

Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Aula 06

Produto vetorial

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

Revisão de determinantes

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Exemplo 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

Propriedade (a): permutação de linhas inverte o sinal

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Propriedades dos determinantes

(b) Se as linhas forem proporcionais o determinante é 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} =$$

(c) Se uma das linhas for zero o determinante será 0.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

Determinante de ordem três

Pelo teorema de Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

Pela repetição de duas colunas

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

- - - + + +

Definição de produto Vetorial

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

- Expresso pela forma: $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$;
- O resultado é um terceiro vetor, ortogonal a \vec{u} e \vec{v} ;
- Para calculá-lo utiliza-se o determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \text{VETOR}$$

Exemplo 2

Sejam $\vec{u} = (5, 4, 3)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\vec{u} \times \vec{v} =$$

Exercícios em sala

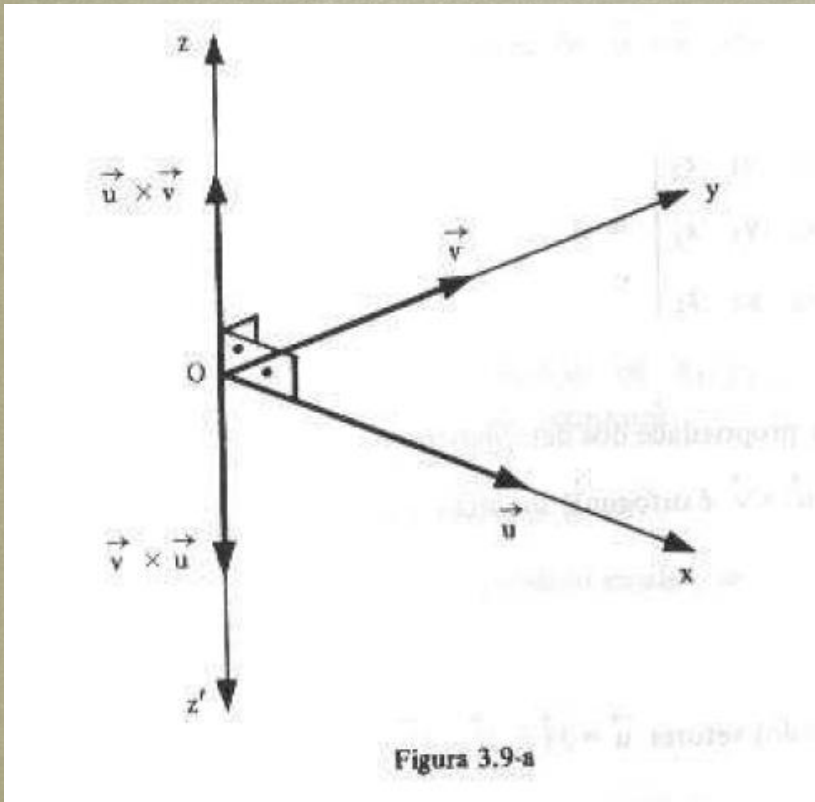
Sejam $\vec{u} = (3, -1, -2)$, $\vec{v} = (2, 4, -1)$ e $\vec{w} = (-1, 0, 1)$.

Calcular:

(a) $\vec{u} \times \vec{v}$

(b) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$

Característica do produto vetorial



- O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortotogonal a \vec{u} e \vec{v} .
- O comprimento de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}\theta$$

Regra da mão direita

O sentido de $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido pela regra da mão direita.

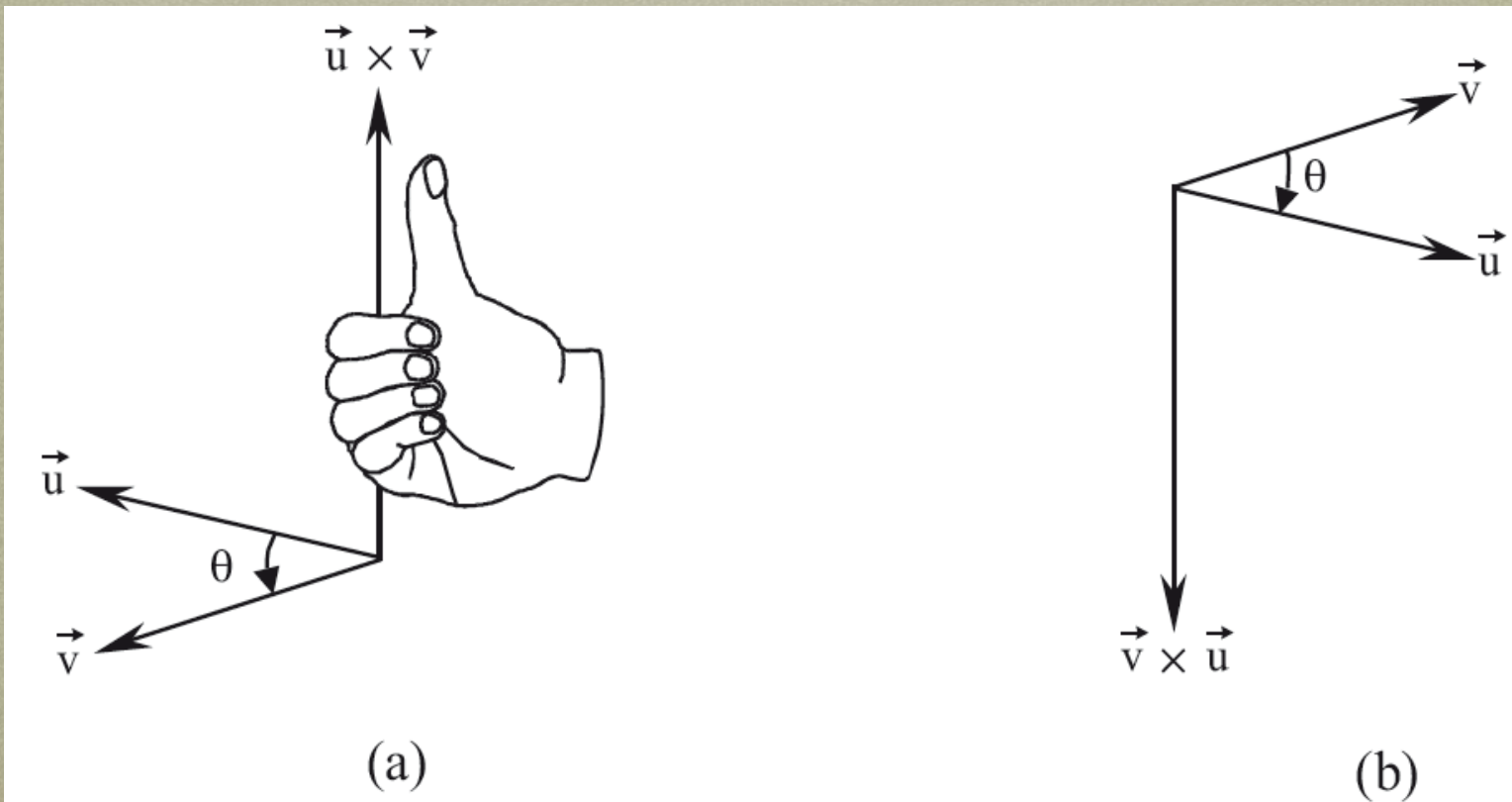
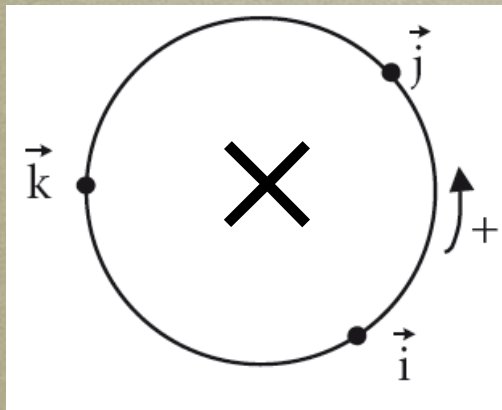


Figura 3.3 Winterle, 2a ed.

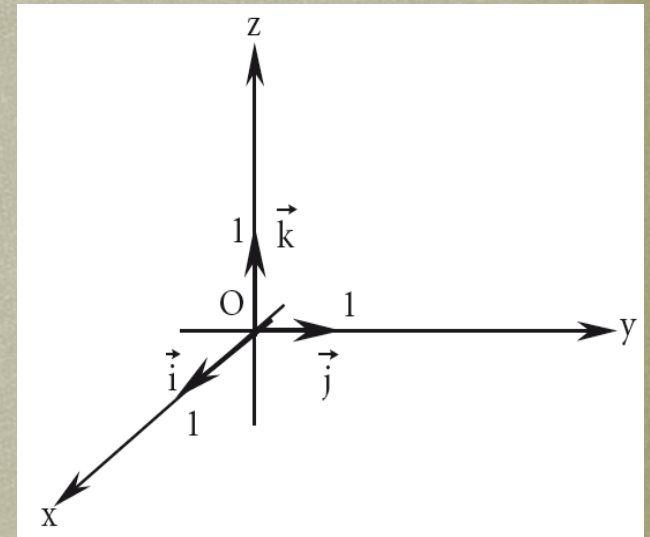
Regra para os vetores da base



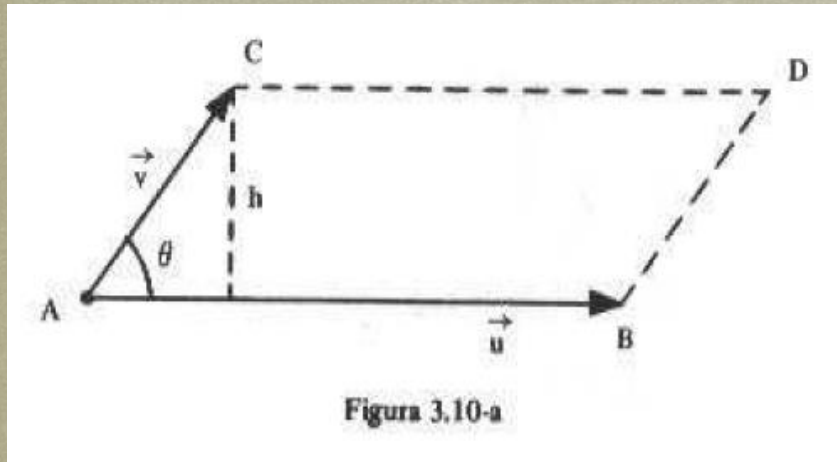
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$



Interpretação geométrica



Área do paralelogramo

$$A = \text{Base} \times \text{altura}$$

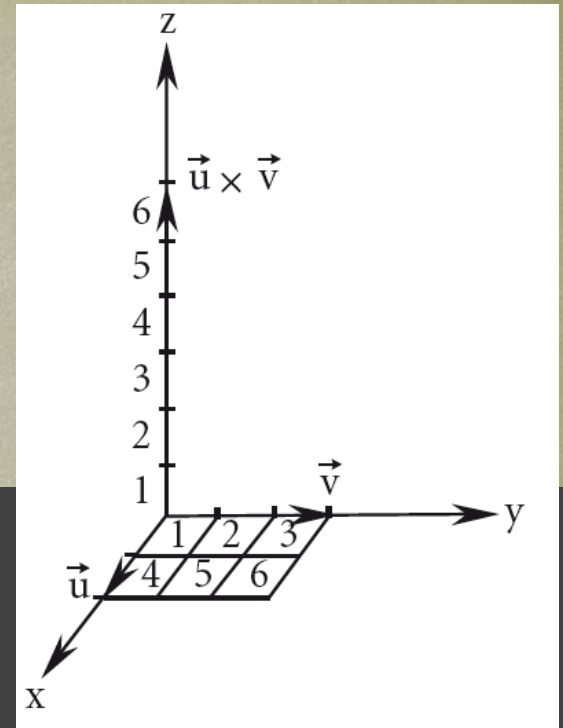
$$A = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}\theta$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \text{sen}\theta = A$$

Exemplo 3

Determine o $|\vec{u} \times \vec{v}|$, sendo:

$$\vec{u} = (2,0,0), \quad \vec{v} = (0,3,0).$$



Propriedades do produto vetorial

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores e α um escalar.

$$\text{I) } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propriedades do produto vetorial

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores e α um escalar.

$$\text{I) } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\text{II) } \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$

Propriedades do produto vetorial

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores e α um escalar.

$$\text{I) } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\text{II) } \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$

$$\text{III) } \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Propriedades do produto vetorial

Sejam \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} três vetores e α um escalar.

$$\text{I) } \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$\text{II) } \alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$

$$\text{III) } \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

~~**Nota:** $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$~~

Não
Associativo

Exemplo 4

Dados os vetores $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{v} = (a, 0,2)$, calcular:
o valor de a para que a área do paralelogramo
determinado por \vec{u} e \vec{v} seja igual a $2\sqrt{6}$.

Resolver os problemas propostos:

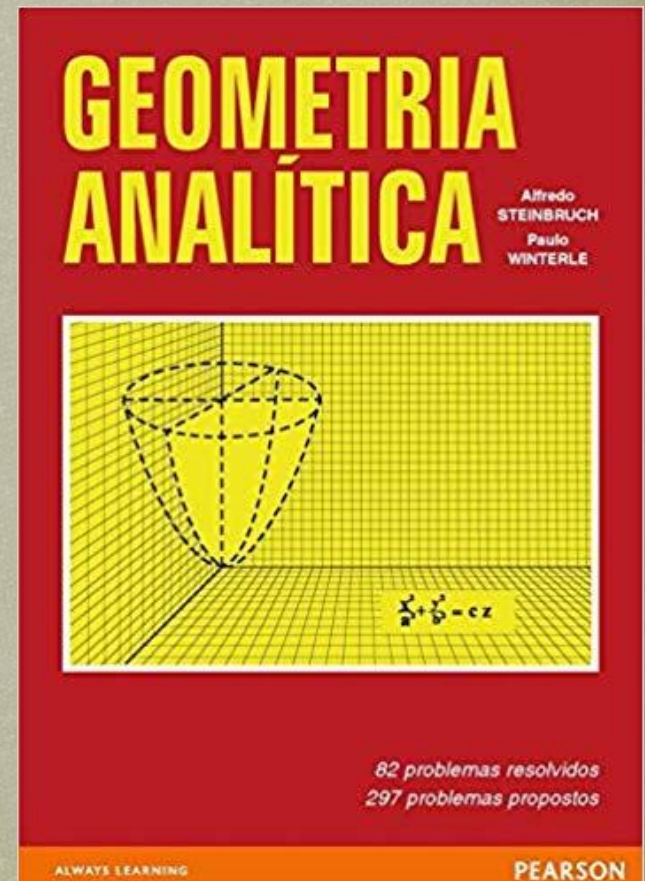
p. 92: 42 a, b, c, e, h;
43, 44, 48, 50, 51, 52

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P.
Geometria Analítica. 2. Ed. São
Paulo: Pearson Makron Books,
1987.

Numeração dos exercícios
com base na 2^a ed. ----->>

Prof. Henrique A M Faria



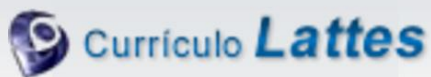
Contatos e material de apoio



profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br



<http://lattes.cnpq.br/1614784455223743>