f'' > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

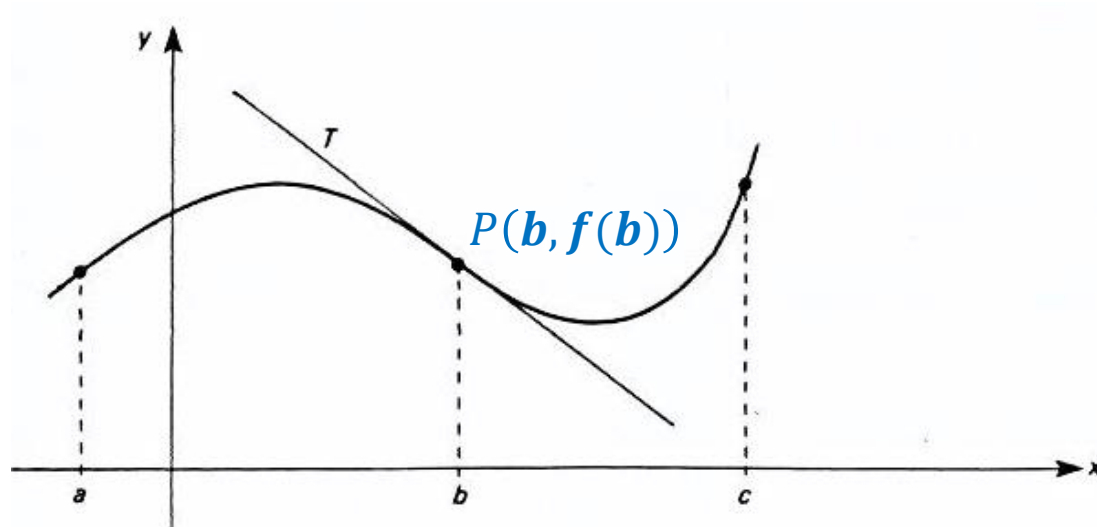
f côncava p/cima



$$y = (x - 2)^2$$

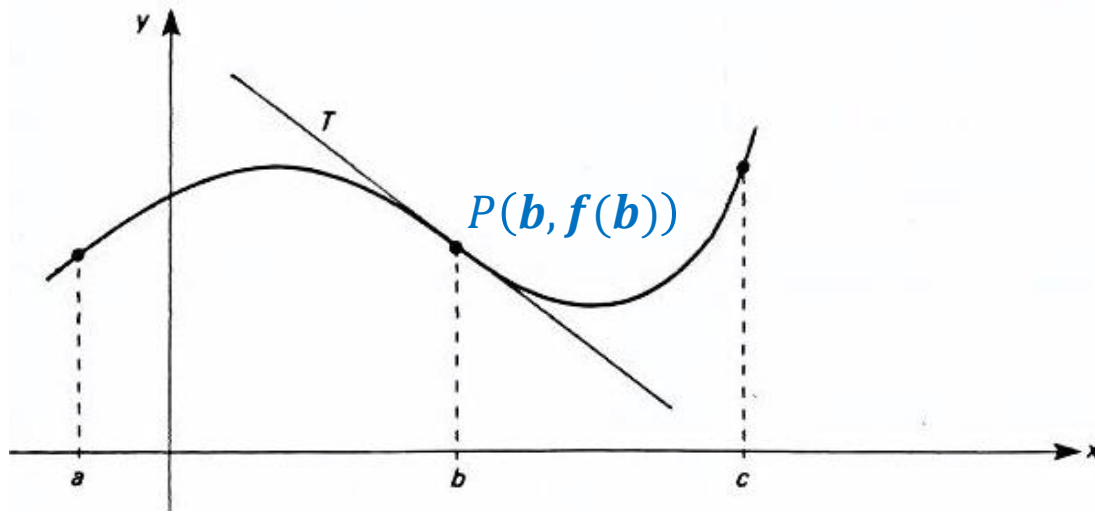
$$y'' = 2 > 0$$

Ponto de inflexão



- Na vizinhança de $P(b, f(b))$ a função passa de convexa para côncava;

Ponto de inflexão



- Na vizinhança de $P(b, f(b))$ a função passa de convexa para côncava;
- A Tangente está **acima do lado esquerdo** e **abaixo do lado direito**;
- Em $P(b, f(b))$ tem-se um **ponto de inflexão**.

Teorema

Seja f é contínua e com derivadas f' , f'' também contínuas no intervalo I .

Se $x = b$ pertence ao intervalo I , ocorrerá um ponto de inflexão em b se:

Ou seja, se houver inversão no sinal de f'' em torno de b haverá ponto de inflexão.

Como traçar gráficos

A. Domínio

Determinar $D \in \mathbb{R}$ (atenção para razões e radicais);

B. Interceptos

Onde curva corta *eixo y* ($x = 0$) e *eixo x* ($y = 0$)

C. Simetria

Se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$: f é par e simétrica pelo *eixo y*;

Se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$: f é ímpar e simétrica pela **origem**;

Se $f(x + p) = f(x) \quad \forall x \in D$ e $p > 0$:
 f é periódica de período p .

Como traçar gráficos

D. Assíntotas

(i) Horizontais

Se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Então: $y = L$ é uma assíntota horizontal

(ii) Verticais

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

Como traçar gráficos

E. Intervalos de crescimento e decrescimento

Encontrar intervalos onde $f' < 0$ ou $f' > 0$.

F. Valores de máximo e mínimos locais

Encontrar pontos críticos (x_c):

$f'(x_c) = 0$ (teste da primeira derivada)

$$\begin{cases} f'(x_c) > 0 & \forall x < x_c \\ f'(x_c) < 0 & \forall x > x_c \end{cases} \text{ ponto de máximo}$$

$$\begin{cases} f'(x_c) < 0 & \forall x < x_c \\ f'(x_c) > 0 & \forall x > x_c \end{cases} \text{ ponto de mínimo}$$

$f''(x_c) \neq 0$ (teste da segunda derivada)

$$\begin{cases} f''(x_c) > 0 & \text{mínimo local} \\ f''(x_c) < 0 & \text{máximo local} \end{cases}$$

Como traçar gráficos

G. Concavidade e ponto de inflexão

Calcular $f''(x)$

$$\begin{cases} f''(x) > 0 & \text{côncava para cima} \\ f''(x) < 0 & \text{côncava para baixo} \end{cases}$$

O ponto de inflexão ocorre quando a derivada segunda muda de sinal em $x = b$ (raíz de $f''(x)$).

H. Esboço do gráfico

Com os dados dos itens A até G traçar o gráfico da função.

Exemplo

Utilizar a metodologia para traçar o gráfico da função:

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$$

This page contains handwritten mathematical notes and diagrams. At the top, there are several equations and a diagram of a cone. The middle section features a large, complex curve with multiple loops and a horizontal line passing through it. Below this, there are several smaller diagrams, including a circle with points and a diagram with intersecting curves. The text is dense and includes various mathematical symbols and formulas.

Key mathematical elements visible include:

- Equations: $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3}$, $\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^3} = -\frac{3}{x^4}$, $\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^4} = -\frac{4}{x^5}$.
- Diagrams: A cone with a vertical axis and a circular base; a large curve with multiple loops and a horizontal line; a circle with points labeled 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f', 'g', 'h', 'i', 'j', 'k', 'l', 'm', 'n', 'o', 'p', 'q', 'r', 's', 't', 'u', 'v', 'w', 'x', 'y', 'z'; a diagram with intersecting curves and a horizontal line.

Para depois desta aula:

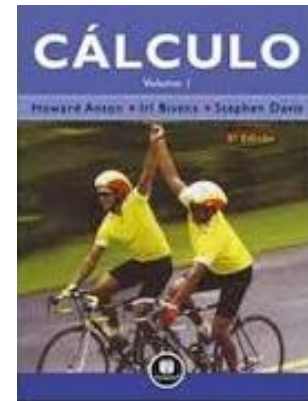
- Rerler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no [site](#));

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br