Capítulo 7 - Distâncias

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

Aula 1 - Distâncias

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1, z_1)}$ e $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2, z_2)}$,
A distância entre eles será o módulo do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$:

$$d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |P_2 - P_1|$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

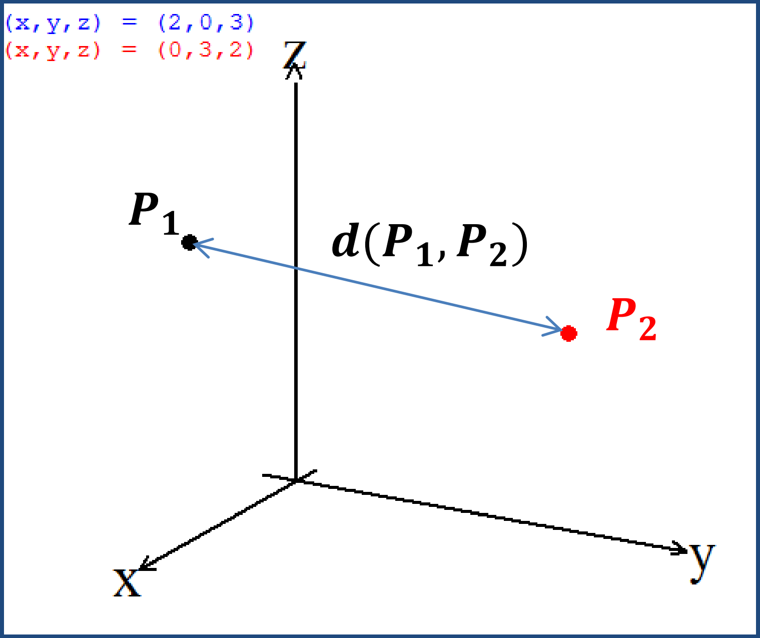
Distância entre pontos

Exemplo 1

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2, 0, 3)}$ e $\boldsymbol{P_2(0, 3, 2)}$?

Exemplo 1

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2,0,3)}$ e $\boldsymbol{P_2(0,3,2)}$?



$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(0-2)^2 + (3-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{14}$$

Exemplo 2

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2,-1,3)}$ e $\boldsymbol{P_2(1,1,5)}$?

Resp.: $\boldsymbol{d = 3\ u.c.}$

Distância entre ponto e reta

Sejam um ponto $\boldsymbol{P}$ no espaço e uma reta $\boldsymbol{r}$ qualquer. Necessita-se calcular a distância $\boldsymbol{d}$.

O ponto $\mathbf{A} \in \boldsymbol{r}$ e $\vec{\boldsymbol{v}}$ é o vetor diretor;

O vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ e o vetor $\vec{\boldsymbol{v}}$ formam um paralelogramo.

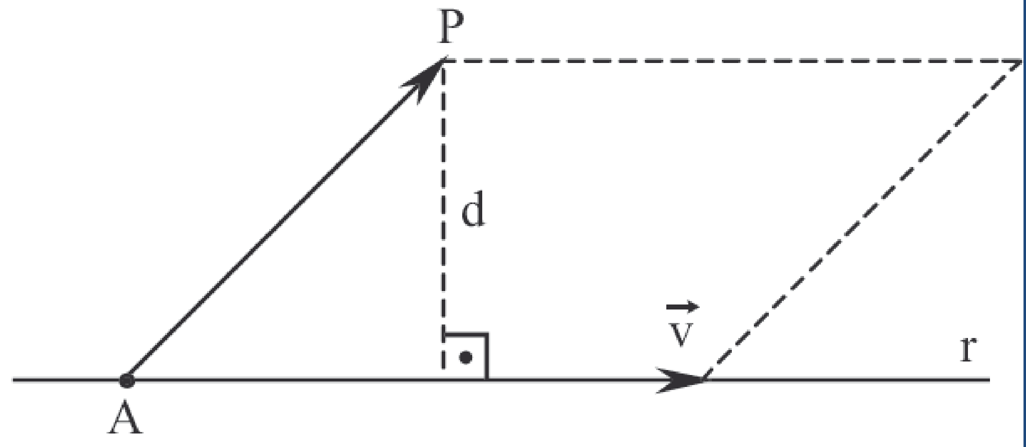


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

A área do paralelogramo pode ser calculada de duas maneiras:

$$A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \text{ ou}$$

$$A = \text{base} \times altura$$

$$= |\vec{v}|d$$

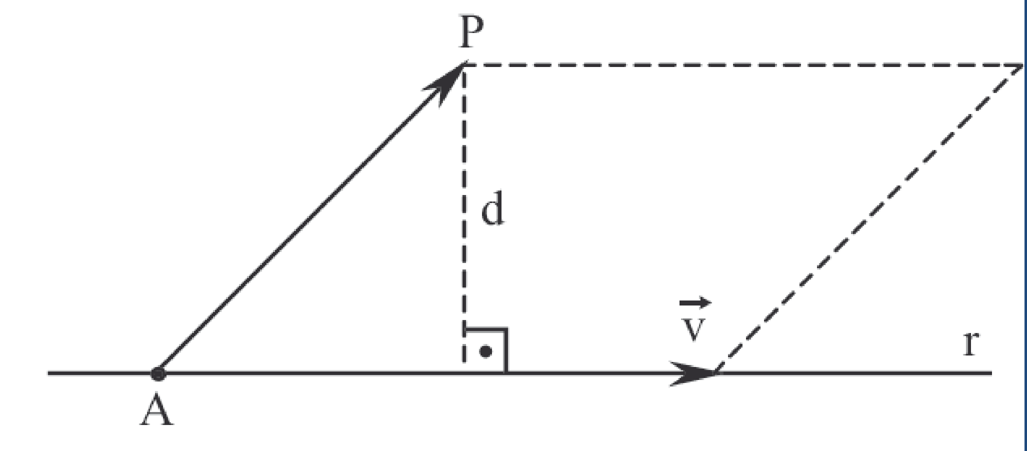


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

A área do paralelogramo pode ser calculada de duas maneiras:

$$A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \text{ ou}$$

$$A = \text{base} \times altura$$

$$= \ |\vec{v}|d$$

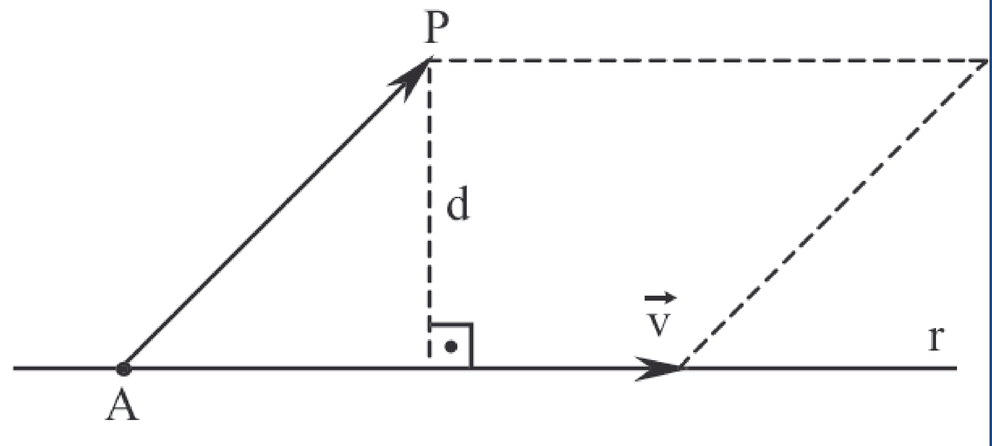


Figura 7.1

Unindo as duas equações:

$$|\vec{v}|d = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \quad \rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{v}|}}$$

Distância entre ponto e reta.

Exemplo 3

Calcular a distância entre o ponto $\boldsymbol{P(2,1,4)}$ e a reta:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = 3 - 2t} \end{cases}$$

Resp.: $\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{74}}{3} \cong 2,86\, u.c.}$

Outra maneira de calcular distância entre ponto e reta

1) Encontrar equação de $\pi \perp \boldsymbol{r}$ e que contém $\boldsymbol{P}$;
2) Determinar o ponto de intersecção $\boldsymbol{I}$ de π e $\boldsymbol{r}$;
3) Calcular a distância $\boldsymbol{d(P,r)} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{PI}}\right|$

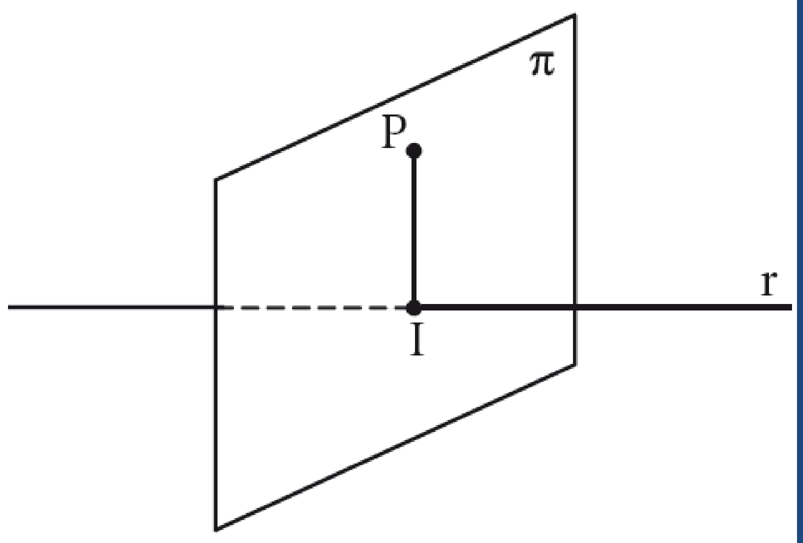


Figura 7.2

Exercício em classe

Calcular a distância entre o ponto $\boldsymbol{P(2,1,4)}$ e a reta,

pelo procedimento do plano: $\boldsymbol{r}$: $\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = 3 - 2t} \end{cases}$

Resp.: $\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{666}}{9} \cong 2,86\ u.c.}$

Distância entre ponto e plano

Seja P_0 um ponto no espaço cuja distância d ao plano π se quer calcular.

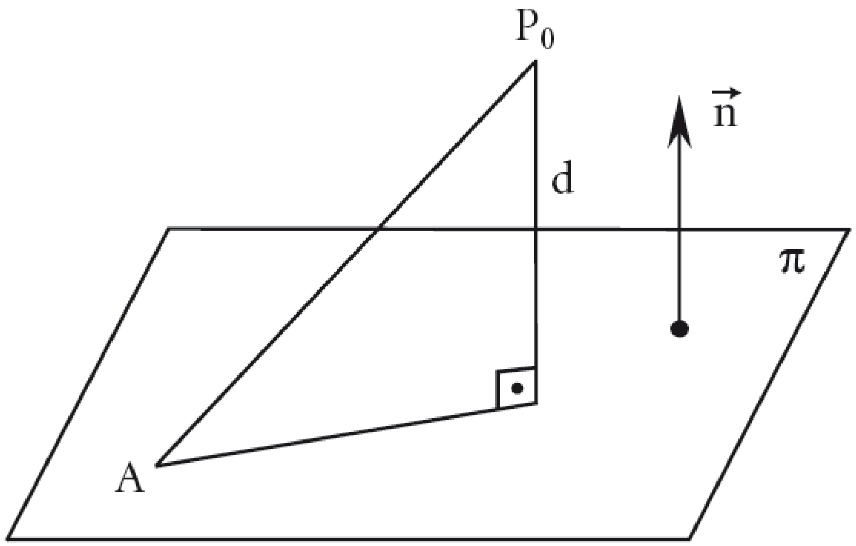


Figura 7.3

Distância entre ponto e plano

Seja P_0 um ponto no espaço cuja distância d ao plano π se quer calcular.

Observa-se que o módulo da projeção de $\overrightarrow{AP_o}$ na direção de $\vec{n}$ é igula a distância d.

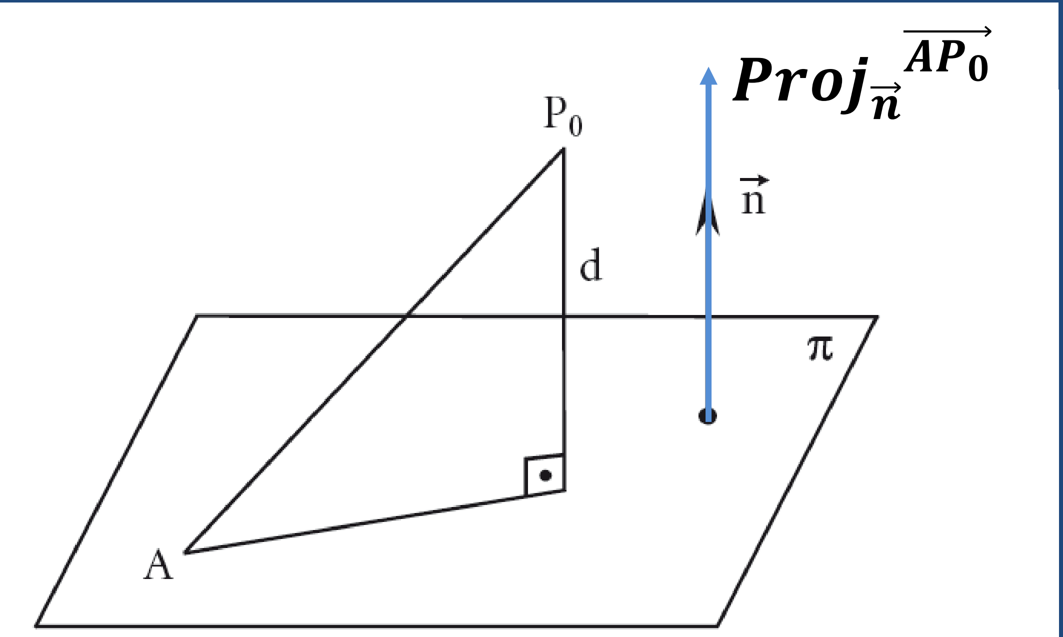


Figura 7.3

Distância entre ponto e plano

$$d(P_o,\pi) = \left|Proj_{\vec{n}}^{\overrightarrow{AP_0}}\right|$$

$$= \left|\frac{\overrightarrow{AP_0}\bullet\vec{n}}{\vec{n}\bullet\vec{n}}\vec{n}\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{AP_0}\bullet\vec{n}\right|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}|$$

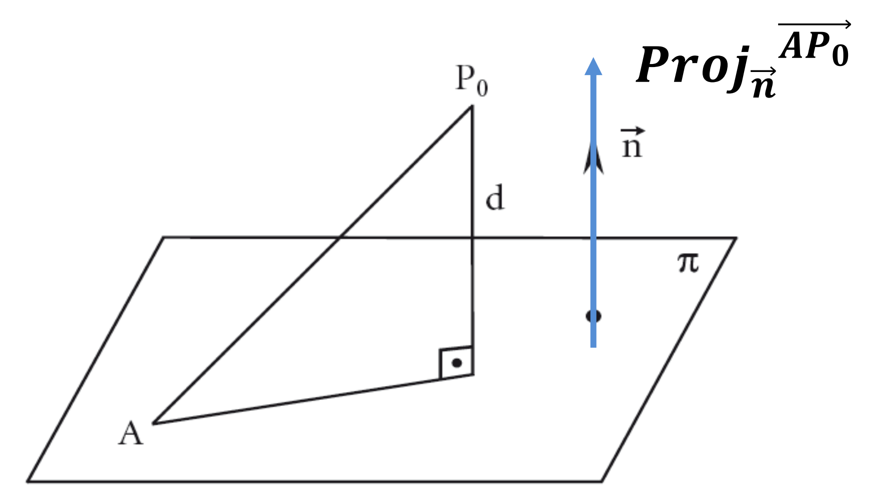


Figura 7.3

$$d(P_o,\pi) = \left|\frac{\overrightarrow{AP_0}\bullet\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$$

Distância entre ponto e plano

Exemplo 4

Calcular a distância entre o ponto $P(4, 2, -3)$ ao plano: $\pi: \; 2x + 3y - 6z + 3 = 0$ Resp.: $d = 5 \; u.c.$

Outra forma de calcular distância entre ponto e plano

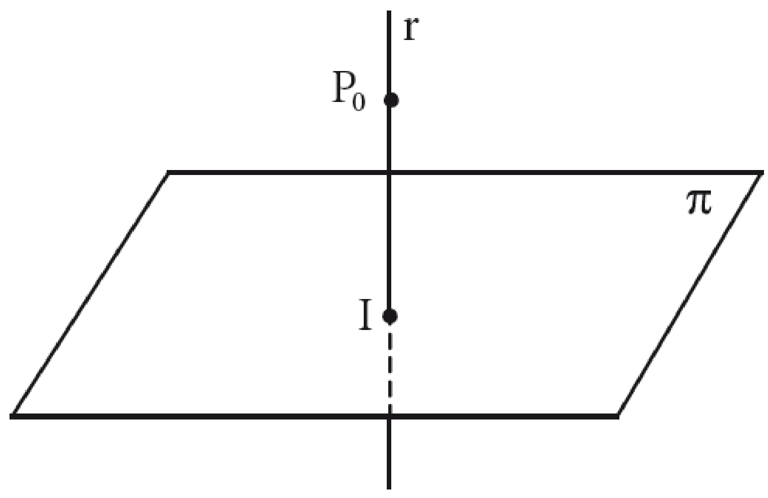


Figura 7.4

a. Encontrar equação de $\boldsymbol{r \perp \pi}$ e que contém $\boldsymbol{P_0}$;
b. Determinar o ponto de intersecção $\boldsymbol{I}$ de π e $\boldsymbol{r}$;
c. Calcular a distância $\boldsymbol{d(P_0, r) = \left|\overrightarrow{P_0 I}\right|}$

O mesmo procedimento aplica-se para calcular:

- Distância entre planos paralelos em que $\boldsymbol{P_0} \in \pi_1 \; ou \;\; \pi_2$;
- Uma reta $\boldsymbol{r}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ paralelos.

Exemplo 5

Calcular a distância entre o plano: $\boldsymbol{\pi: 4x - 4y + 2z - 7 = 0}$

E a reta $\boldsymbol{r}$: $\mathrm{y = 2x + 3 \quad e \quad z = 2x + 1}$

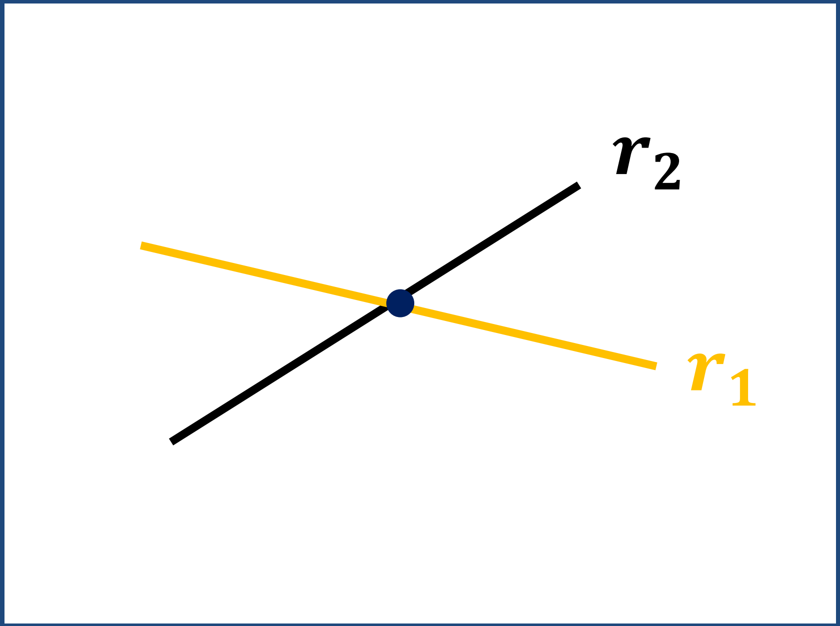
Resp.: $\boldsymbol{d = 17/6\ u.c.}$

Aula 2 - Distâncias

Distância entre duas retas

1) Se duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ são concorrentes, ou seja, se interceptam em um ponto, então:

$$\boldsymbol{d(r_1, r_2) = 0}.$$



Distância entre duas retas

2) Se duas retas $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ forem paralelas, então:

$$\boldsymbol{d(r_1, r_2) = d(P, r_2) \quad \text{com} \;\; P \in r_1.}$$

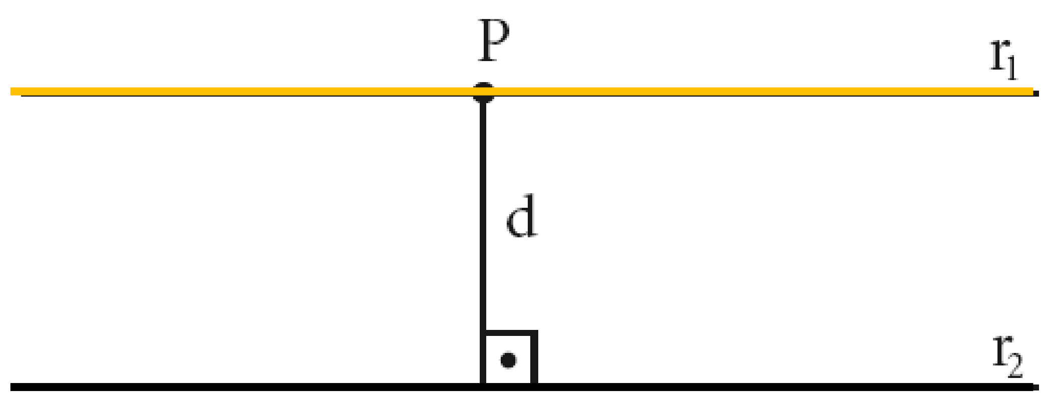


Figura 7.5

Distância entre retas reversas

3) Se duas retas r_1 e r_2 forem reversas, há dois procedimentos para determinar a distância.

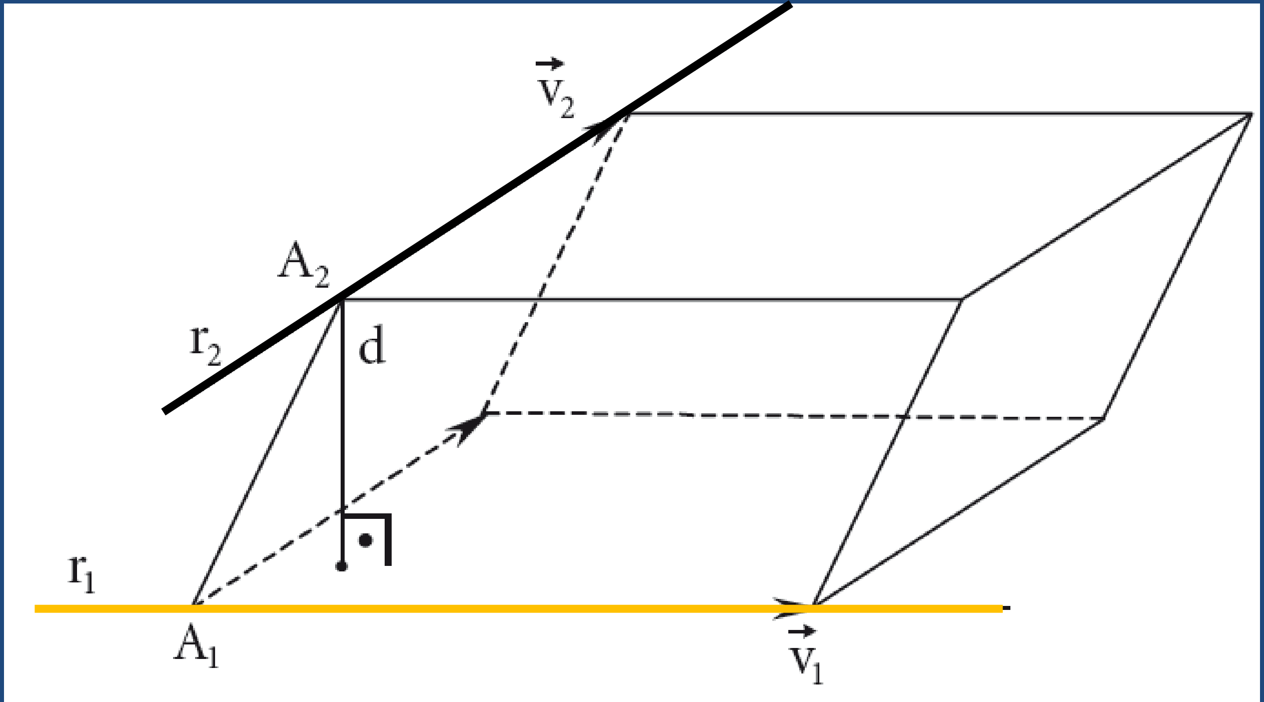


Figura 7.6

Distância entre retas reversas

I) Os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares, então determinam um paralelepípedo, de altura $d(r_1, r_2)$.

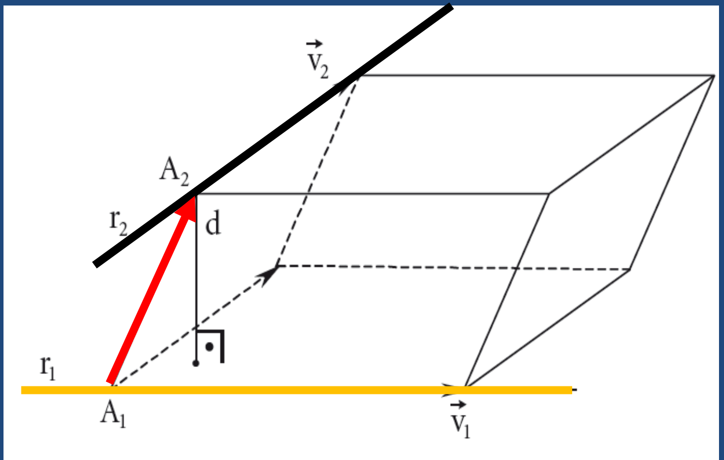


Figura 7.6

Distância entre retas reversas

I) Os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares, então determinam um paralelepípedo, de altura $d(r_1, r_2)$.

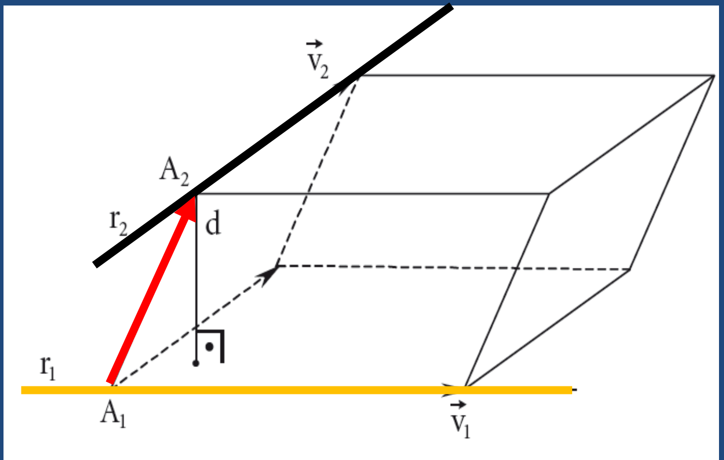


Figura 7.6

No Capítulo 4 definiu-se que:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right| \text{ (Pr. Misto)}$$

Distância entre retas reversas

I) Os vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_2}$ não são coplanares, então determinam um paralelepípedo, de altura $d(r_1, r_2)$.

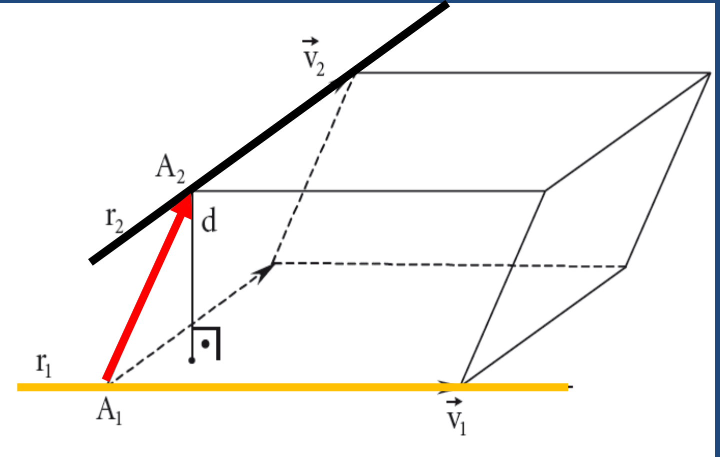


Figura 7.6

No Capítulo 4 definiu-se que:

$$V = \left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right| \text{ (Pr. Misto)}$$

Por outro lado:

$$V = base\ x\ alt. = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|d$$

Assim:

$$d = \frac{\left|\left(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{A_1A_2}\right)\right|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}$$

Distância entre retas reversas

Distância entre retas reversas

II) Encontrar a equação geral de π com $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}$;

Calcular: $d(r_1, r_2) = d(r_2, \pi) = d(P, \pi)$.

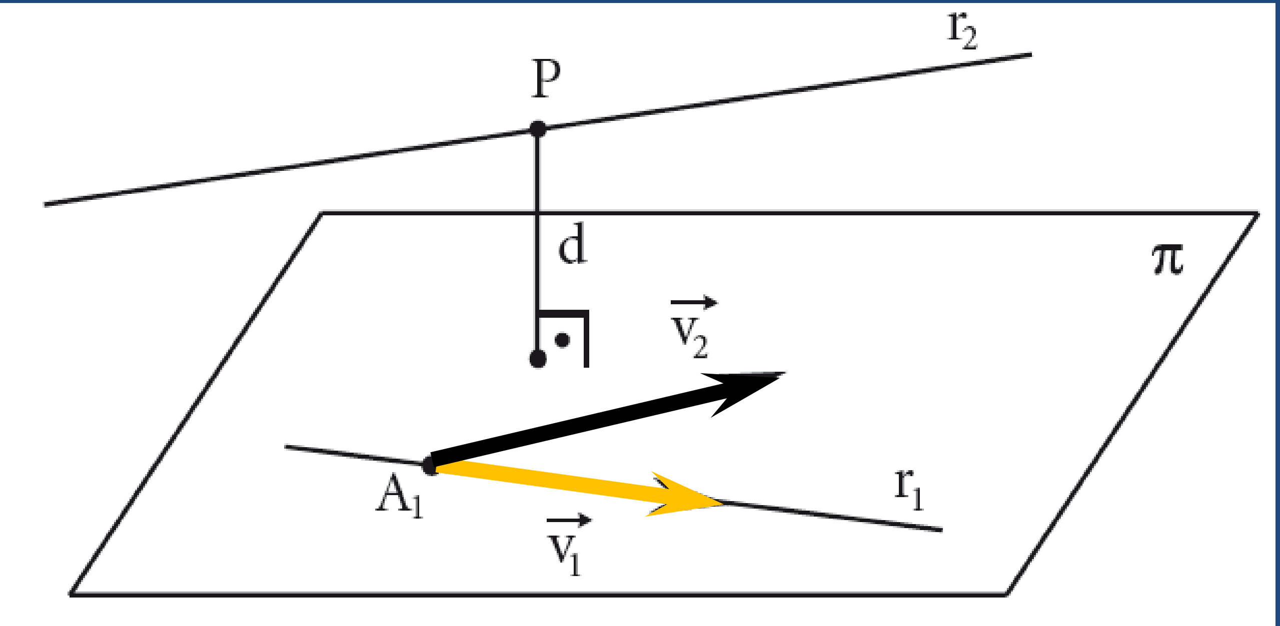


Figura 7.7

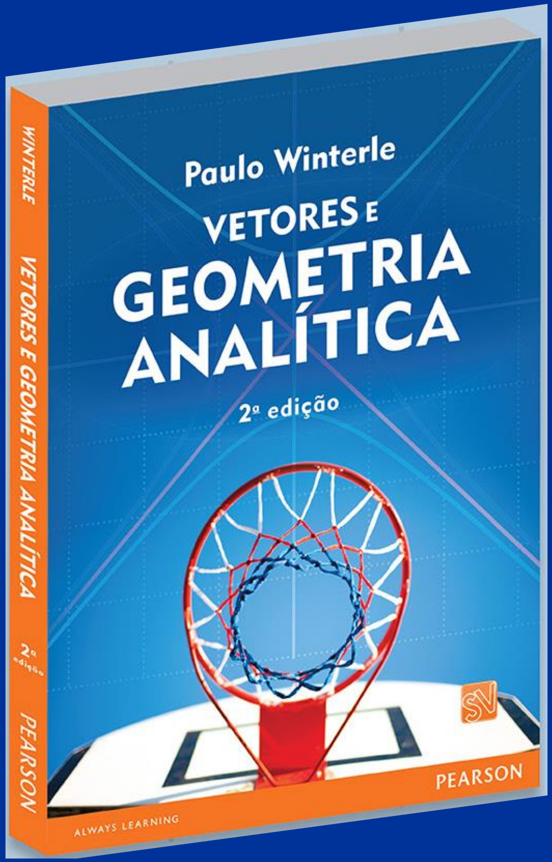
Exemplo 6

Calcular a distância entre as retas:

Resp.: $\boldsymbol{d = 3/\sqrt{2}\, u.c.}$

$$r_1: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + t} \\ \boldsymbol{y = 3 - 2t} \\ \boldsymbol{z - 1 - t} \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.