Cálculo I

Engenharia

Aula 07
Limites A

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Abordagem intuitiva de limites

- Consideremos o caso do paraquedista;
- A resistência do ar impede que a sua velocidade aumente indefinidamente;

Joe McBride/Stone/Getty Images

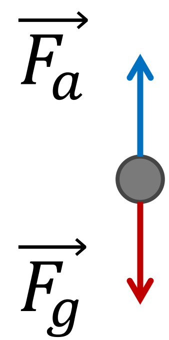
Abordagem intuitiva de limites

- Consideremos o caso do paraquedista;

- A resistência do ar impede que a sua velocidade aumente indefinidamente;

- A velocidade tende a uma **velocidade limite** chamada de velocidade terminal.

Joe McBride/Stone/Getty Images



Abordagem intuitiva de limites

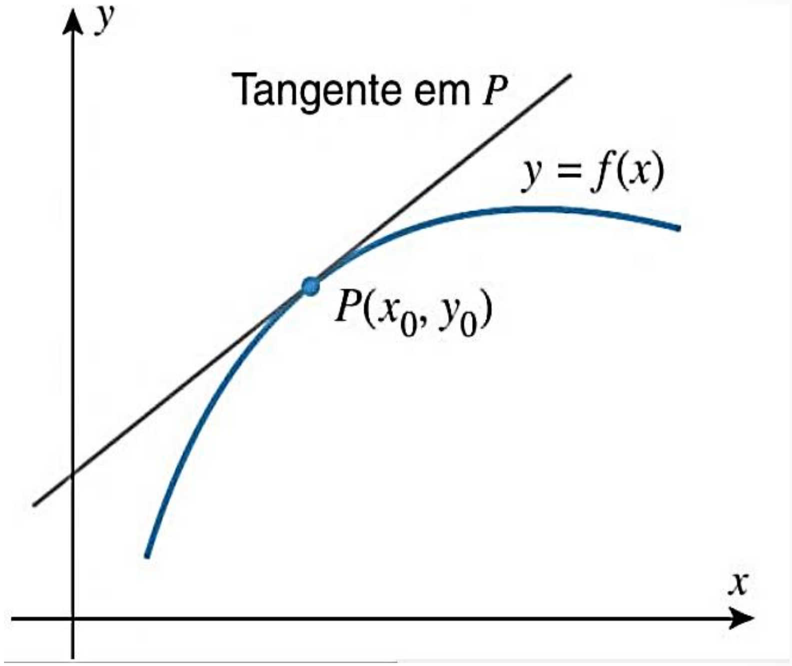
- Todos os demais conceitos do Cálculo estão baseados no **conceito de limites**;
- O **problema geométrico da reta tangente** provocou muitas das ideias do Cálculo;
- Há então uma **ligação** próxima entre o conceito de **limite** e a determinação de **retas tangentes**.

Abordagem intuitiva de limites

- Sejam a função f e um ponto $P(x_0, y_o)$ em seu gráfico;

Abordagem intuitiva de limites

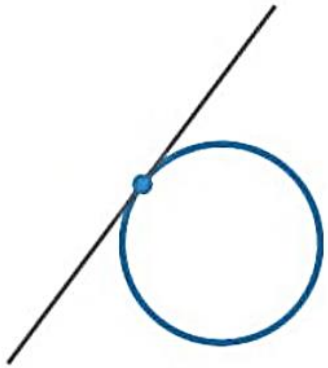
- Sejam a função f e um ponto $P(x_0, y_o)$ em seu gráfico;
- O problema consiste em encontrar uma equação da **reta tangente ao gráfico** em P.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites

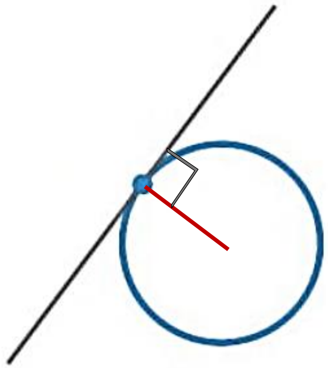
- Na geometria plana, uma reta é tangente a um círculo se o tocar em um único ponto;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites

- Na geometria plana, uma reta é tangente a um círculo se o tocar em um único ponto;

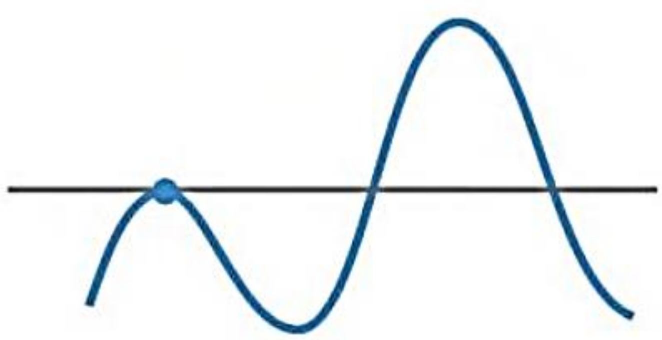


- Isso ocorre toda vez que a reta for perpendicular ao raio desse círculo;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites

- Mas, essa definição não é adequada para outras curvas;
- Possivelmente, em outras curvas a reta tocará mais de um ponto.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

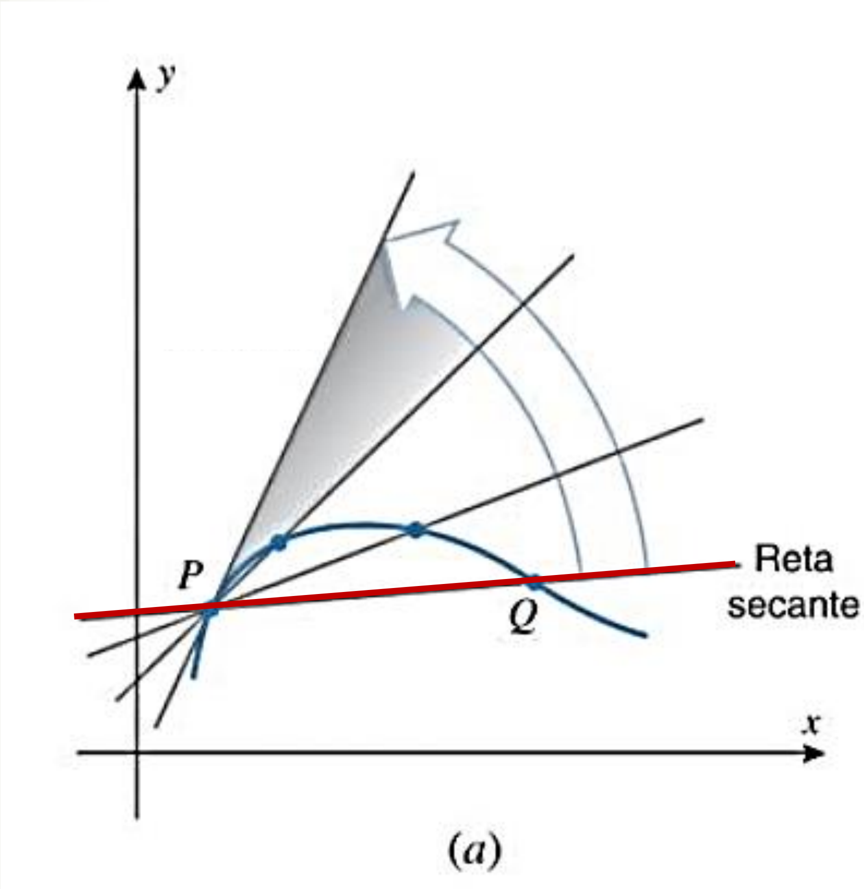
Reta tangente e limites

- Deve-se então encontrar outra maneira de estabelecer a reta tangente a uma curva de f;

Reta tangente e limites

- Deve-se então encontrar outra maneira de estabelecer a reta tangente a uma curva de f;
- Supomos, então, que desejamos encontrar uma reta tangente ao ponto P no plano xy;
- Um ponto qualquer Q pertence também à curva da função f.

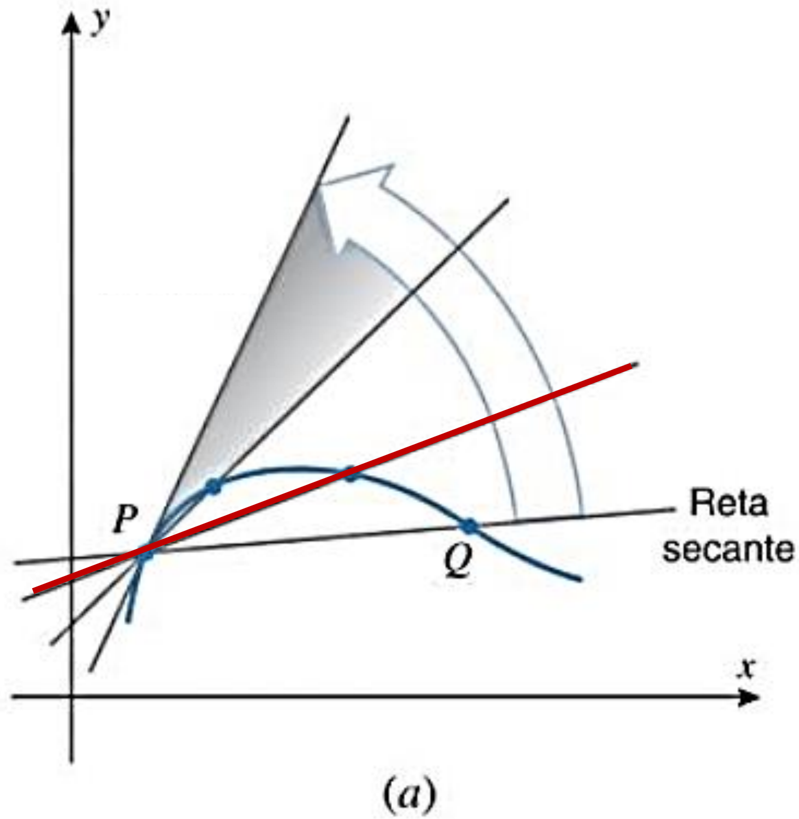
Reta tangente e limites



- A reta $\overline{PQ}$ é a reta secante à curva $y = f(x)$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites

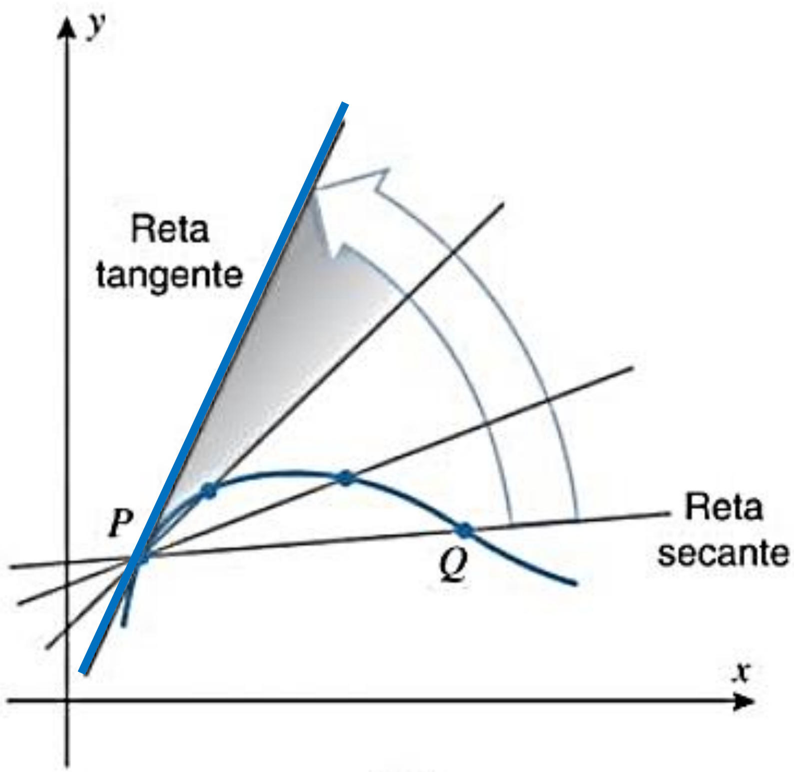


- A reta $\overline{PQ}$ é a reta secante à curva $y = f(x)$;

- Se movermos Q em direção a P a reta irá girar até uma **posição limite**;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites



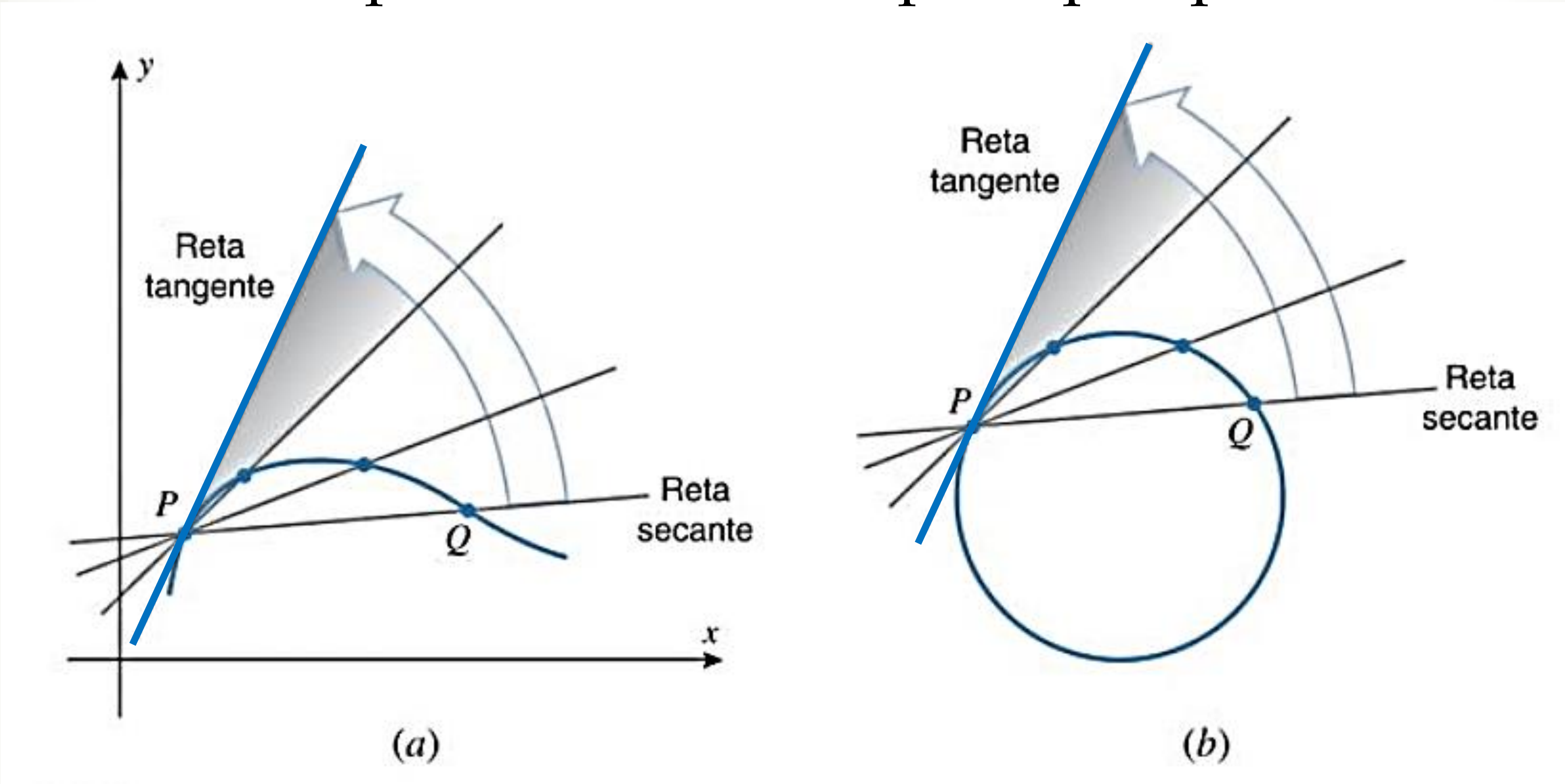
(a)

- A reta $\overline{PQ}$ é a reta secante à curva $y = f(x)$;
- Se movermos Q em direção a P a reta irá girar até uma **posição limite**;
- A reta nesse posição limite é a reta tangente em P.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Reta tangente e limites

➢ O conceito da reta tangente ao círculo passa a ser um caso particular do caso para qualquer curva.



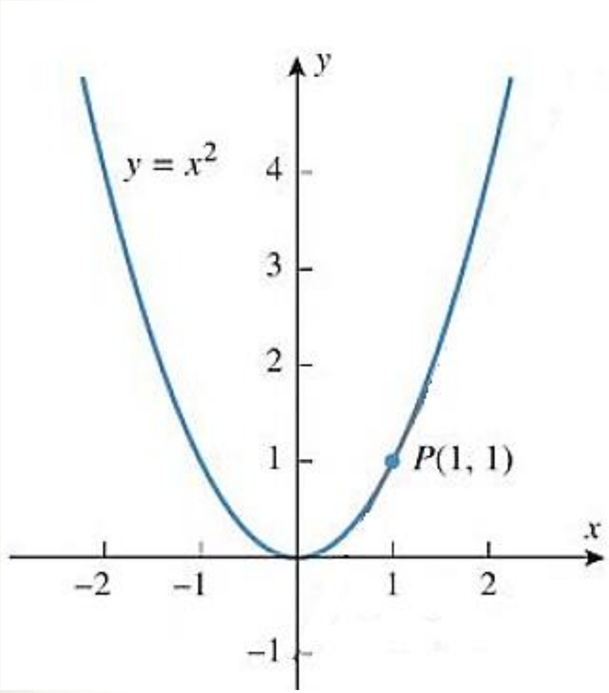
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

Exemplo

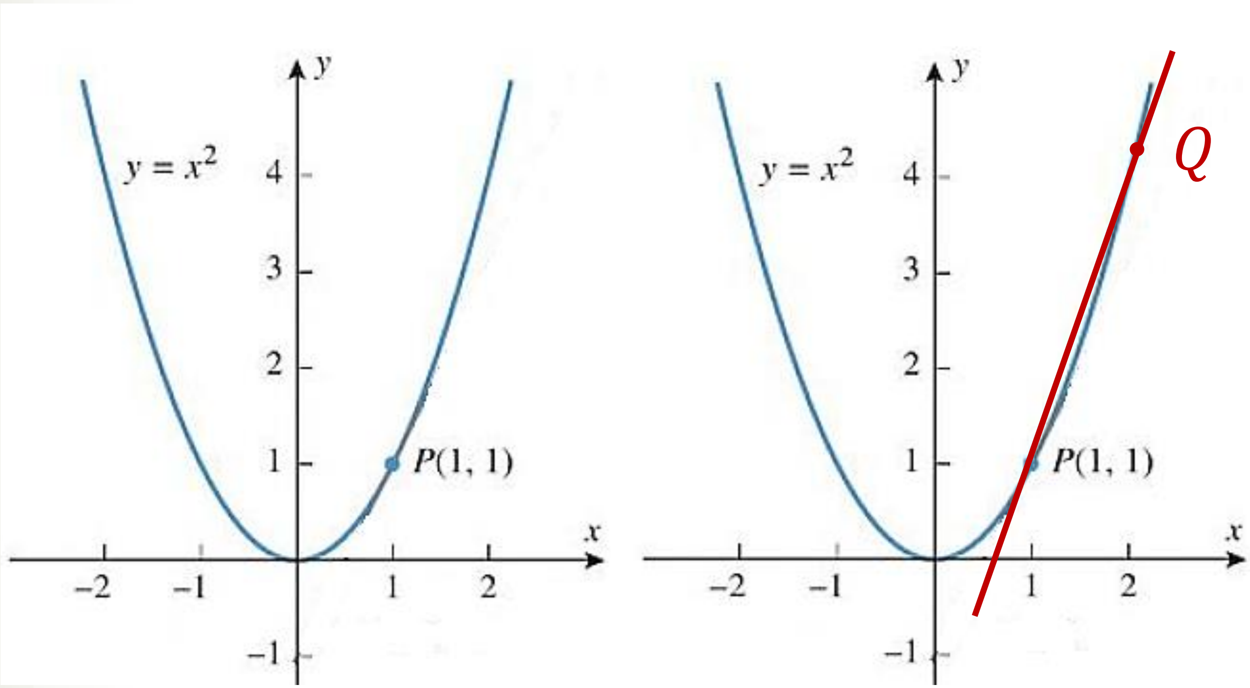
Encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.

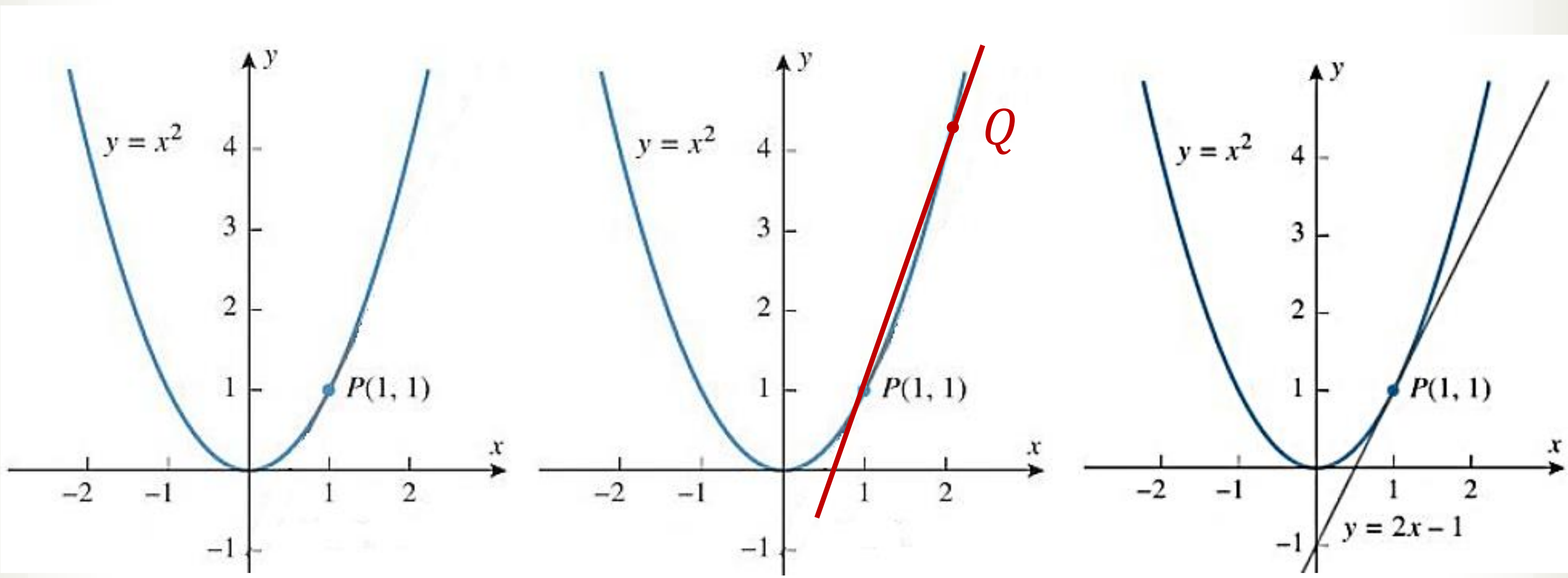


$$m_{sec} = tg\alpha = \frac{cat\ op.}{cat\ adj.}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Encontrar uma equação para a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1, 1)$.



$$m_{sec} = tg\alpha = \frac{cat\ op.}{cat\ adj.}$$

$$y - y_0 = m_{tg}(x - x_o)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Números decimais e limites

- Os limites também podem ocorrer no contexto dos números decimais, por exemplo:

  $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ \dots$ que pode ser escrito como:

Números decimais e limites

- Os limites também podem ocorrer no contexto dos números decimais, por exemplo:

  $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ que pode ser escrito como:

  $$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \cdots$$

- A medida que se acrescenta mais parcelas se aproxima mais e mais de $\frac{1}{3}$.

Limites

- Usado para descrever como uma **função se comporta** quando a variável independente tende a um determinado valor.

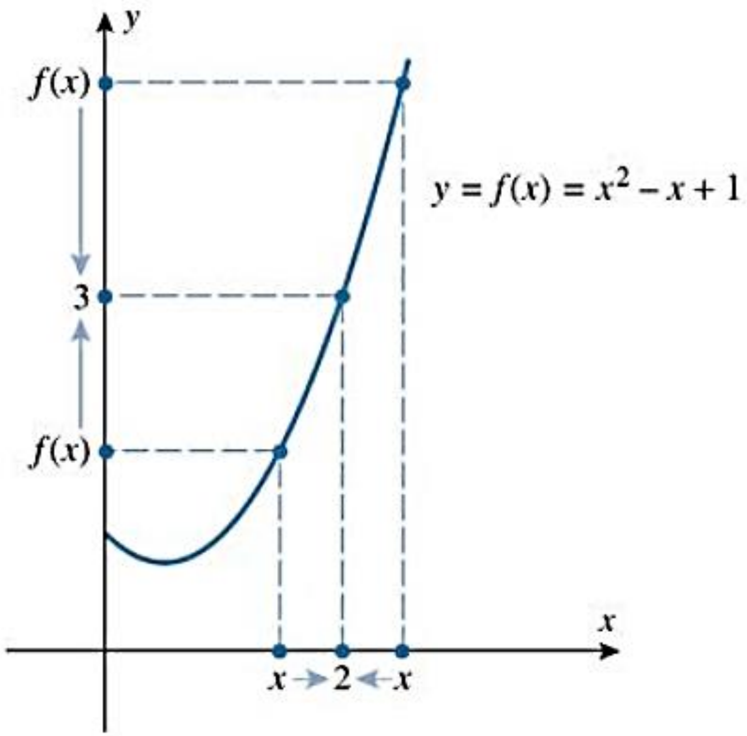
Limites

- Usado para descrever como uma **função se comporta** quando a variável independente tende a um determinado valor.

  Exemplo: $f(x) = x^2 - x + 1$

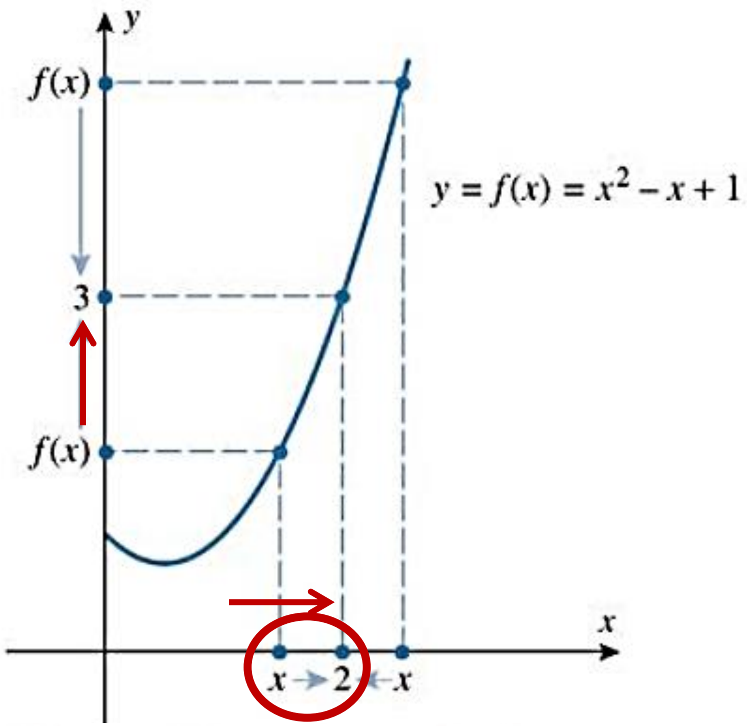
- Quando $\boldsymbol{x}$ está cada vez mais próximo de 2 o que ocorre com f?

Limites



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites

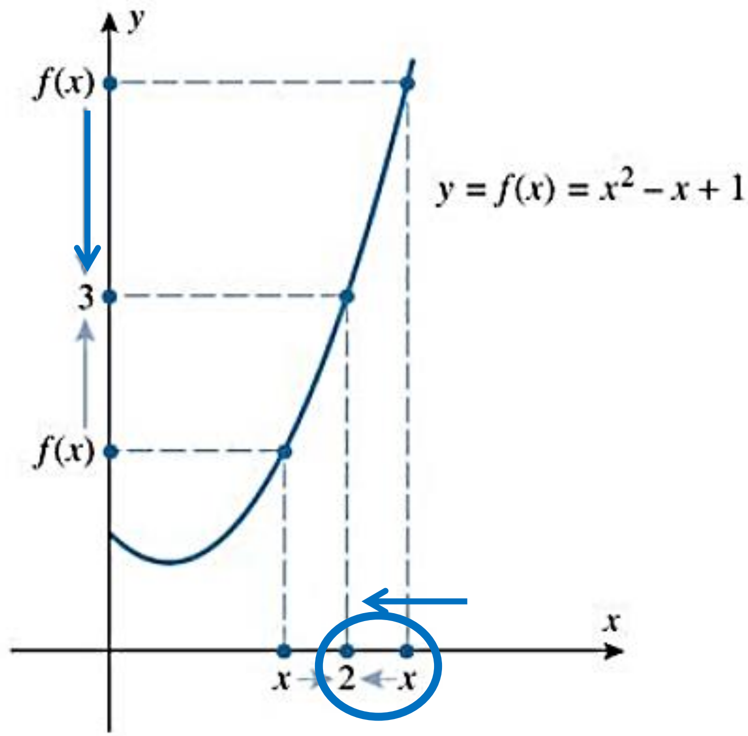


x	1,0	1,5	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	2
$f(x)$	1,000000	1,750000	2,710000	2,852500	2,970100	2,985025	2,997001	

Lado esquerdo

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites

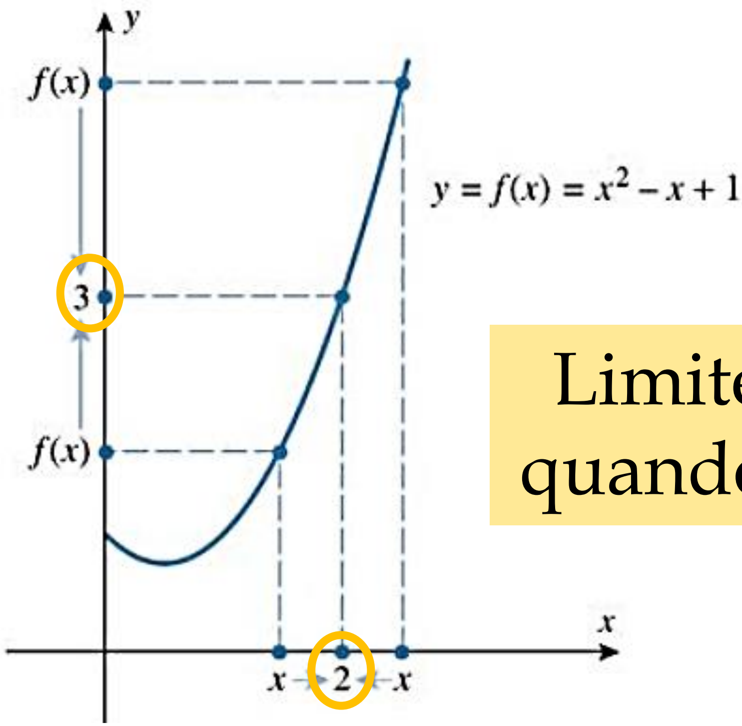


2	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1	2,5	3,0
	3,003001	3,015025	3,030100	3,152500	3,310000	4,750000	7,000000

Lado direito

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites



Limite de $f(x)$ é **3** quando x tende a **2**.

x	1,0	1,5	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	2
$f(x)$	1,000000	1,750000	2,710000	2,852500	2,970100	2,985025	2,997001	

Lado esquerdo

2	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1	2,5	3,0
	3,003001	3,015025	3,030100	3,152500	3,310000	4,750000	7,000000

Lado direito

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites

1.1.1 LIMITES (DE UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escreveremos

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \tag{6}$$

que deve ser lido como "o limite de $f(x)$ com x tendendo a a é L", ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a". A expressão (6) também pode ser escrita como

$$f(x) \to L \quad \text{com} \quad x \to a \tag{7}$$

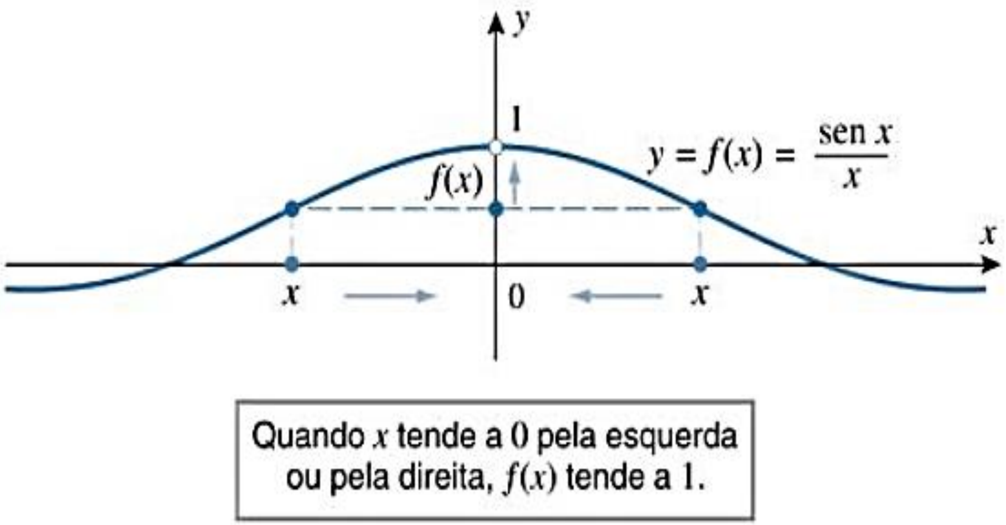
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$$

Exemplo

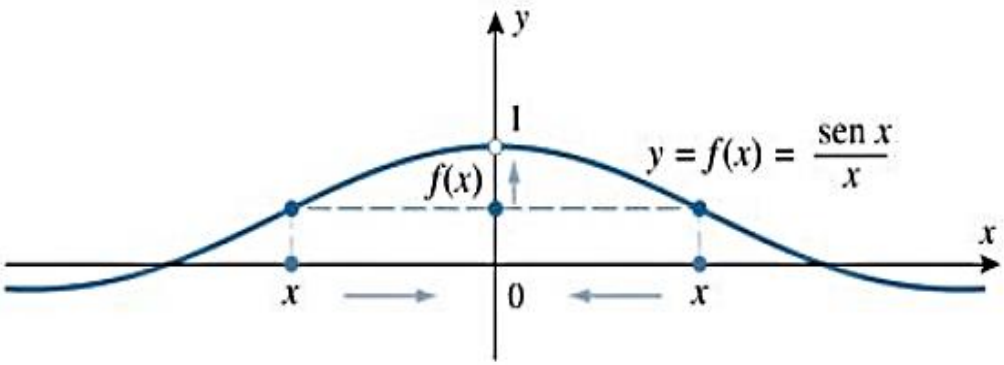
$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}$$



Quando x tende a 0 pela esquerda ou pela direita, $f(x)$ tende a 1.

Tabela 1.1.2

x (radianos)	$y = \frac{\text{sen } x}{x}$
±1,0	0,84147
±0,9	0,87036
±0,8	0,89670
±0,7	0,92031
±0,6	0,94107
±0,5	0,95885
±0,4	0,97355
±0,3	0,98507
±0,2	0,99335
±0,1	0,99833
±0,01	0,99998

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites laterais

Limites laterais

- Algumas funções exibem diferentes comportamentos distintos em cada um dos dois lados de um ponto a;

Limites laterais

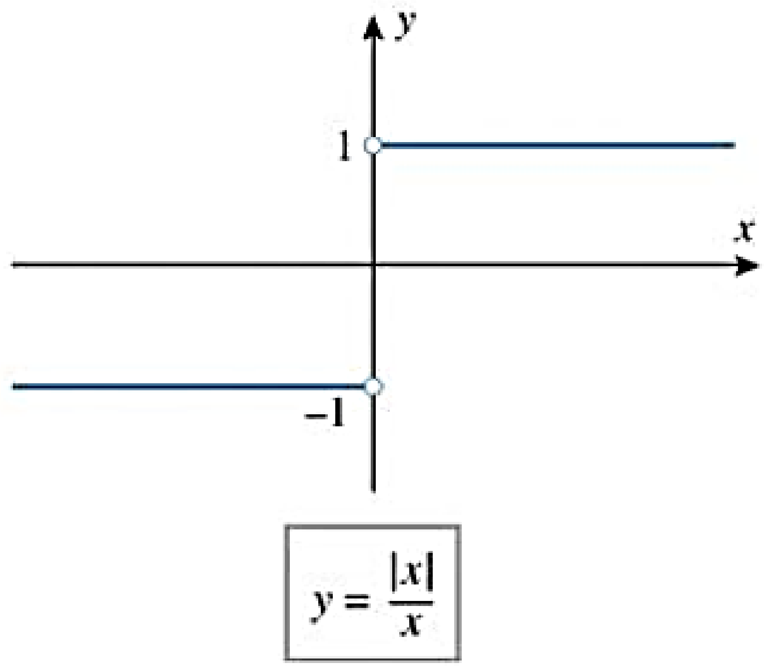
- Algumas funções exibem diferentes comportamentos distintos em cada um dos dois lados de um ponto a;
- Neste caso é necessário distinguir se x está próximo de a do lado esquerdo ou do lado direito, para examinar o limite

Limites laterais

- Exemplo: $f(\mathrm{x}) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

Limites laterais

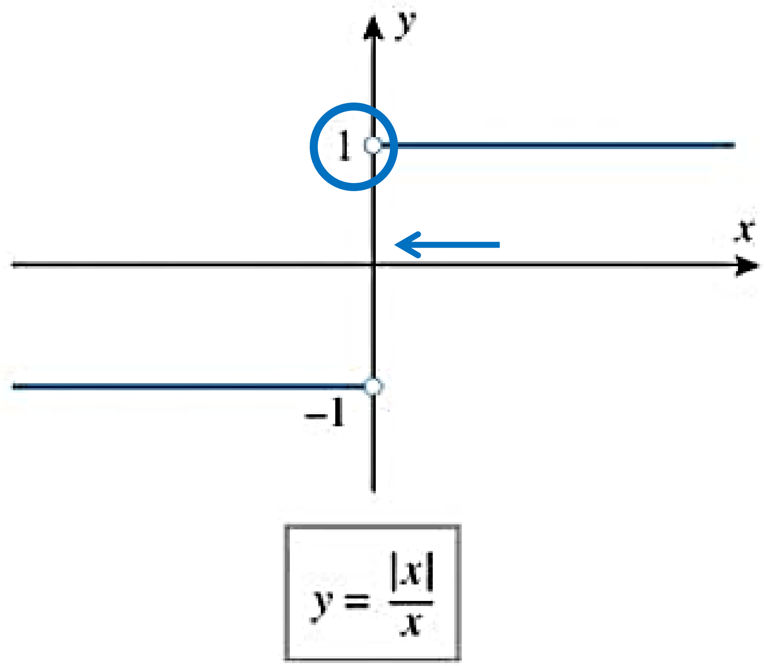
- Exemplo: $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites laterais

- Exemplo: $f(\mathrm{x}) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

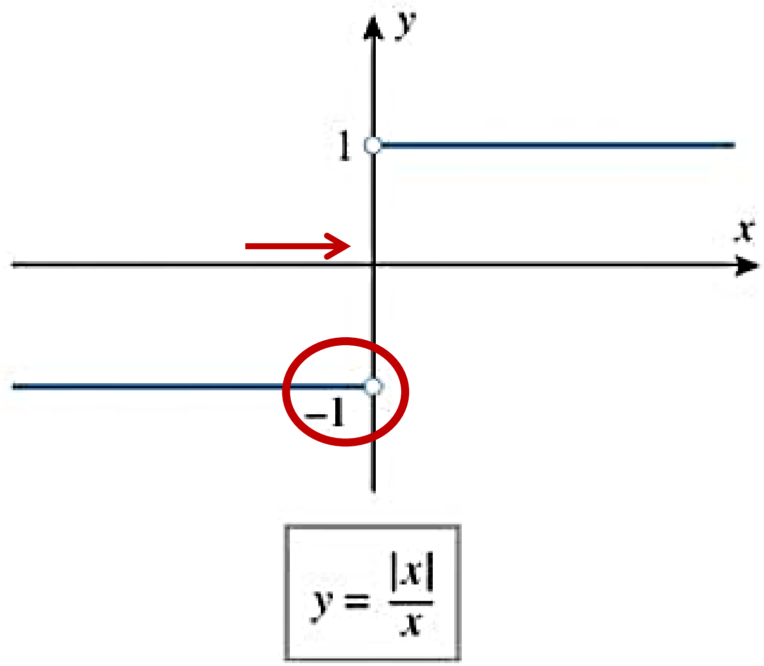


$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites laterais

- Exemplo: $f(\mathrm{x}) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



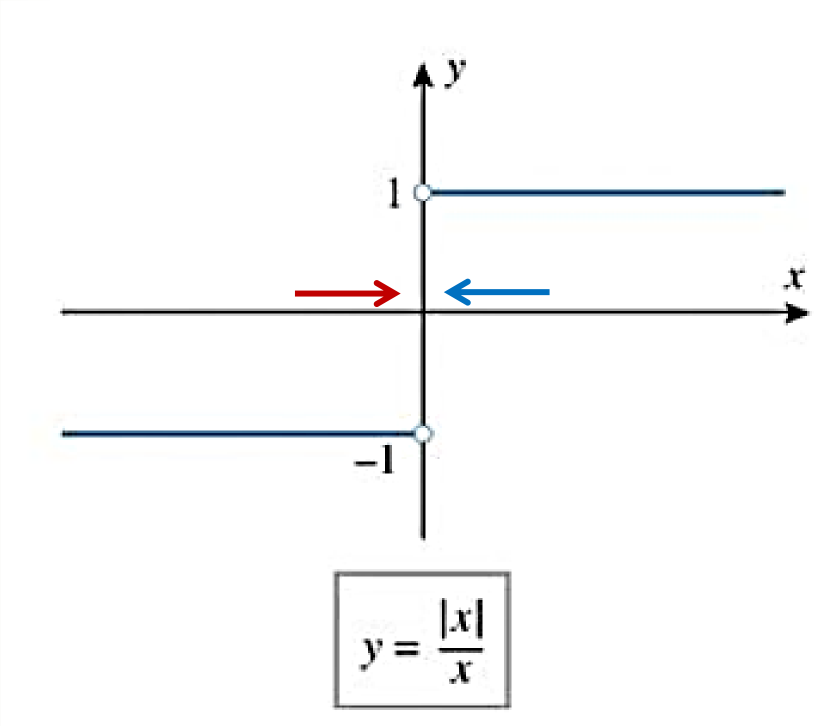
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites laterais

- Exemplo: $f(\mathrm{x}) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

"+" limite à direita

"-" limite à esquerda

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites laterais

1.1.2 LIMITES LATERAIS (PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas maiores do que a), então escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} f(x) = L} \tag{14}$$

e se os valores de $f(x)$ puderem ser tomados tão próximos de L quanto queiramos desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas menores do que a), então escrevemos

$$\boxed{\lim_{x \to a^-} f(x) = L} \tag{15}$$

A expressão (14) é lida como "L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela direita" ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a pela direita". Analogamente, a expressão (15) é lida como "L é o limite de $f(x)$ com x tendendo a a pela esquerda" ou "$f(x)$ tende a L quando x tende a a pela esquerda".

Relação entre limites laterais e bilaterais

- Não há garantia de que uma função tenha um limite bilateral em um ponto;
- Os valores de $f(\mathrm{x})$ podem não se aproximar de um único número real L quando x tende a a;
- Nesse caso dizemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \textit{não existe}$$

Relação entre limites laterais e bilaterais

- Para que exista o limite bilateral, os valores de $f(x)$ devem tender a algum número real L quando x tende a a;
- Esse número real L deve ser o mesmo, independente de x tender a a pela esquerda ou pela direita.
- O que sugere:

Relação entre limites laterais e bilaterais

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se e somente se:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = L = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

Relação entre limites laterais e bilaterais

No exemplo: $f(x) = \frac{|x|}{x}$

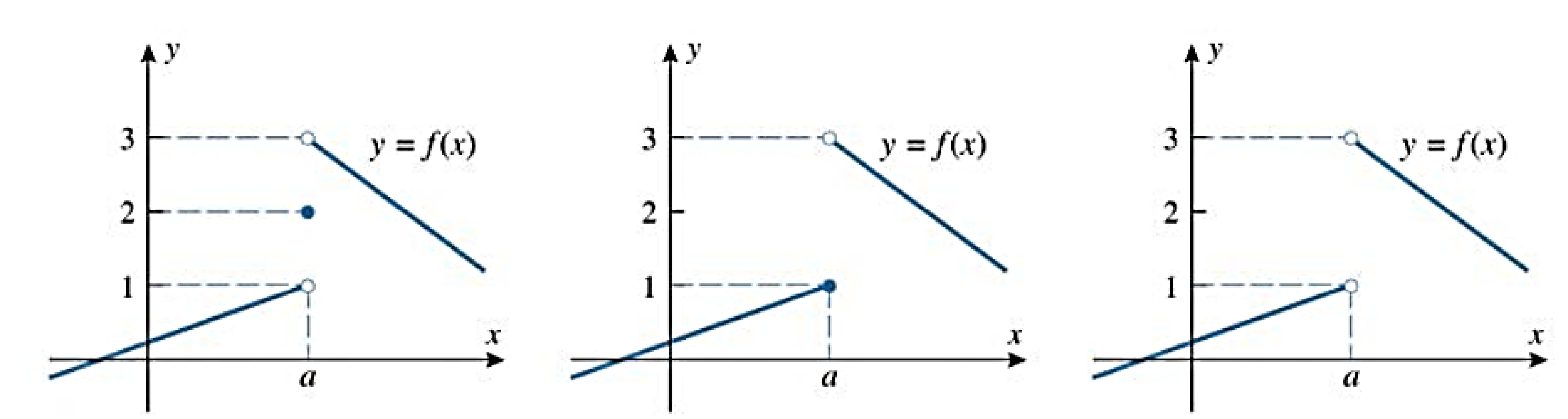
Não existe o limite porque:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Os limites laterais são diferentes!

Exemplo 5

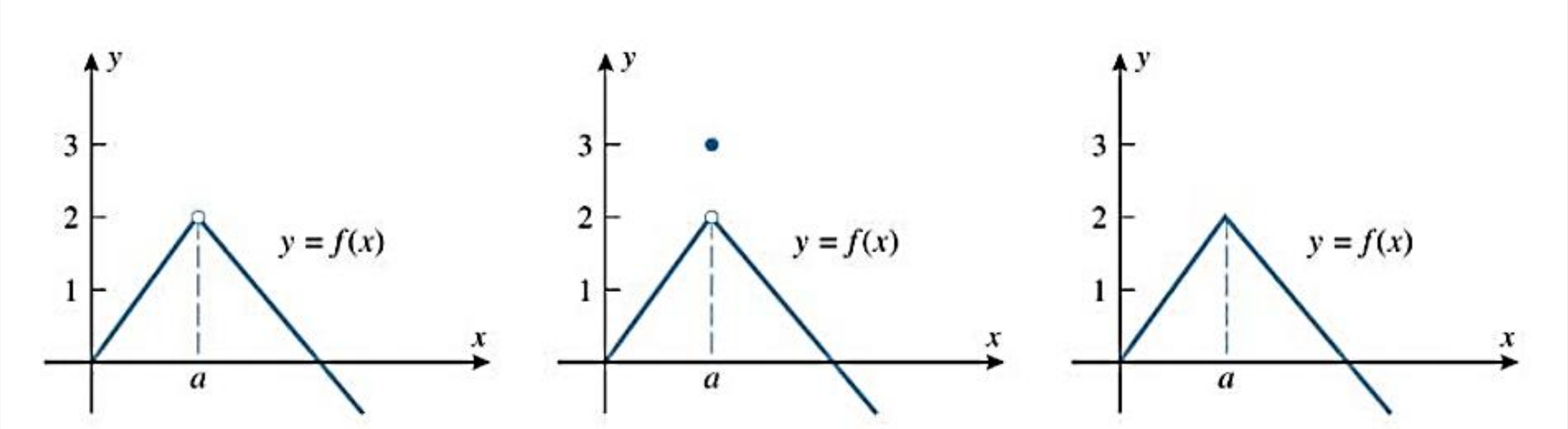
Encontrar os limites da Figura 1.1.13



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 6

Encontrar os limites da Figura 1.1.14



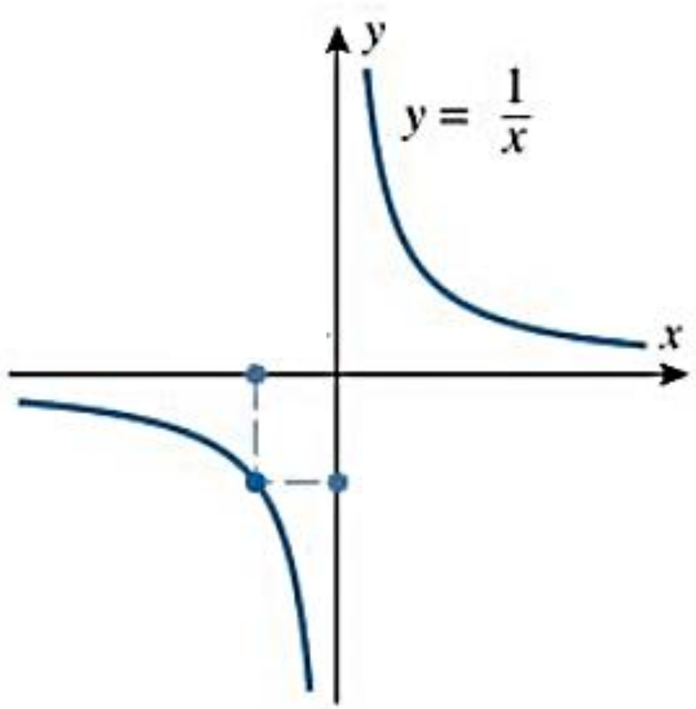
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites infinitos

- Algumas vezes, os limites laterais e bilaterais não existem porque os valores da função crescem ou decrescem indefinidamente;

Exemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$

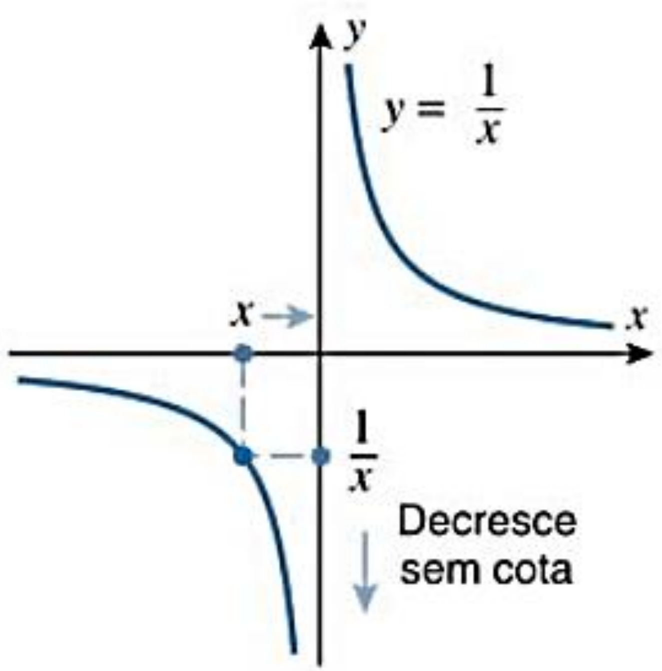
Quando $x \to 0$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites infinitos

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



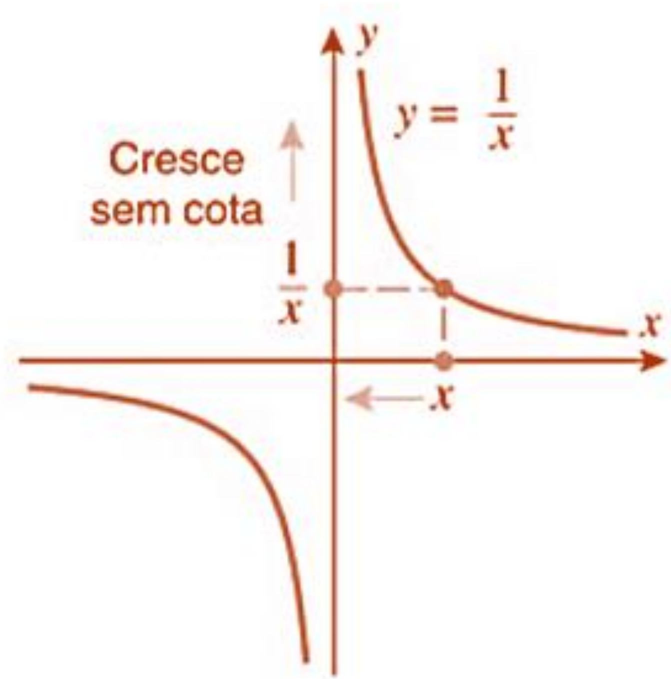
x	−1	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	0
$\frac{1}{x}$	−1	−10	−100	−1.000	−10.000	

Lado esquerdo

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites infinitos

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



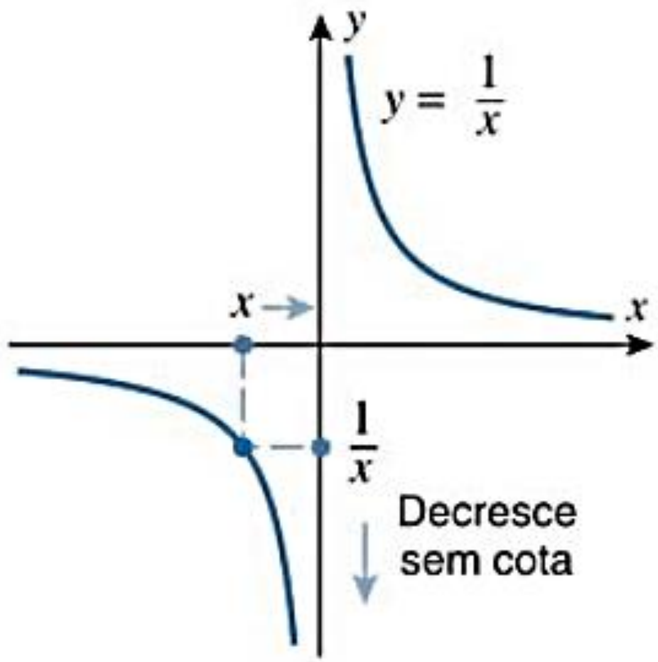
0	0,0001	0,001	0,01	0,1	1
	10.000	1.000	100	10	1

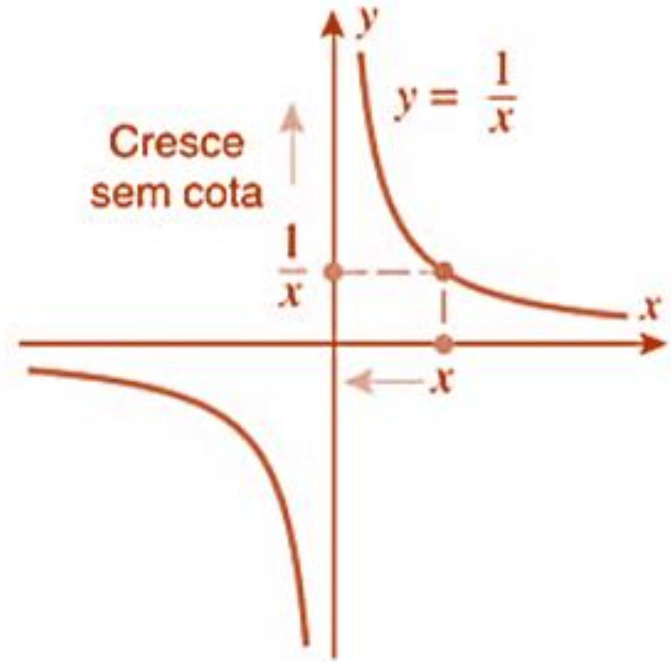
Lado direito

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites infinitos

$$f(x) = \frac{1}{x}$$





x	-1	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	0	$0,0001$	$0,001$	$0,01$	$0,1$	1
$\frac{1}{x}$	-1	-10	-100	-1.000	-10.000		10.000	1.000	100	10	1

Lado esquerdo

Lado direito

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Limites infinitos

1.1.4 LIMITES INFINITOS (PONTO DE VISTA INFORMAL) As expressões

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

significam que $f(x)$ cresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Analogamente, as expressões

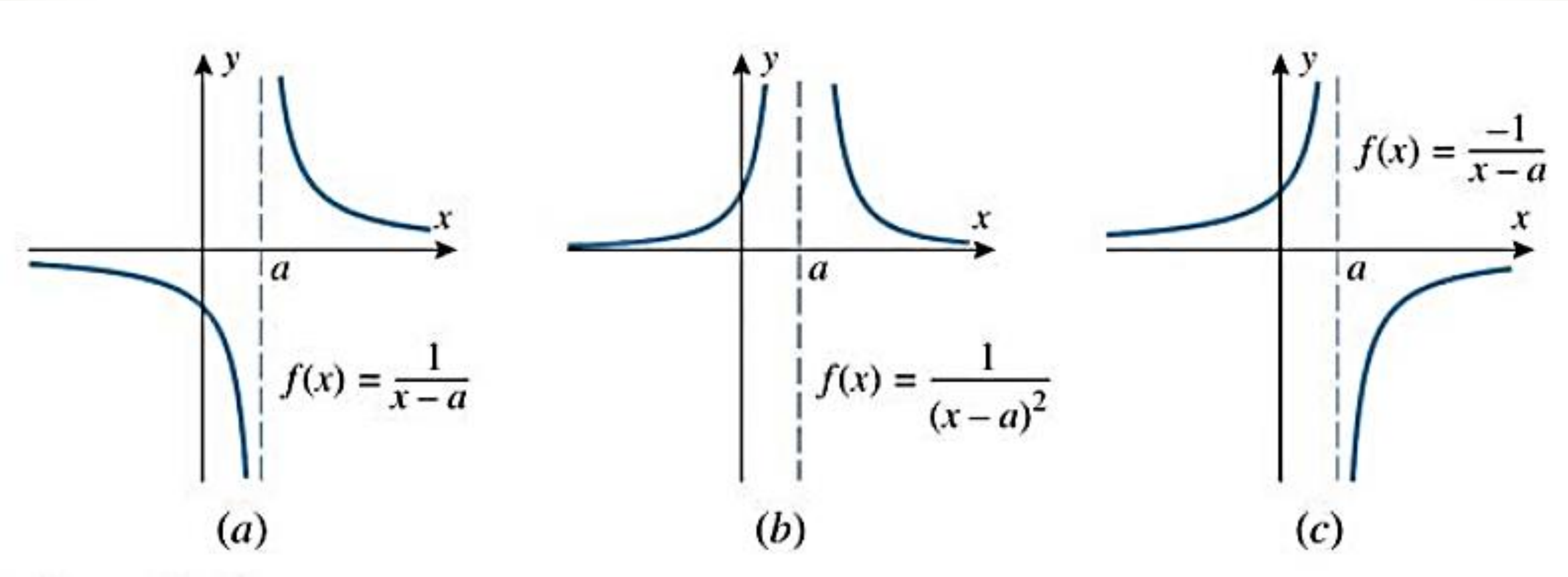
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

significam que $f(x)$ decresce sem cota quando x tende a a pela esquerda ou pela direita, respectivamente. Se ambas são verdadeiras, então escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Exemplo 7

Descrever os limites quando x tende a a na notação adequada.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

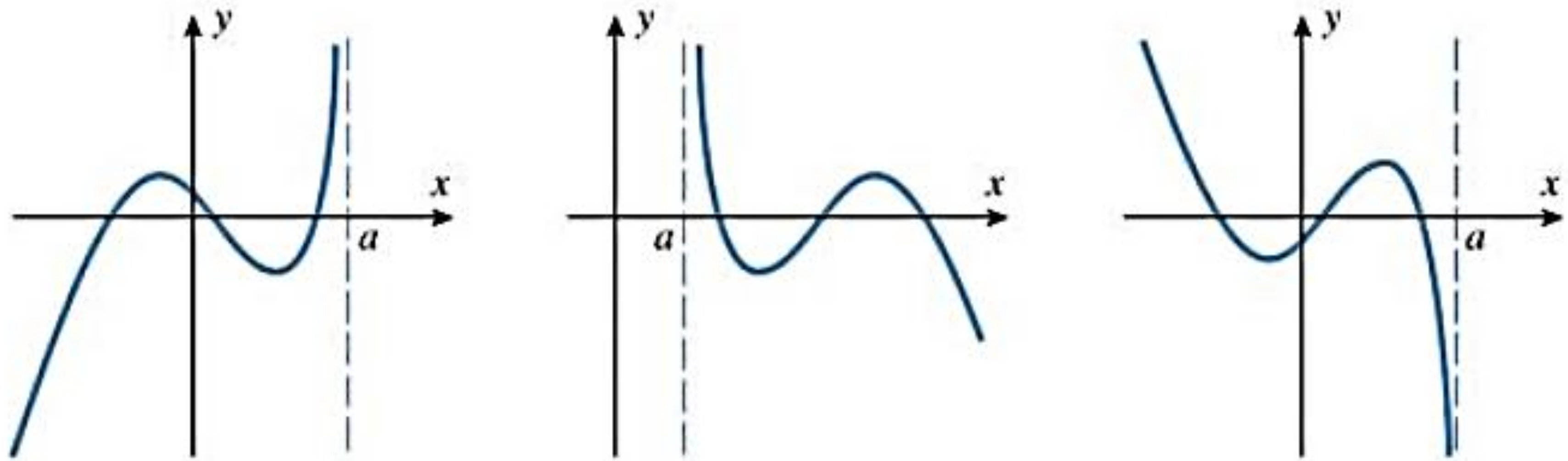
Assíntotas verticais

- O gráfico de $y = f(\mathrm{a})$ pode subir ou descer sem cota, indefinidamente, ao mesmo tempo que se aproxima de uma reta vertical $x = a$;
- Nesse caso dizemos que a função f apresenta um comportamento assintótico em $x = a$.

Assíntota (do gr. *Asymptotos*):

"que não pode coincidir"

Assíntotas verticais em $x = a$

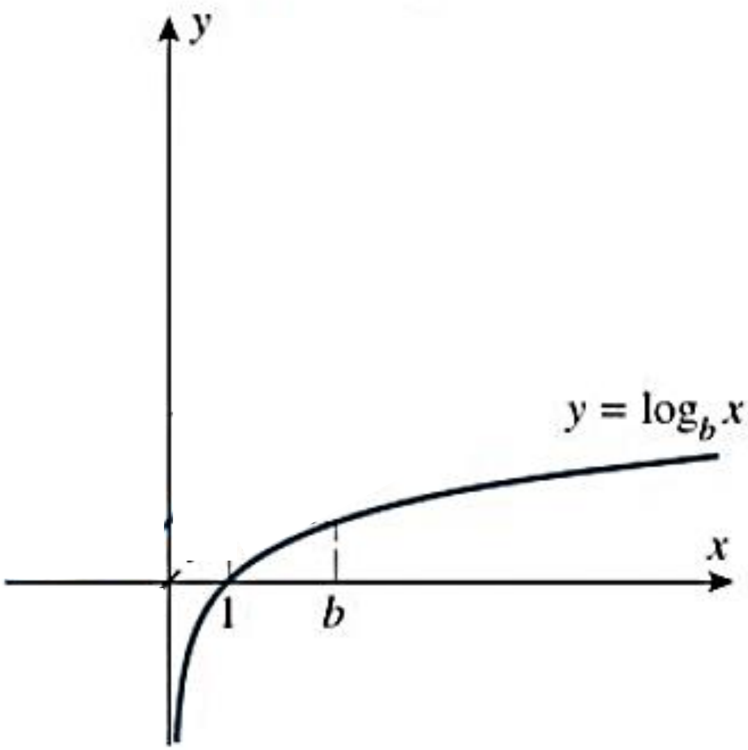


$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Exemplo 8

Função logarítmica: $y = \log_b x \qquad b > 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_b x = -\infty$$



Não Existe o Limite!

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Para depois desta aula:

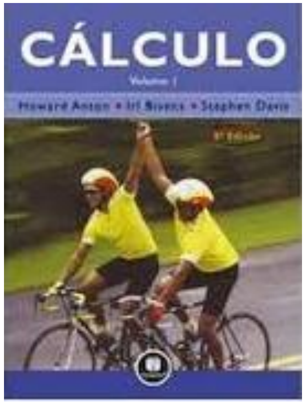
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

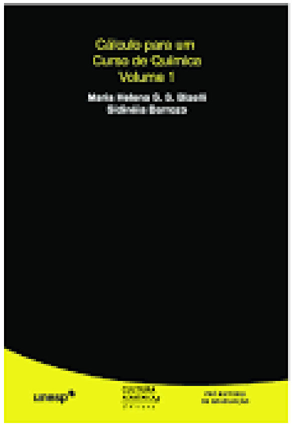
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br