

Cálculo I

Licenciatura em Química

Integração
definições

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Integração

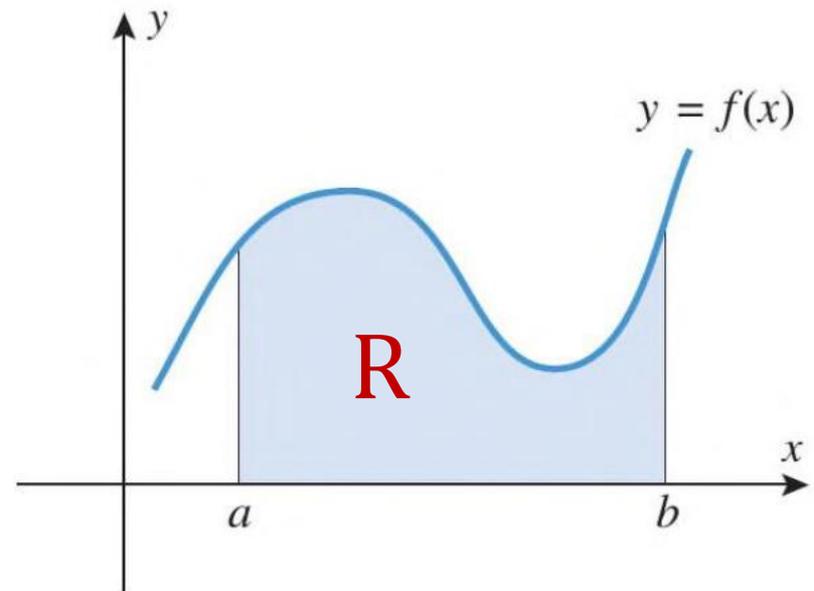
- Iniciaremos o estudo da integração através do **problema de determinação de áreas**;
- O objetivo é entendermos o que é uma **integral definida** e em seguida a **integral indefinida**;
- Finalmente, estudaremos o **Teorema Fundamental do Cálculo** que estabelece a conexão entre derivação e integração.

6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

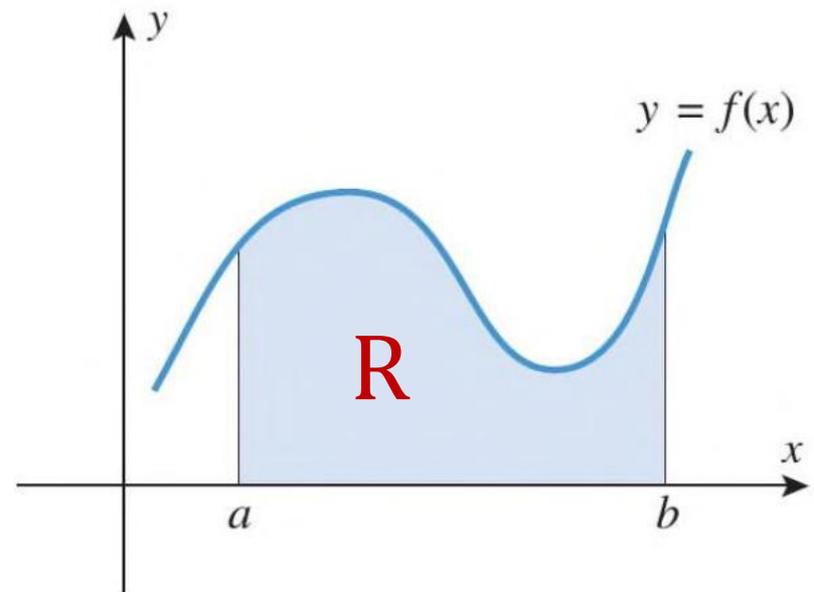
6.4 Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;
- A região delimitada pelo eixo x , as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada com região R .



6.4 Definição de área como limite

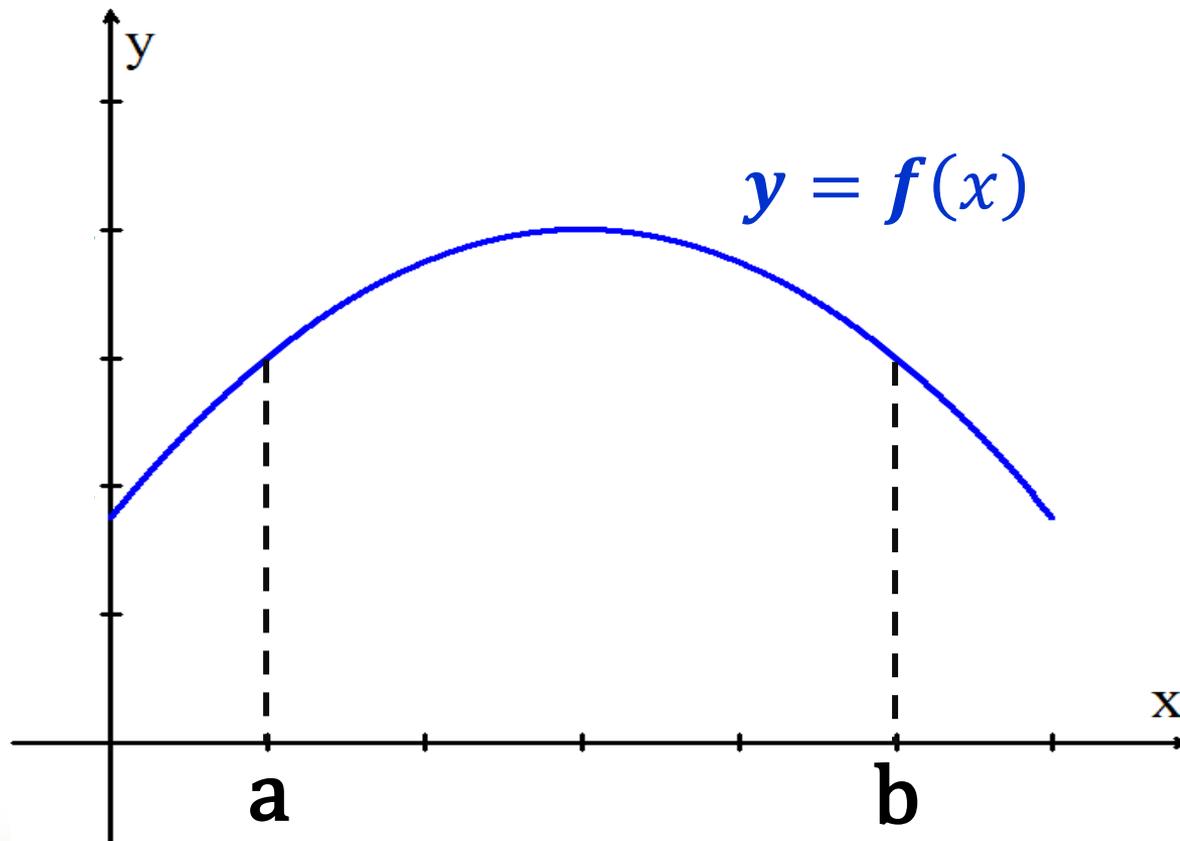
- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;
- A região delimitada pelo eixo x , as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada com região R .



Como podemos calcular a área de R?

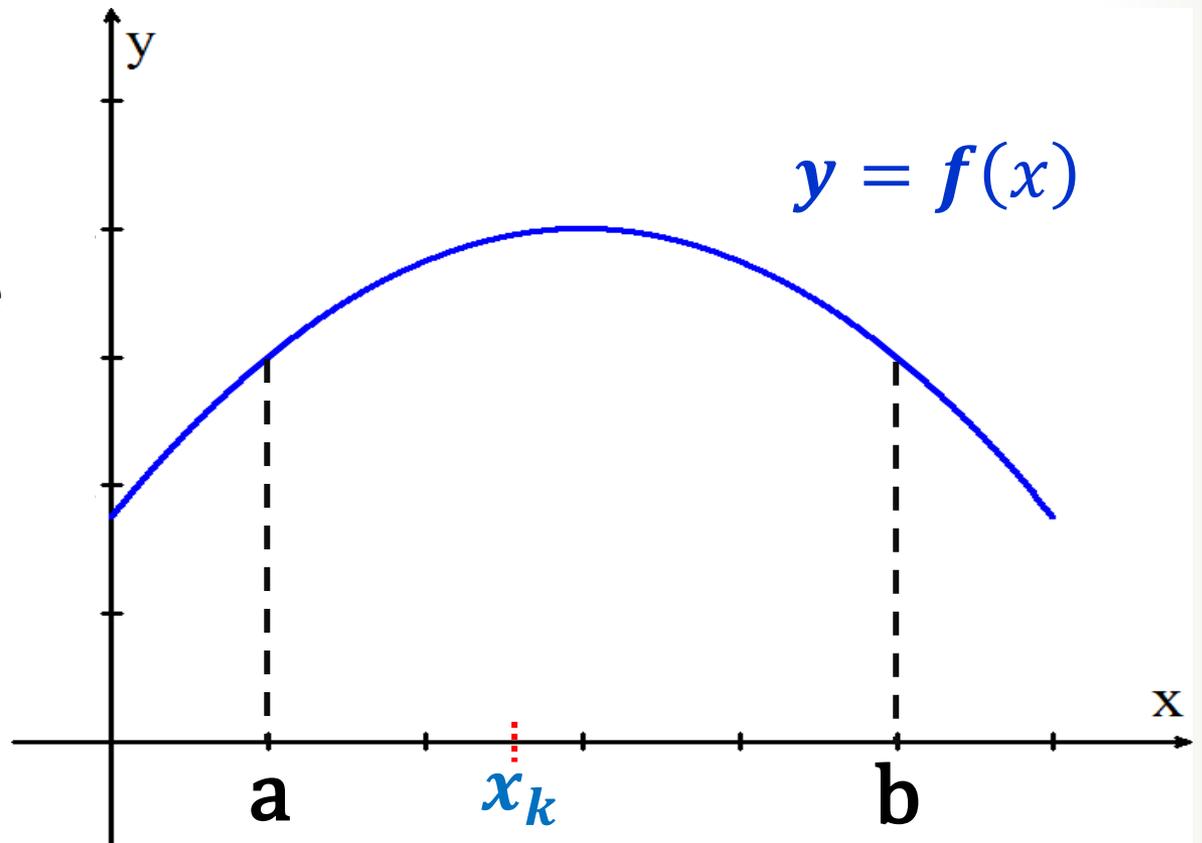
6.4 Definição de área como limite

Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$



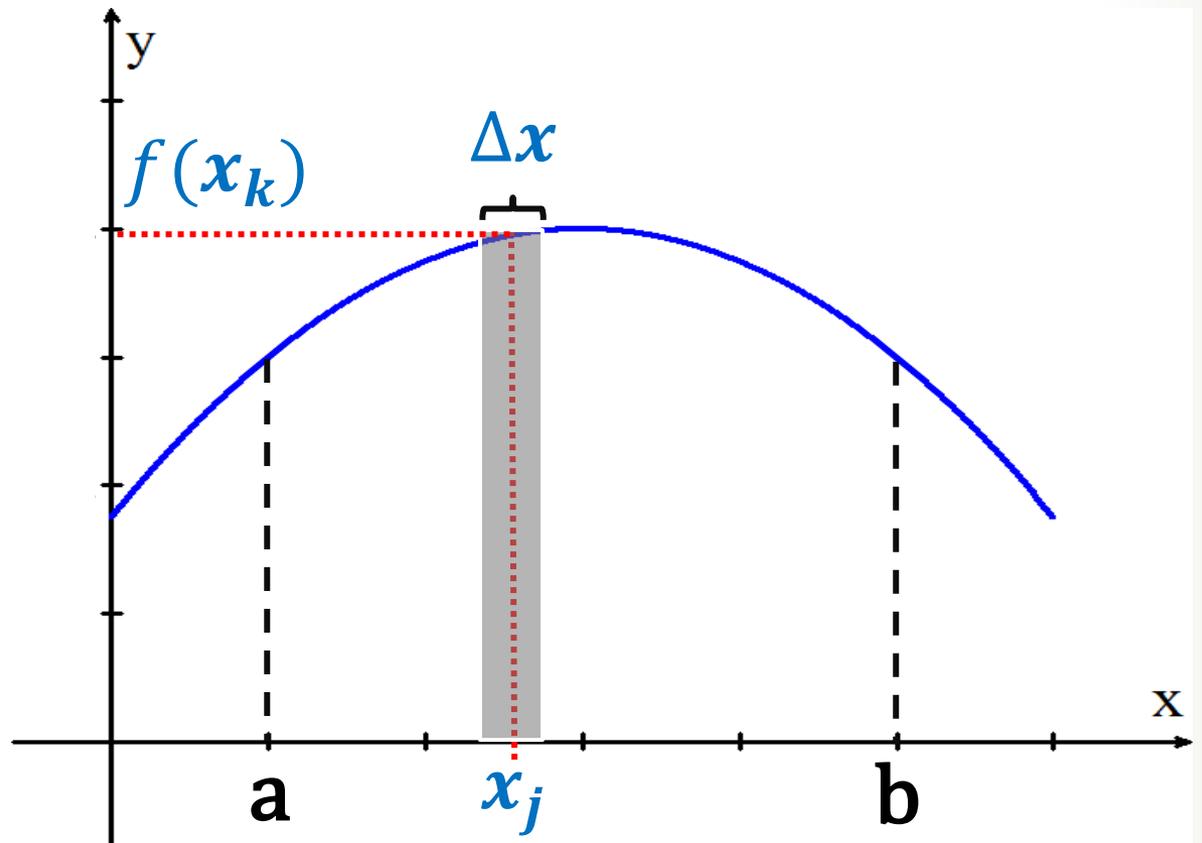
6.4 Definição de área como limite

- O intervalo $[a, b]$ será dividido em n subintervalos, de larguras iguais Δx .
- x_k é um ponto qualquer do subintervalo.



6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

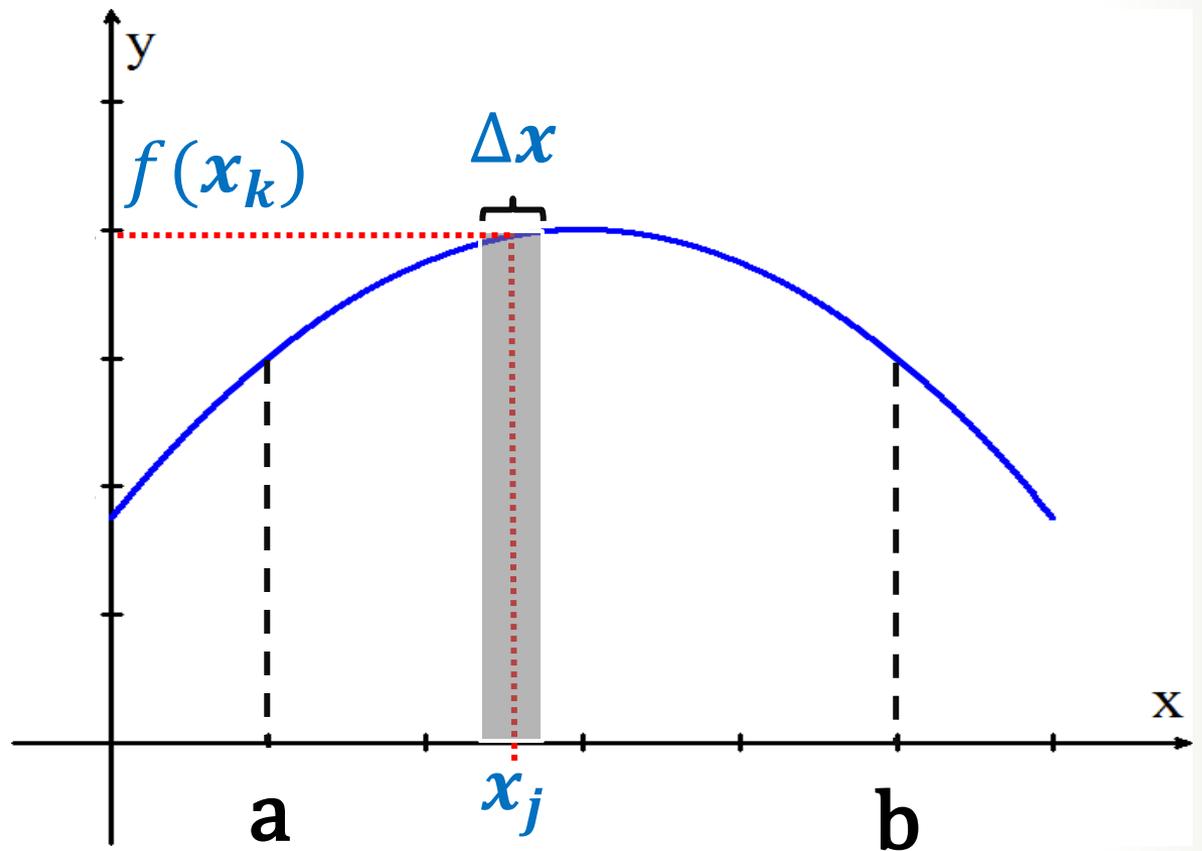


6.4 Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

- A área de cada retângulo será:

$$A_k = f(x_k)\Delta x$$

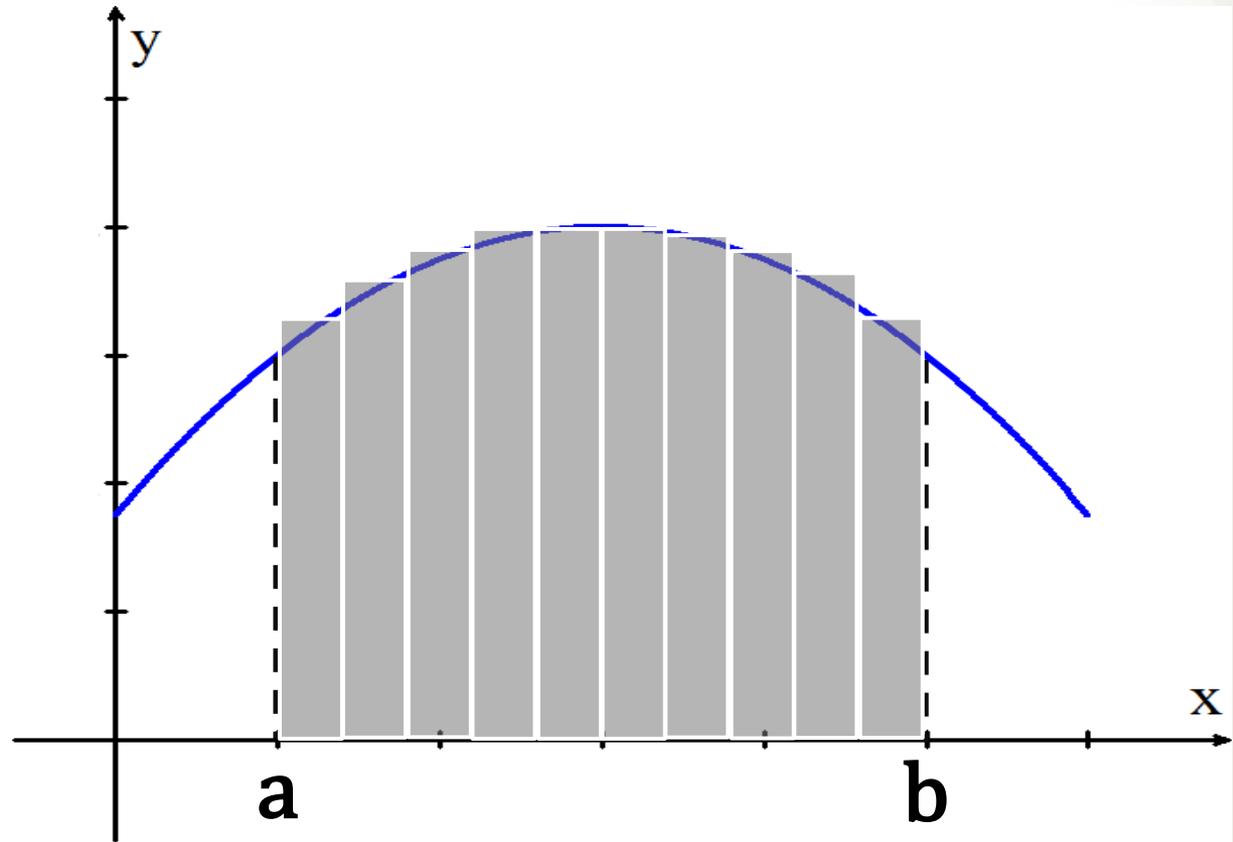


6.4 Definição de área como limite

- A soma das áreas dos n retângulos é o somatório:

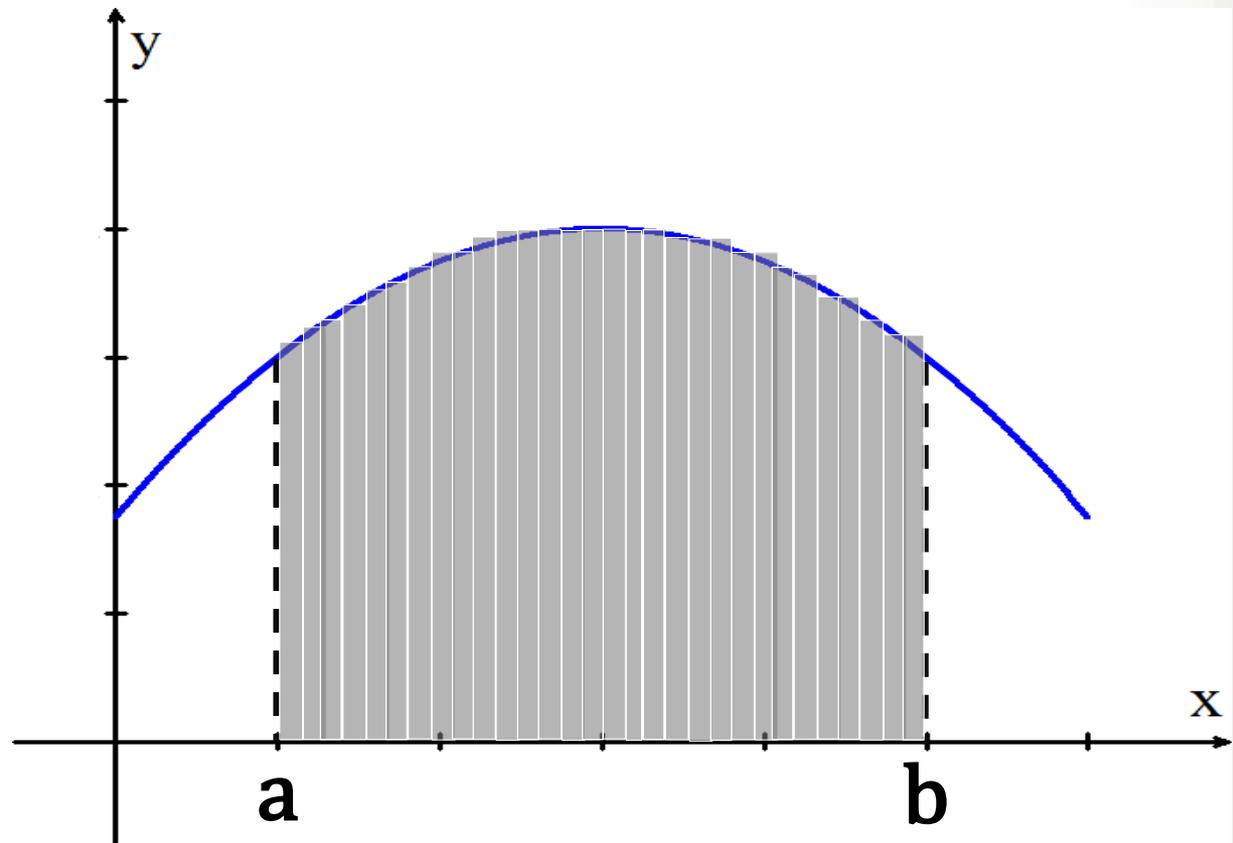
$$A_R \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

Chamada de soma de Riemann

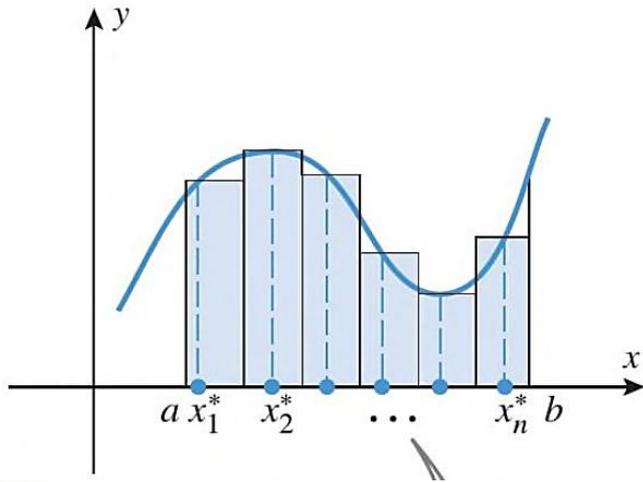


6.4 Definição de área como limite

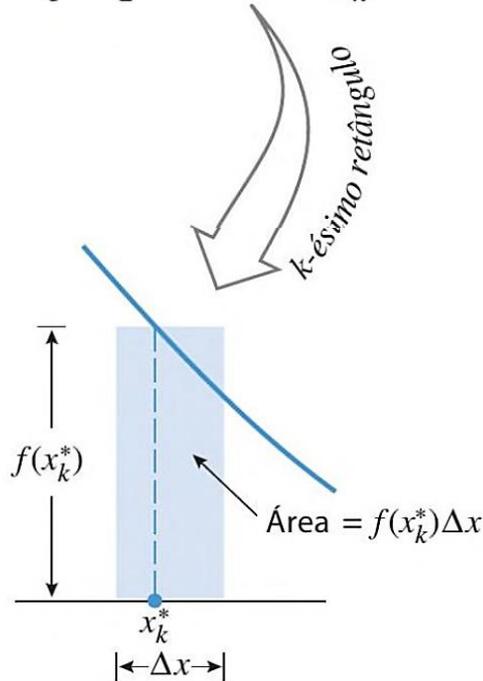
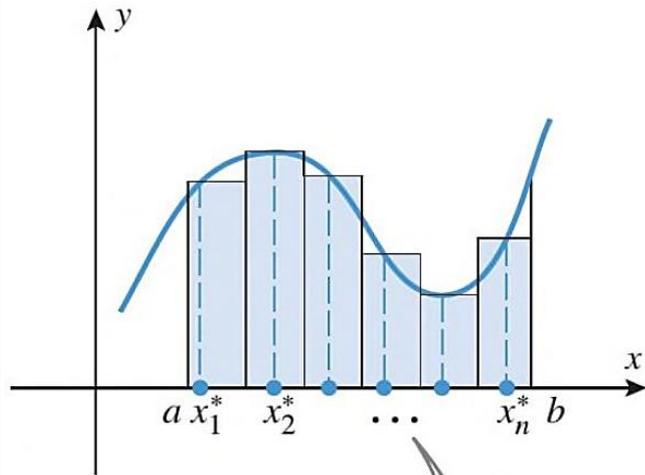
- Quando n cresce para o infinito o somatório dos retângulos tende para a área A sob a curva no intervalo $[a, b]$.



6.4 Definição de área como limite



6.4 Definição de área como limite



6.4 Definição de área como limite

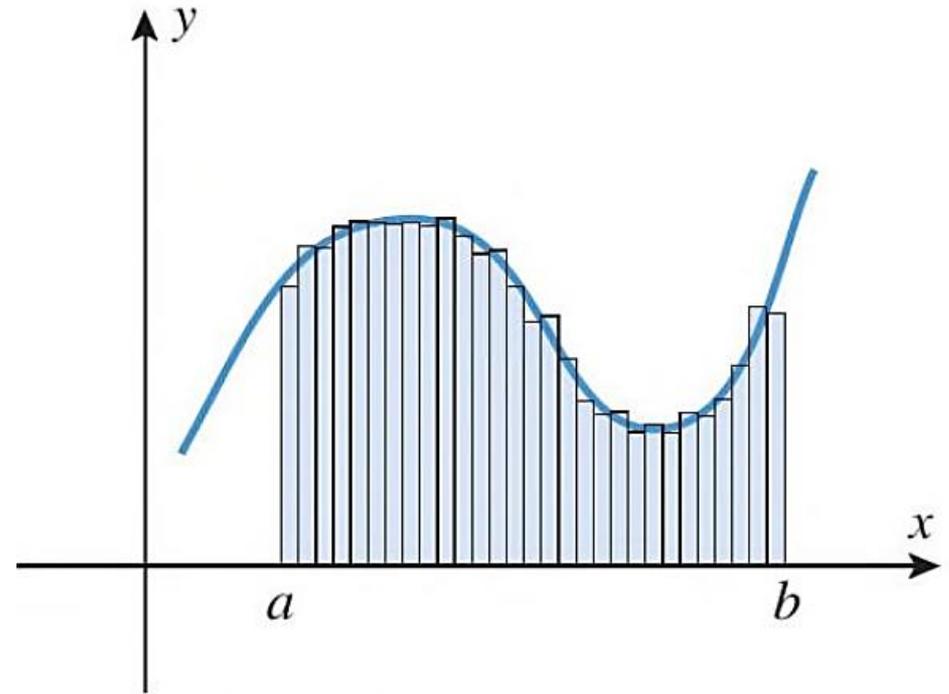
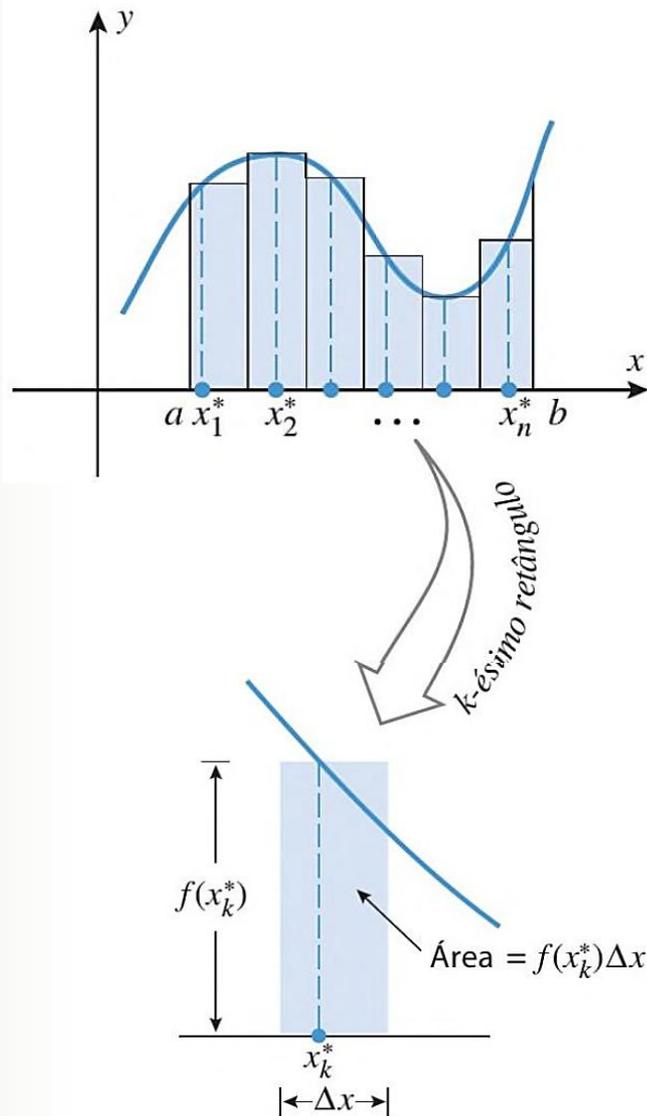


Figura 5.4.5 área (R_n) \approx área (R)

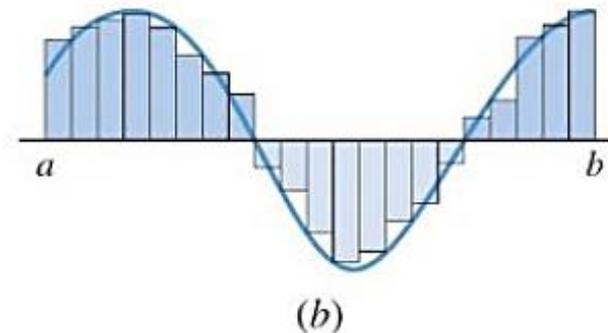
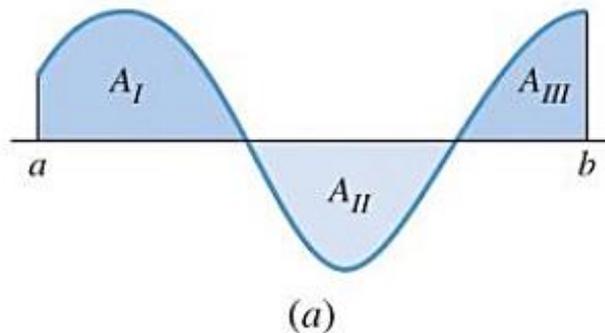
6.4 Definição de área como limite

5.4.3 DEFINIÇÃO (Área Sob uma Curva) Se a função f for contínua em $[a, b]$ e se $f(x) \geq 0$ em cada x de $[a, b]$, então a *área* sob a curva $y = f(x)$ e acima do intervalo $[a, b]$ é definida por

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad (2)$$

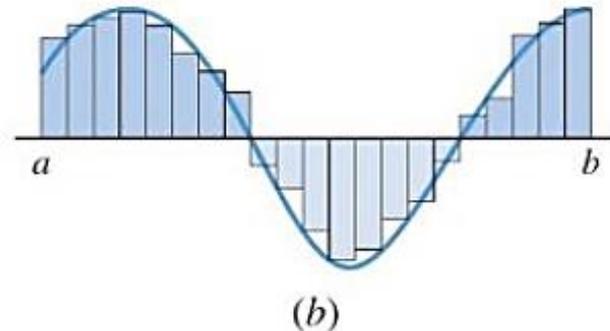
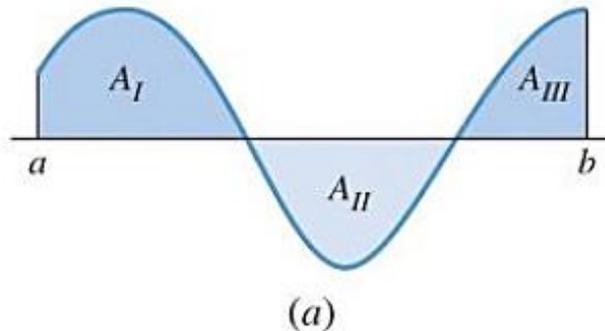
Área líquida com sinal

- Se a função f for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$;



Área líquida com sinal

- Se a função f for contínua e tomar valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$;



- Então a diferença entre as áreas acima e abaixo da curva de f será chamada de **área líquida com sinal** no intervalo $[a, b]$;

Área líquida com sinal

5.4.5 DEFINIÇÃO (*Área Líquida com Sinal*) Se a função f for contínua em $[a, b]$, então a *área líquida com sinal* A entre a curva $y = f(x)$ e o intervalo $[a, b]$ é definida por

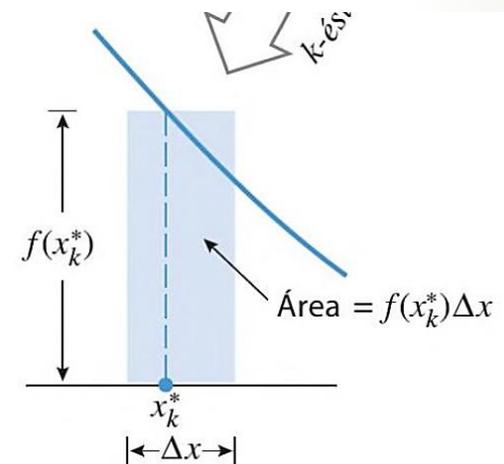
$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x \quad (9)$$

6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

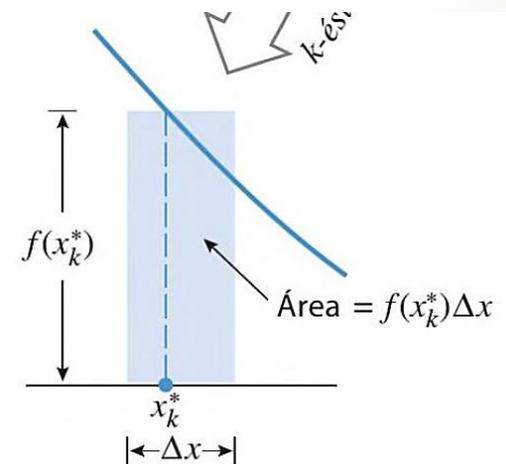
6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;
- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos ;



6.5 Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;
- Na seção anterior ao definirmos a área utilizamos uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos ;
- Este tipo de divisão é chamado **partição regular**.

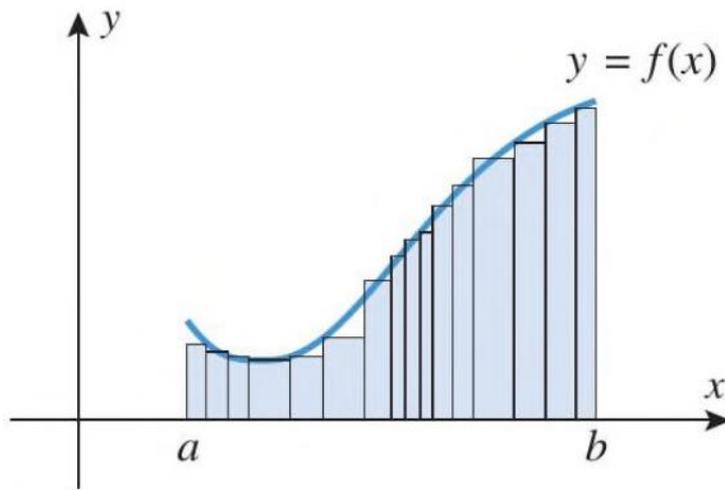


6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

6.5 Integral definida

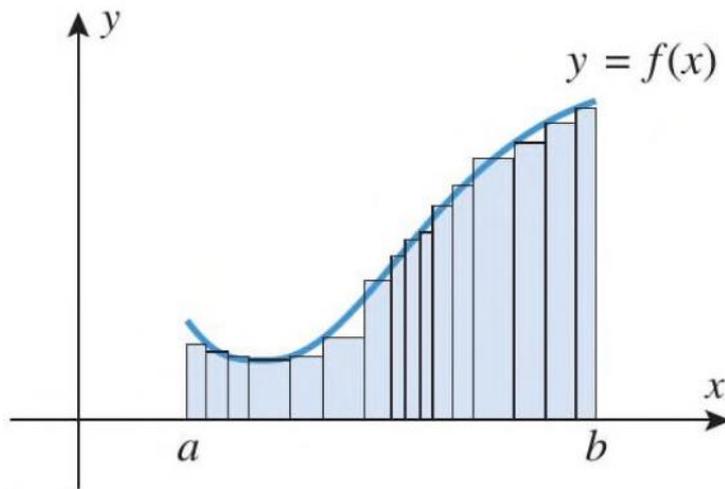
- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;



- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k ;

6.5 Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;



- Podemos generalizar a definição 5.4.5 permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k ;

- Trocaremos também a expressão $n \rightarrow \infty$ por $\text{Max } \Delta x_k \rightarrow 0$, de modo a garantir que as larguras de todos subintervalos tendam a zero.

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é *integrável* em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

6.5 Integral definida

5.5.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é *integrável* em um intervalo fechado finito $[a, b]$ se o limite

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

existir e não depender da escolha das partições ou da escolha dos pontos x_k^* nos subintervalos. Nesse caso, denotamos o limite pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

que é denominado *integral definida* de f de a até b . Os números a e b são denominados *limite de integração inferior* e *limite de integração superior*, respectivamente, e $f(x)$ é denominado *integrando*.

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$ e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ será*

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

6.5 Integral definida

5.5.2 TEOREMA *Se uma função f for contínua em um intervalo $[a, b]$, então f será integrável em $[a, b]$ e a área líquida com sinal A entre o gráfico de f e o intervalo $[a, b]$ será*

$$A = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Pode-se mostrar que se a função $y = f(x)$ for contínua no intervalo $[a, b]$, então será integrável.

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{\text{Max} \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

6.2 A integral definida

A soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{\text{Max}\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Que é a definição de uma integral de uma função contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{Max}\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

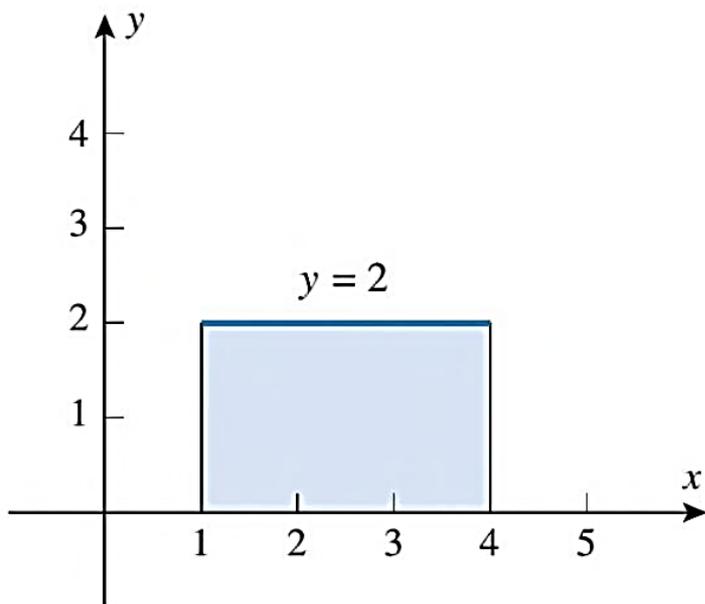
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2dx$

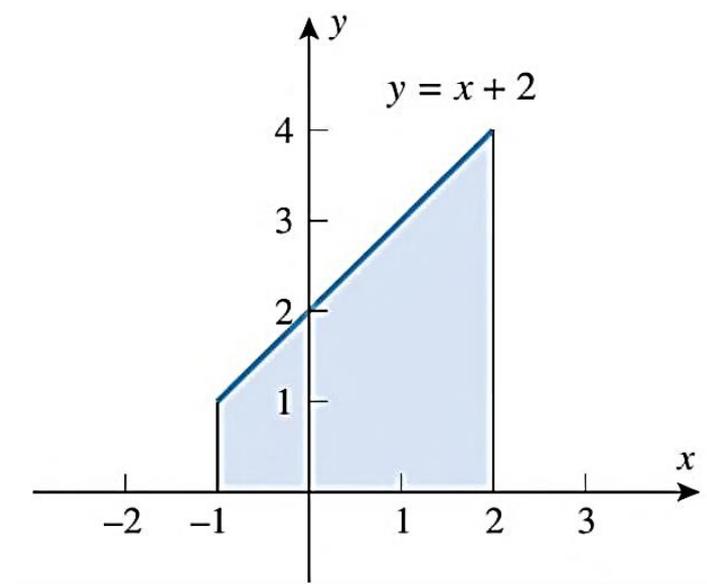
b. $\int_1^4 (x + 2)dx$

Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^4 2 dx$



b. $\int_1^4 (x + 2) dx$



Propriedades da integral definida

5.5.3 DEFINIÇÃO

(a) Se a estiver no domínio de f , definimos

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

(b) Se f for integrável em $[a, b]$, definimos

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Propriedades da integral definida

5.5.4 TEOREMA *Se f e g forem integráveis em $[a, b]$ e se c for uma constante, então cf , $f + g$ e $f - g$ serão integráveis em $[a, b]$ e*

$$(a) \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

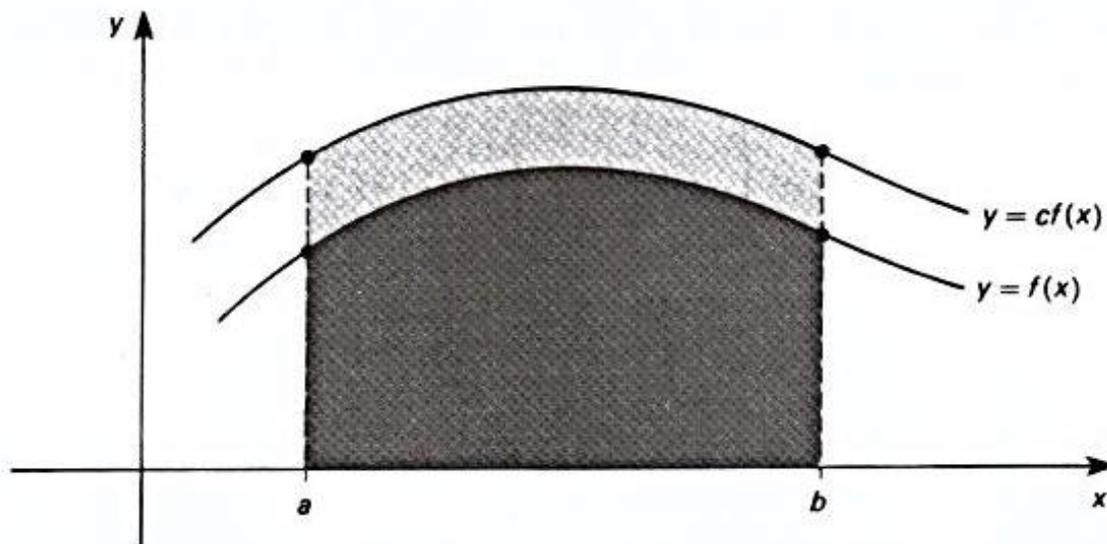
$$(b) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(c) \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

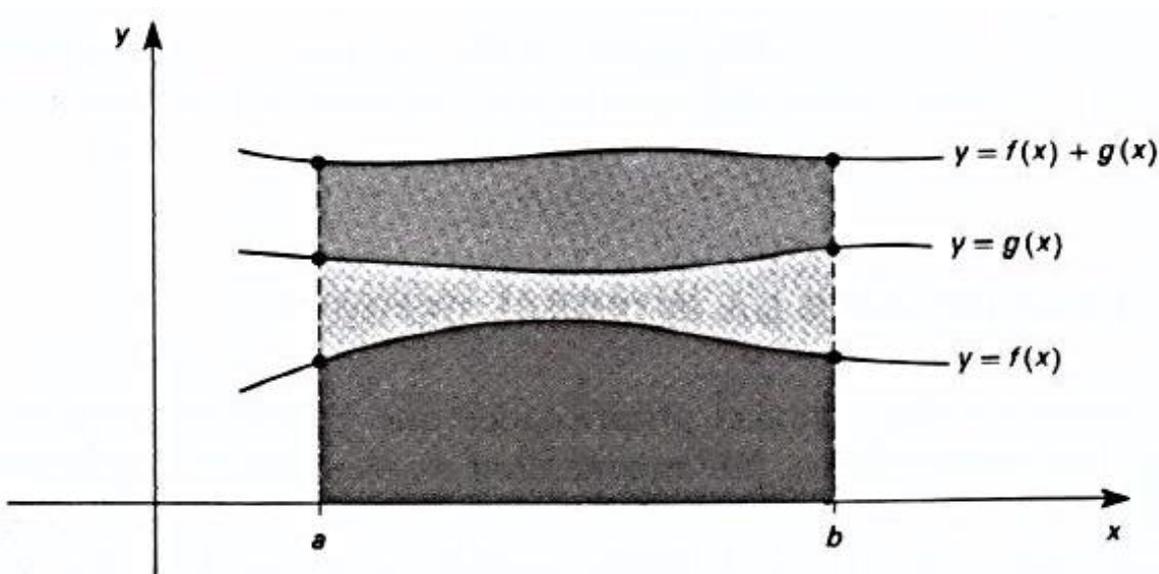
1.
$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$



Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$



6.4 Definição de área como limite

5.5.5 TEOREMA *Se f for integrável em um intervalo fechado contendo os três pontos a , b e c , então*

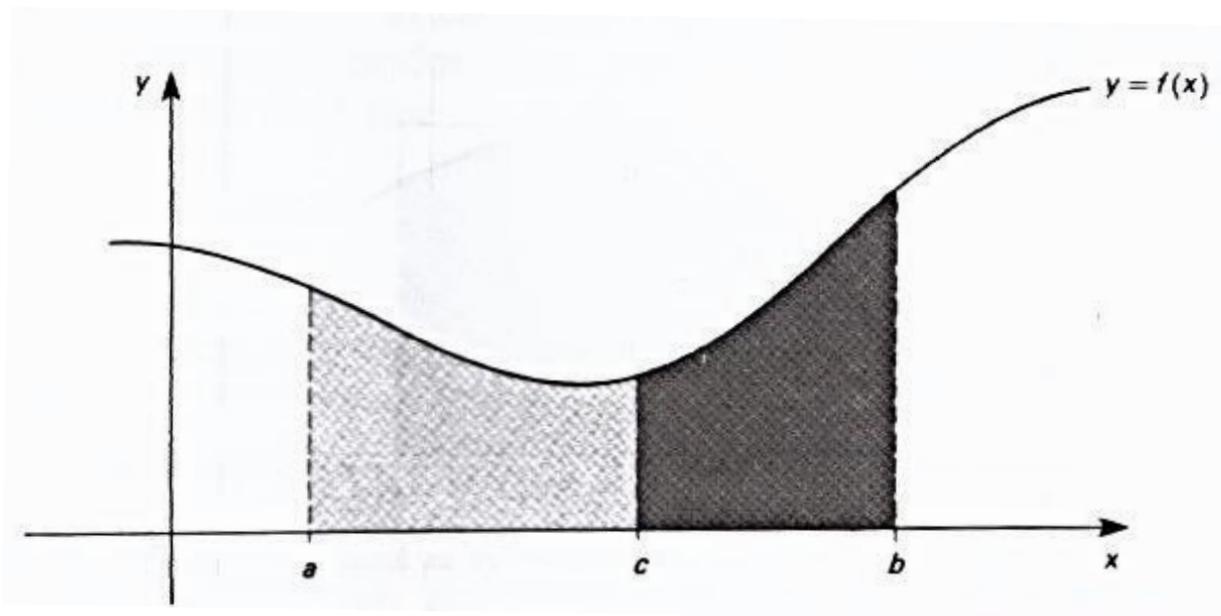
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

não importando como os pontos estejam ordenados.

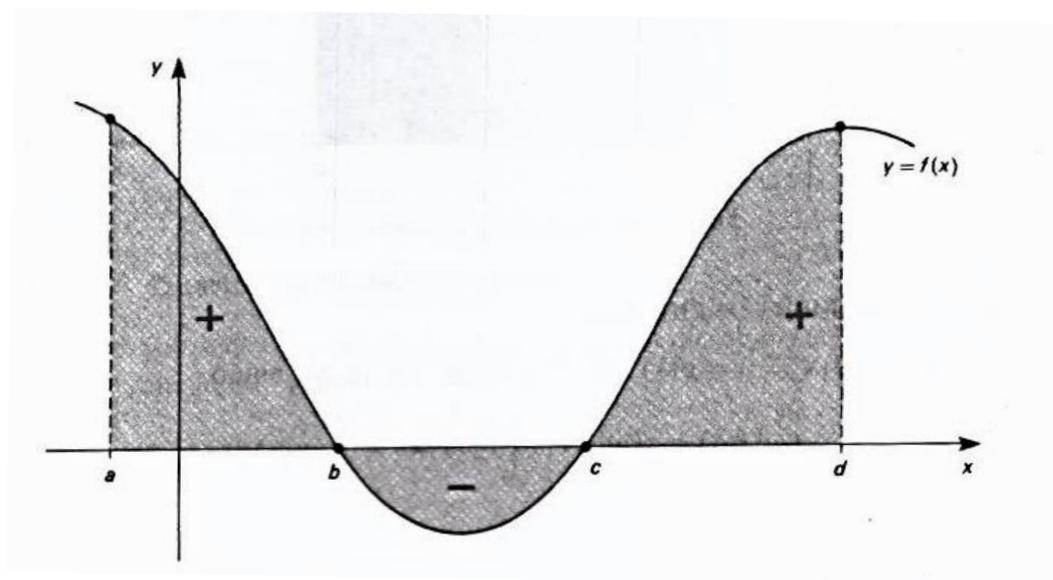
Propriedades da integral definida

Sejam as função $y = f(x)$ e $y = g(x)$, contínuas em um intervalo $[a, b]$ e c uma constante.

3.
$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{com: } a \leq c \leq b$$



6.5 Integral definida e área líquida



$$\int_a^d f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx$$

$$\text{Área líquida} = A_{ab} - A_{bc} + A_{cd}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:
- ✓ Essa relação é conhecida como o **Teorema Fundamental do Cálculo**:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;
- Fornece a precisa relação inversa entre a derivada e a integral;
- O teorema é apresentado em duas partes.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1*) Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (2)$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

■ ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma *antiderivada* de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.3 TEOREMA (*Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2*) *Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x) \quad (11)$$

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C , a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C .*

Integral indefinida

5.2.2 TEOREMA *Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo aberto, então, dada qualquer constante C , a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ nesse intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C .*

A integral de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x)$ mais uma constante.

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO

1. $\frac{d}{dx}[x] = 1$

2. $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$

3. $\frac{d}{dx}[\text{sen } x] = \cos x$

4. $\frac{d}{dx}[-\cos x] = \text{sen } x$

5. $\frac{d}{dx}[\text{tg } x] = \sec^2 x$

6. $\frac{d}{dx}[-\text{cotg } x] = \text{cossec}^2 x$

7. $\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \text{ tg } x$

FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$$

$$\int \cos x dx = \text{sen } x + C$$

$$\int \text{sen } x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \text{tg } x + C$$

$$\int \text{cossec}^2 x dx = -\text{cotg } x + C$$

$$\int \sec x \text{ tg } x dx = \sec x + C$$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
8. $\frac{d}{dx} [-\operatorname{cosec} x] = \operatorname{cosec} x \cotg x$	$\int \operatorname{cosec} x \cotg x dx = -\operatorname{cosec} x + C$
9. $\frac{d}{dx} [e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
10. $\frac{d}{dx} \left[\frac{b^x}{\ln b} \right] = b^x \quad (0 < b, b \neq 1)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b, b \neq 1)$
11. $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
12. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{tg} x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C$
13. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{sen} x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$
14. $\frac{d}{dx} [\operatorname{arc} \operatorname{sec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sec} x + C$

Integral indefinida - propriedades

5.2.3 TEOREMA *Sejam $F(x)$ e $G(x)$ antiderivadas de $f(x)$ e de $g(x)$, respectivamente, e c uma constante. Então:*

(a) *Uma constante pode ser movida através do sinal de integração; isto é,*

$$\int cf(x) dx = cF(x) + C$$

(b) *Uma antiderivada de uma soma é a soma das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) + g(x)] dx = F(x) + G(x) + C$$

(c) *Uma antiderivada de uma diferença é a diferença das antiderivadas; isto é,*

$$\int [f(x) - g(x)] dx = F(x) - G(x) + C$$

Integral indefinida - propriedades

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Síntese dos conceitos

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f , denotada por:

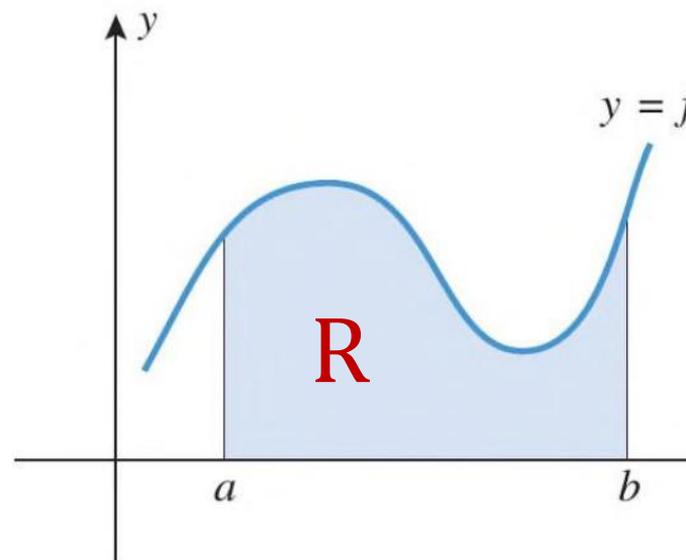
$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f , denotada por:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Integral
definida



$$\text{Área R} = \int_a^b f(x) dx$$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $y = F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $y = F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.
- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\int f(x)dx$$

Integral
Indefinida

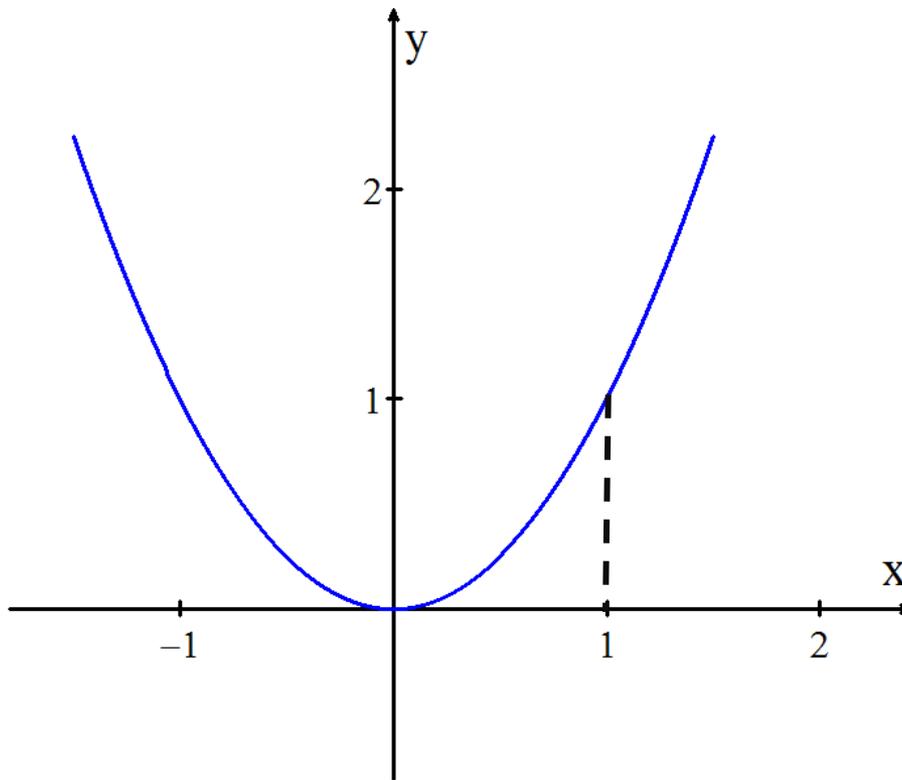
Exemplos, calcular as integrais.

a. $\int_1^3 e^x dx$

b. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

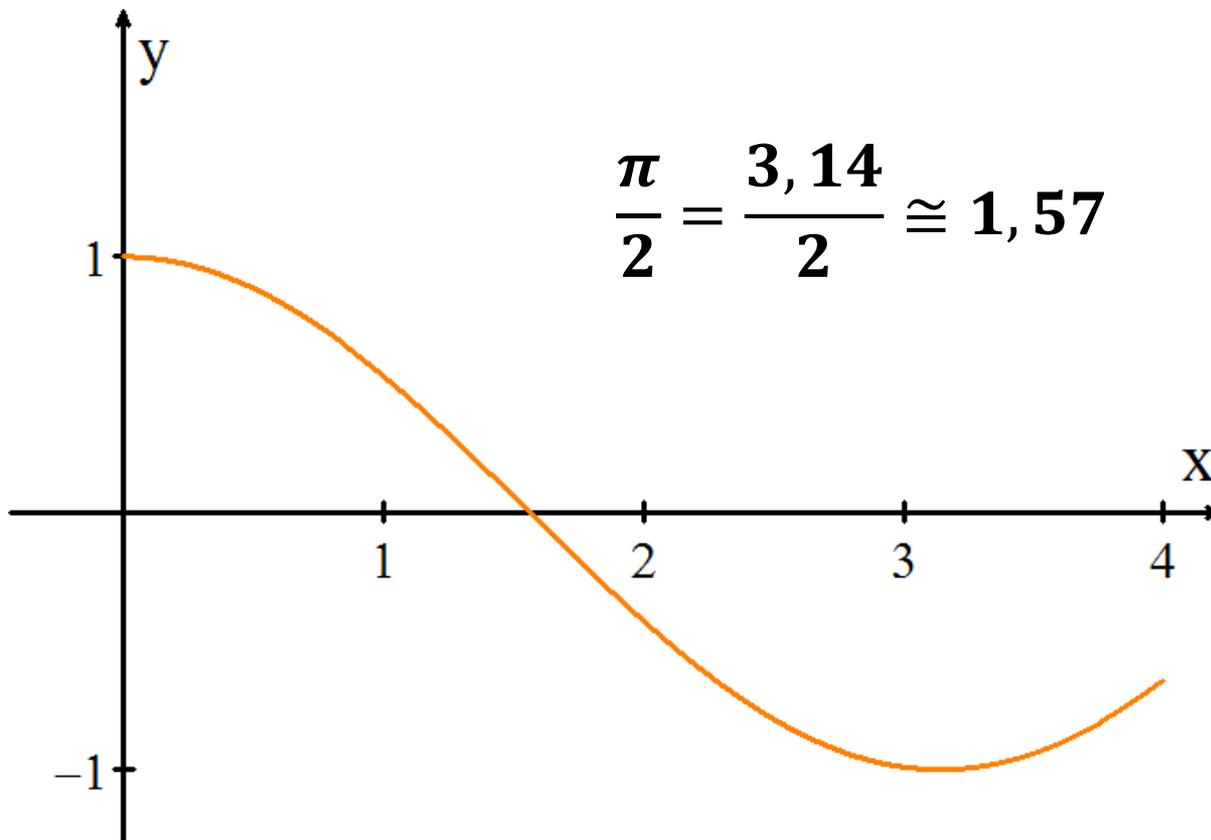
Exemplos, calcular as integrais.

c. $\int_0^1 x^2 dx = \text{Área sob a parábola } y = x^2$



Exemplos, calcular as integrais.

d. $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$



$$\frac{\pi}{2} = \frac{3,14}{2} \cong 1,57$$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$
 $\frac{d}{dx} x^{-3} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$

$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$
 $\frac{d}{dx} x^{-4} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

$\frac{1}{x^5} = x^{-5}$
 $\frac{d}{dx} x^{-5} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

$\frac{1}{x^6} = x^{-6}$
 $\frac{d}{dx} x^{-6} = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$

$\frac{1}{x^7} = x^{-7}$
 $\frac{d}{dx} x^{-7} = -7x^{-8} = -\frac{7}{x^8}$

$\frac{1}{x^8} = x^{-8}$
 $\frac{d}{dx} x^{-8} = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$

$\frac{1}{x^9} = x^{-9}$
 $\frac{d}{dx} x^{-9} = -9x^{-10} = -\frac{9}{x^{10}}$

$\frac{1}{x^{10}} = x^{-10}$
 $\frac{d}{dx} x^{-10} = -10x^{-11} = -\frac{10}{x^{11}}$

$\frac{1}{x^{11}} = x^{-11}$
 $\frac{d}{dx} x^{-11} = -11x^{-12} = -\frac{11}{x^{12}}$

$\frac{1}{x^{12}} = x^{-12}$
 $\frac{d}{dx} x^{-12} = -12x^{-13} = -\frac{12}{x^{13}}$

$\frac{1}{x^{13}} = x^{-13}$
 $\frac{d}{dx} x^{-13} = -13x^{-14} = -\frac{13}{x^{14}}$

$\frac{1}{x^{14}} = x^{-14}$
 $\frac{d}{dx} x^{-14} = -14x^{-15} = -\frac{14}{x^{15}}$

$\frac{1}{x^{15}} = x^{-15}$
 $\frac{d}{dx} x^{-15} = -15x^{-16} = -\frac{15}{x^{16}}$

$\frac{1}{x^{16}} = x^{-16}$
 $\frac{d}{dx} x^{-16} = -16x^{-17} = -\frac{16}{x^{17}}$

$\frac{1}{x^{17}} = x^{-17}$
 $\frac{d}{dx} x^{-17} = -17x^{-18} = -\frac{17}{x^{18}}$

$\frac{1}{x^{18}} = x^{-18}$
 $\frac{d}{dx} x^{-18} = -18x^{-19} = -\frac{18}{x^{19}}$

$\frac{1}{x^{19}} = x^{-19}$
 $\frac{d}{dx} x^{-19} = -19x^{-20} = -\frac{19}{x^{20}}$

$\frac{1}{x^{20}} = x^{-20}$
 $\frac{d}{dx} x^{-20} = -20x^{-21} = -\frac{20}{x^{21}}$

$\frac{1}{x^{21}} = x^{-21}$
 $\frac{d}{dx} x^{-21} = -21x^{-22} = -\frac{21}{x^{22}}$

$\frac{1}{x^{22}} = x^{-22}$
 $\frac{d}{dx} x^{-22} = -22x^{-23} = -\frac{22}{x^{23}}$

$\frac{1}{x^{23}} = x^{-23}$
 $\frac{d}{dx} x^{-23} = -23x^{-24} = -\frac{23}{x^{24}}$

$\frac{1}{x^{24}} = x^{-24}$
 $\frac{d}{dx} x^{-24} = -24x^{-25} = -\frac{24}{x^{25}}$

$\frac{1}{x^{25}} = x^{-25}$
 $\frac{d}{dx} x^{-25} = -25x^{-26} = -\frac{25}{x^{26}}$

$\frac{1}{x^{26}} = x^{-26}$
 $\frac{d}{dx} x^{-26} = -26x^{-27} = -\frac{26}{x^{27}}$

$\frac{1}{x^{27}} = x^{-27}$
 $\frac{d}{dx} x^{-27} = -27x^{-28} = -\frac{27}{x^{28}}$

$\frac{1}{x^{28}} = x^{-28}$
 $\frac{d}{dx} x^{-28} = -28x^{-29} = -\frac{28}{x^{29}}$

$\frac{1}{x^{29}} = x^{-29}$
 $\frac{d}{dx} x^{-29} = -29x^{-30} = -\frac{29}{x^{30}}$

$\frac{1}{x^{30}} = x^{-30}$
 $\frac{d}{dx} x^{-30} = -30x^{-31} = -\frac{30}{x^{31}}$

$\frac{1}{x^{31}} = x^{-31}$
 $\frac{d}{dx} x^{-31} = -31x^{-32} = -\frac{31}{x^{32}}$

$\frac{1}{x^{32}} = x^{-32}$
 $\frac{d}{dx} x^{-32} = -32x^{-33} = -\frac{32}{x^{33}}$

$\frac{1}{x^{33}} = x^{-33}$
 $\frac{d}{dx} x^{-33} = -33x^{-34} = -\frac{33}{x^{34}}$

$\frac{1}{x^{34}} = x^{-34}$
 $\frac{d}{dx} x^{-34} = -34x^{-35} = -\frac{34}{x^{35}}$

$\frac{1}{x^{35}} = x^{-35}$
 $\frac{d}{dx} x^{-35} = -35x^{-36} = -\frac{35}{x^{36}}$

$\frac{1}{x^{36}} = x^{-36}$
 $\frac{d}{dx} x^{-36} = -36x^{-37} = -\frac{36}{x^{37}}$

$\frac{1}{x^{37}} = x^{-37}$
 $\frac{d}{dx} x^{-37} = -37x^{-38} = -\frac{37}{x^{38}}$

$\frac{1}{x^{38}} = x^{-38}$
 $\frac{d}{dx} x^{-38} = -38x^{-39} = -\frac{38}{x^{39}}$

$\frac{1}{x^{39}} = x^{-39}$
 $\frac{d}{dx} x^{-39} = -39x^{-40} = -\frac{39}{x^{40}}$

$\frac{1}{x^{40}} = x^{-40}$
 $\frac{d}{dx} x^{-40} = -40x^{-41} = -\frac{40}{x^{41}}$

$\frac{1}{x^{41}} = x^{-41}$
 $\frac{d}{dx} x^{-41} = -41x^{-42} = -\frac{41}{x^{42}}$

$\frac{1}{x^{42}} = x^{-42}$
 $\frac{d}{dx} x^{-42} = -42x^{-43} = -\frac{42}{x^{43}}$

$\frac{1}{x^{43}} = x^{-43}$
 $\frac{d}{dx} x^{-43} = -43x^{-44} = -\frac{43}{x^{44}}$

$\frac{1}{x^{44}} = x^{-44}$
 $\frac{d}{dx} x^{-44} = -44x^{-45} = -\frac{44}{x^{45}}$

$\frac{1}{x^{45}} = x^{-45}$
 $\frac{d}{dx} x^{-45} = -45x^{-46} = -\frac{45}{x^{46}}$

$\frac{1}{x^{46}} = x^{-46}$
 $\frac{d}{dx} x^{-46} = -46x^{-47} = -\frac{46}{x^{47}}$

$\frac{1}{x^{47}} = x^{-47}$
 $\frac{d}{dx} x^{-47} = -47x^{-48} = -\frac{47}{x^{48}}$

$\frac{1}{x^{48}} = x^{-48}$
 $\frac{d}{dx} x^{-48} = -48x^{-49} = -\frac{48}{x^{49}}$

$\frac{1}{x^{49}} = x^{-49}$
 $\frac{d}{dx} x^{-49} = -49x^{-50} = -\frac{49}{x^{50}}$

$\frac{1}{x^{50}} = x^{-50}$
 $\frac{d}{dx} x^{-50} = -50x^{-51} = -\frac{50}{x^{51}}$

$\frac{1}{x^{51}} = x^{-51}$
 $\frac{d}{dx} x^{-51} = -51x^{-52} = -\frac{51}{x^{52}}$

$\frac{1}{x^{52}} = x^{-52}$
 $\frac{d}{dx} x^{-52} = -52x^{-53} = -\frac{52}{x^{53}}$

$\frac{1}{x^{53}} = x^{-53}$
 $\frac{d}{dx} x^{-53} = -53x^{-54} = -\frac{53}{x^{54}}$

$\frac{1}{x^{54}} = x^{-54}$
 $\frac{d}{dx} x^{-54} = -54x^{-55} = -\frac{54}{x^{55}}$

$\frac{1}{x^{55}} = x^{-55}$
 $\frac{d}{dx} x^{-55} = -55x^{-56} = -\frac{55}{x^{56}}$

$\frac{1}{x^{56}} = x^{-56}$
 $\frac{d}{dx} x^{-56} = -56x^{-57} = -\frac{56}{x^{57}}$

$\frac{1}{x^{57}} = x^{-57}$
 $\frac{d}{dx} x^{-57} = -57x^{-58} = -\frac{57}{x^{58}}$

$\frac{1}{x^{58}} = x^{-58}$
 $\frac{d}{dx} x^{-58} = -58x^{-59} = -\frac{58}{x^{59}}$

$\frac{1}{x^{59}} = x^{-59}$
 $\frac{d}{dx} x^{-59} = -59x^{-60} = -\frac{59}{x^{60}}$

$\frac{1}{x^{60}} = x^{-60}$
 $\frac{d}{dx} x^{-60} = -60x^{-61} = -\frac{60}{x^{61}}$

$\frac{1}{x^{61}} = x^{-61}$
 $\frac{d}{dx} x^{-61} = -61x^{-62} = -\frac{61}{x^{62}}$

$\frac{1}{x^{62}} = x^{-62}$
 $\frac{d}{dx} x^{-62} = -62x^{-63} = -\frac{62}{x^{63}}$

$\frac{1}{x^{63}} = x^{-63}$
 $\frac{d}{dx} x^{-63} = -63x^{-64} = -\frac{63}{x^{64}}$

$\frac{1}{x^{64}} = x^{-64}$
 $\frac{d}{dx} x^{-64} = -64x^{-65} = -\frac{64}{x^{65}}$

$\frac{1}{x^{65}} = x^{-65}$
 $\frac{d}{dx} x^{-65} = -65x^{-66} = -\frac{65}{x^{66}}$

$\frac{1}{x^{66}} = x^{-66}$
 $\frac{d}{dx} x^{-66} = -66x^{-67} = -\frac{66}{x^{67}}$

$\frac{1}{x^{67}} = x^{-67}$
 $\frac{d}{dx} x^{-67} = -67x^{-68} = -\frac{67}{x^{68}}$

$\frac{1}{x^{68}} = x^{-68}$
 $\frac{d}{dx} x^{-68} = -68x^{-69} = -\frac{68}{x^{69}}$

$\frac{1}{x^{69}} = x^{-69}$
 $\frac{d}{dx} x^{-69} = -69x^{-70} = -\frac{69}{x^{70}}$

$\frac{1}{x^{70}} = x^{-70}$
 $\frac{d}{dx} x^{-70} = -70x^{-71} = -\frac{70}{x^{71}}$

$\frac{1}{x^{71}} = x^{-71}$
 $\frac{d}{dx} x^{-71} = -71x^{-72} = -\frac{71}{x^{72}}$

$\frac{1}{x^{72}} = x^{-72}$
 $\frac{d}{dx} x^{-72} = -72x^{-73} = -\frac{72}{x^{73}}$

$\frac{1}{x^{73}} = x^{-73}$
 $\frac{d}{dx} x^{-73} = -73x^{-74} = -\frac{73}{x^{74}}$

$\frac{1}{x^{74}} = x^{-74}$
 $\frac{d}{dx} x^{-74} = -74x^{-75} = -\frac{74}{x^{75}}$

$\frac{1}{x^{75}} = x^{-75}$
 $\frac{d}{dx} x^{-75} = -75x^{-76} = -\frac{75}{x^{76}}$

$\frac{1}{x^{76}} = x^{-76}$
 $\frac{d}{dx} x^{-76} = -76x^{-77} = -\frac{76}{x^{77}}$

$\frac{1}{x^{77}} = x^{-77}$
 $\frac{d}{dx} x^{-77} = -77x^{-78} = -\frac{77}{x^{78}}$

$\frac{1}{x^{78}} = x^{-78}$
 $\frac{d}{dx} x^{-78} = -78x^{-79} = -\frac{78}{x^{79}}$

$\frac{1}{x^{79}} = x^{-79}$
 $\frac{d}{dx} x^{-79} = -79x^{-80} = -\frac{79}{x^{80}}$

$\frac{1}{x^{80}} = x^{-80}$
 $\frac{d}{dx} x^{-80} = -80x^{-81} = -\frac{80}{x^{81}}$

$\frac{1}{x^{81}} = x^{-81}$
 $\frac{d}{dx} x^{-81} = -81x^{-82} = -\frac{81}{x^{82}}$

$\frac{1}{x^{82}} = x^{-82}$
 $\frac{d}{dx} x^{-82} = -82x^{-83} = -\frac{82}{x^{83}}$

$\frac{1}{x^{83}} = x^{-83}$
 $\frac{d}{dx} x^{-83} = -83x^{-84} = -\frac{83}{x^{84}}$

$\frac{1}{x^{84}} = x^{-84}$
 $\frac{d}{dx} x^{-84} = -84x^{-85} = -\frac{84}{x^{85}}$

$\frac{1}{x^{85}} = x^{-85}$
 $\frac{d}{dx} x^{-85} = -85x^{-86} = -\frac{85}{x^{86}}$

$\frac{1}{x^{86}} = x^{-86}$
 $\frac{d}{dx} x^{-86} = -86x^{-87} = -\frac{86}{x^{87}}$

$\frac{1}{x^{87}} = x^{-87}$
 $\frac{d}{dx} x^{-87} = -87x^{-88} = -\frac{87}{x^{88}}$

$\frac{1}{x^{88}} = x^{-88}$
 $\frac{d}{dx} x^{-88} = -88x^{-89} = -\frac{88}{x^{89}}$

$\frac{1}{x^{89}} = x^{-89}$
 $\frac{d}{dx} x^{-89} = -89x^{-90} = -\frac{89}{x^{90}}$

$\frac{1}{x^{90}} = x^{-90}$
 $\frac{d}{dx} x^{-90} = -90x^{-91} = -\frac{90}{x^{91}}$

$\frac{1}{x^{91}} = x^{-91}$
 $\frac{d}{dx} x^{-91} = -91x^{-92} = -\frac{91}{x^{92}}$

$\frac{1}{x^{92}} = x^{-92}$
 $\frac{d}{dx} x^{-92} = -92x^{-93} = -\frac{92}{x^{93}}$

$\frac{1}{x^{93}} = x^{-93}$
 $\frac{d}{dx} x^{-93} = -93x^{-94} = -\frac{93}{x^{94}}$

$\frac{1}{x^{94}} = x^{-94}$
 $\frac{d}{dx} x^{-94} = -94x^{-95} = -\frac{94}{x^{95}}$

$\frac{1}{x^{95}} = x^{-95}$
 $\frac{d}{dx} x^{-95} = -95x^{-96} = -\frac{95}{x^{96}}$

$\frac{1}{x^{96}} = x^{-96}$
 $\frac{d}{dx} x^{-96} = -96x^{-97} = -\frac{96}{x^{97}}$

$\frac{1}{x^{97}} = x^{-97}$
 $\frac{d}{dx} x^{-97} = -97x^{-98} = -\frac{97}{x^{98}}$

$\frac{1}{x^{98}} = x^{-98}$
 $\frac{d}{dx} x^{-98} = -98x^{-99} = -\frac{98}{x^{99}}$

$\frac{1}{x^{99}} = x^{-99}$
 $\frac{d}{dx} x^{-99} = -99x^{-100} = -\frac{99}{x^{100}}$

$\frac{1}{x^{100}} = x^{-100}$
 $\frac{d}{dx} x^{-100} = -100x^{-101} = -\frac{100}{x^{101}}$

Para depois desta aula:

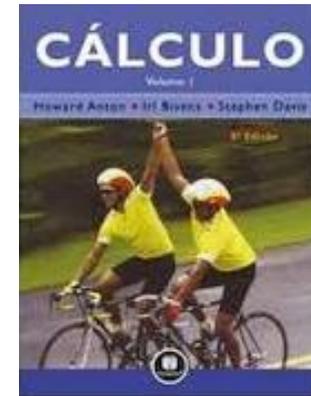
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Essa aula não tem exercícios propostos.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br