

Capítulo 8 - Cônicas

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

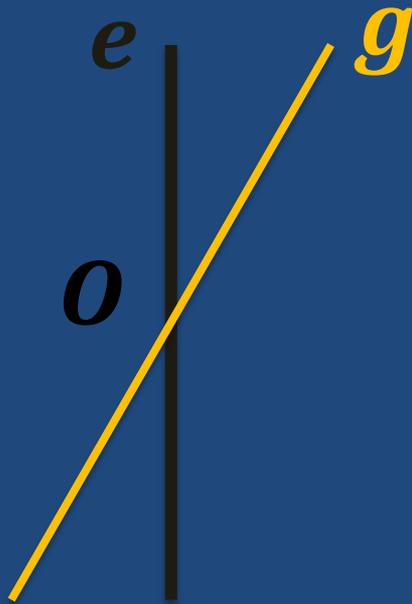
Aula 1 – Introdução

Cônicas

- Curvas planas que se caracterizam pelas formas da parábola, elipse, círculo e hipérbole;
- Aplicações:
 - Reflexão de ondas (mecânicas e eletromagnéticas);
 - Movimento de projéteis;
 - Astronomia.

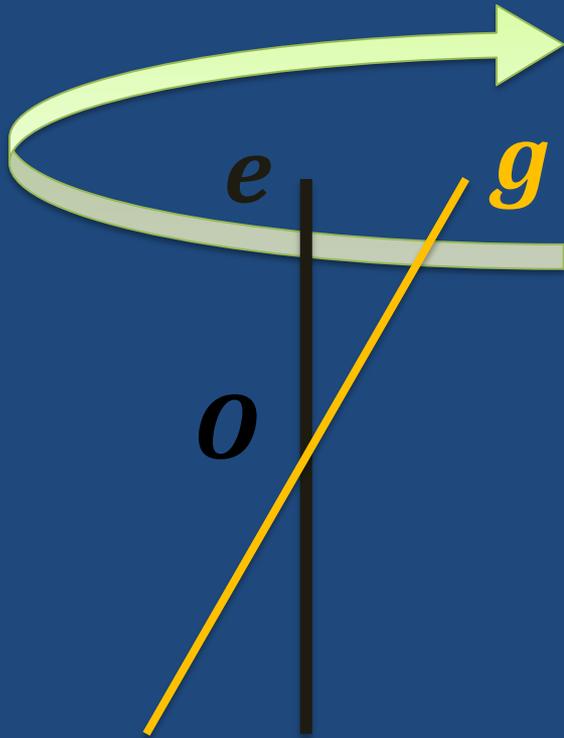
Cônicas

Sejam duas retas e (eixo) e g (geratriz), não perpendiculares e concorrentes em O .



Cônicas

Sejam duas retas e (eixo) e g (geratriz), não perpendiculares e concorrentes em O .



Cônicas

Sejam duas retas e (eixo) e g (geratriz), não perpendiculares e concorrentes em O .

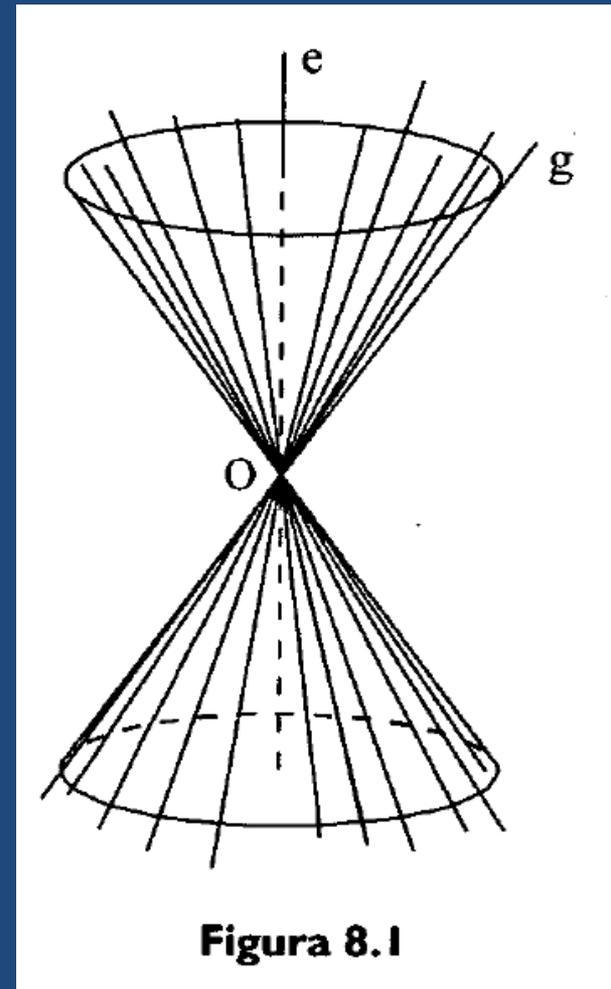
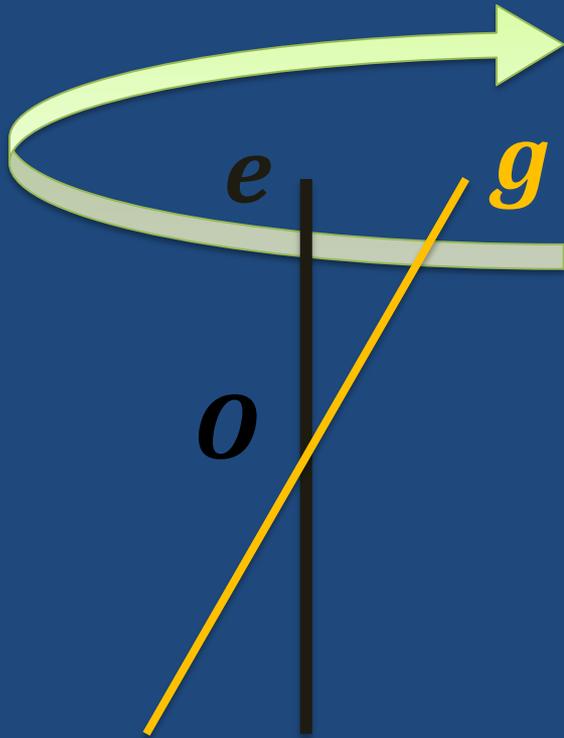
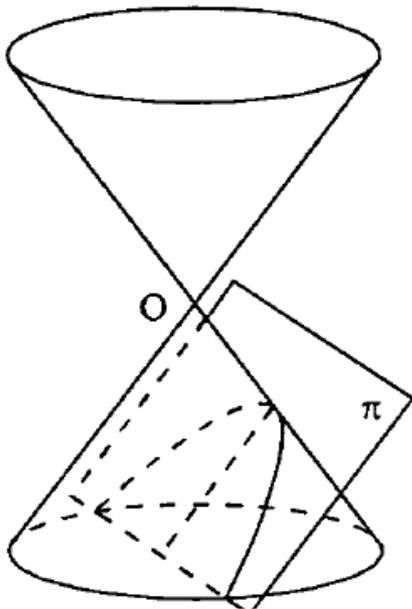


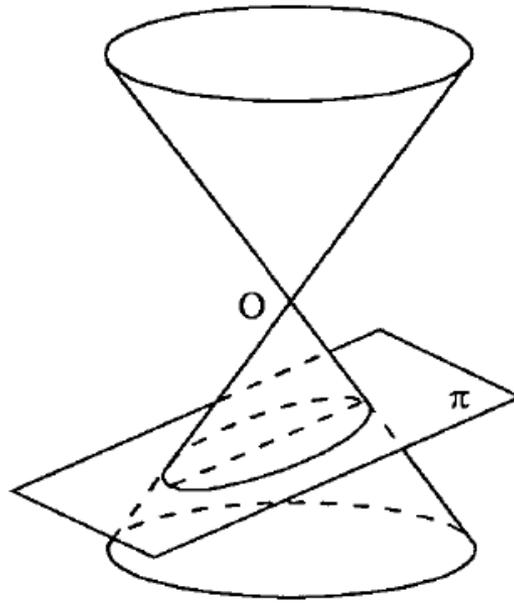
Figura 8.1

Seções cônicas

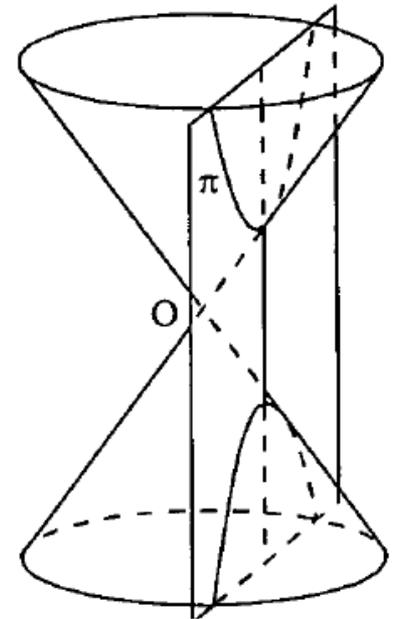
- ✓ Seccionando a superfície cônica por um plano π resultarão seções características.
- ✓ O conjunto de pontos do plano que interceptam a superfície é chamado cônica.



Parábola



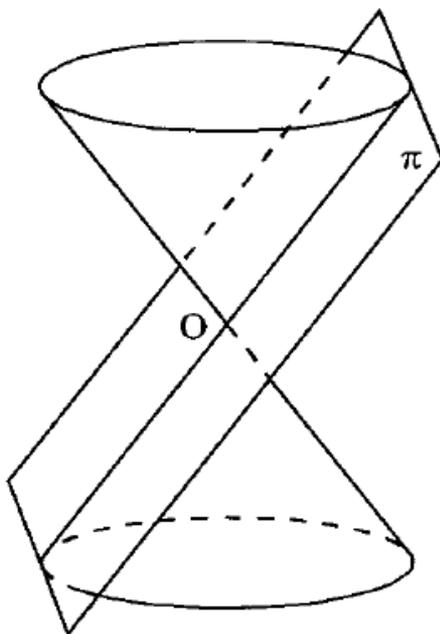
Elipse



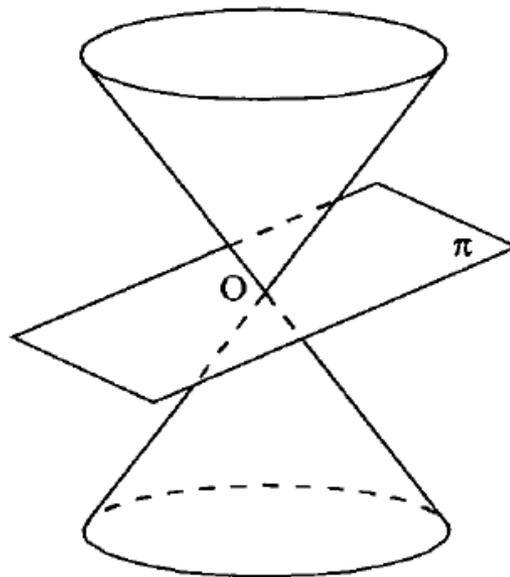
Hipérbole

Seções cônicas degeneradas

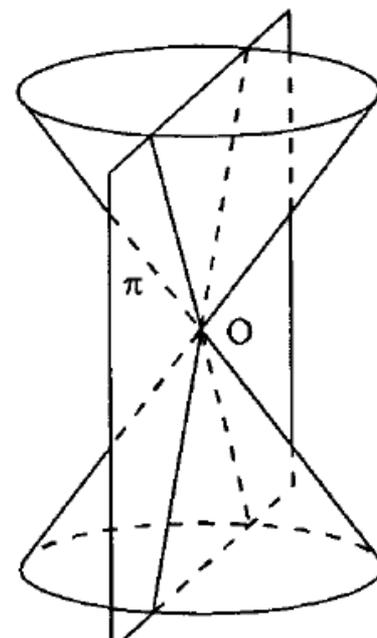
- ✓ Se os planos secantes forem transladados paralelamente até o vértice, obtém-se cônicas degeneradas.



Reta



Ponto

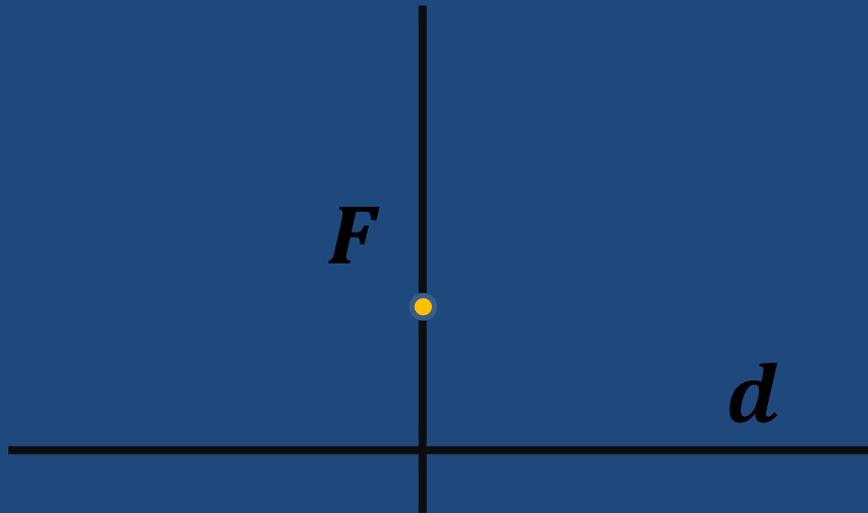


Duas Retas

Parábola

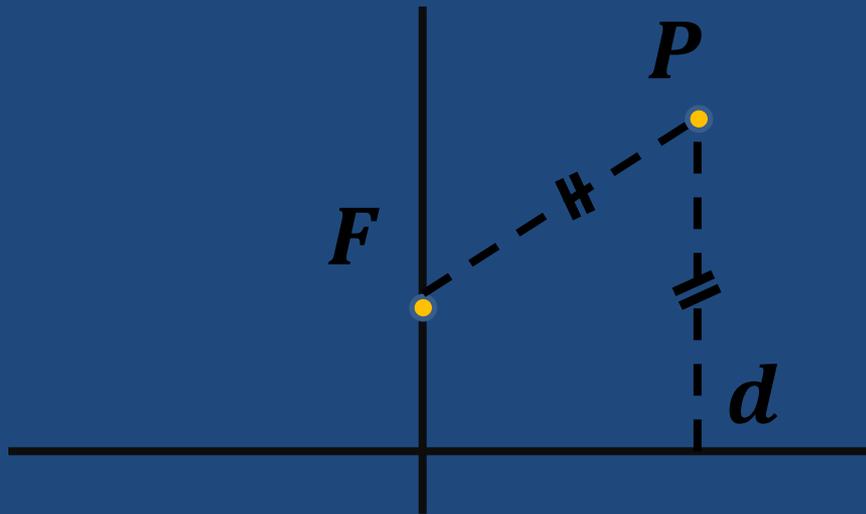
Parábola

Seja uma reta d contida em um plano representado pela tela (ou papel) e um ponto F não pertencente a d .



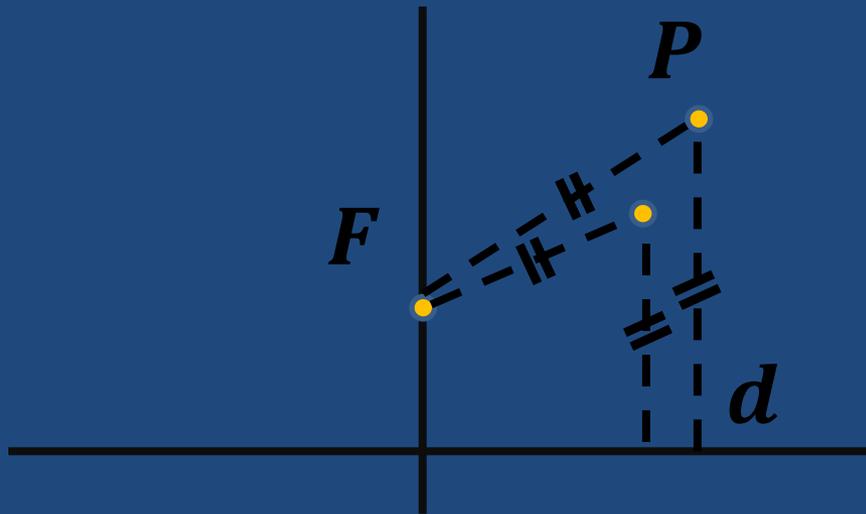
Parábola

Seja uma reta d contida em um plano representado pela tela (ou papel) e um ponto F não pertencente a d .



Parábola

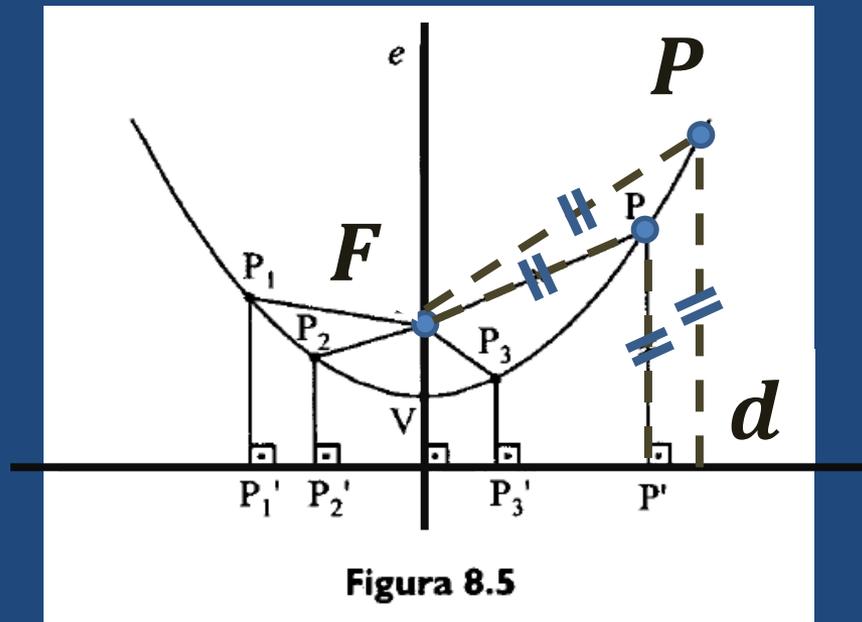
Seja uma reta d contida em um plano representado pela tela (ou papel) e um ponto F não pertencente a d .



Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d .

Parábola

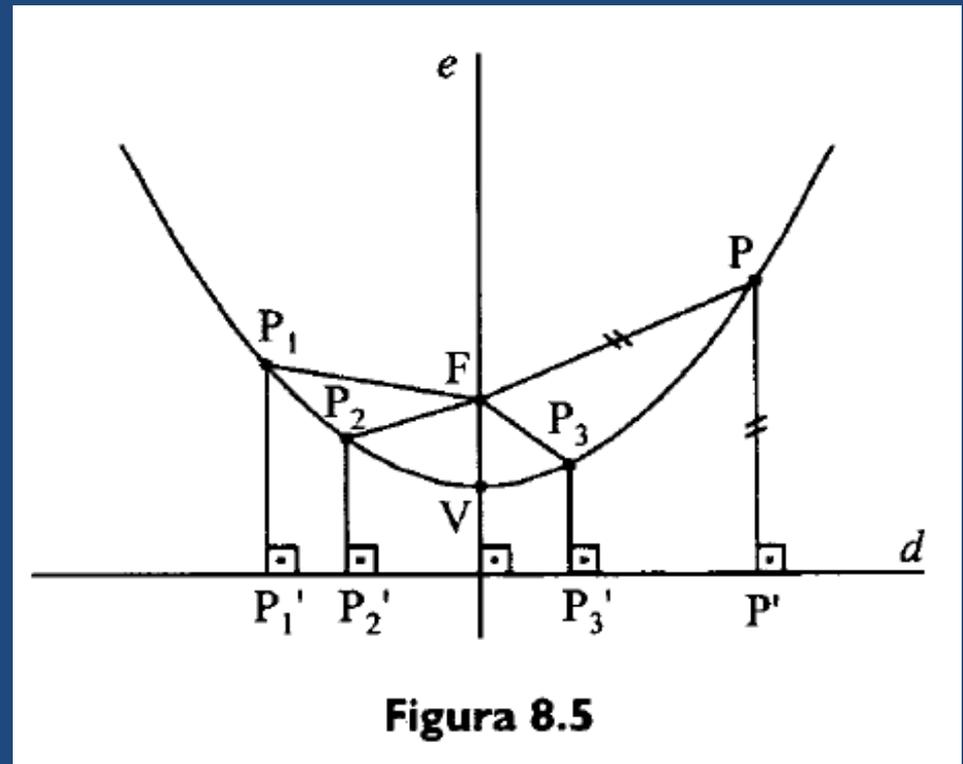
Seja uma reta d contida em um plano representado pela tela (ou papel) e um ponto F não pertencente a d .



Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de F e d .

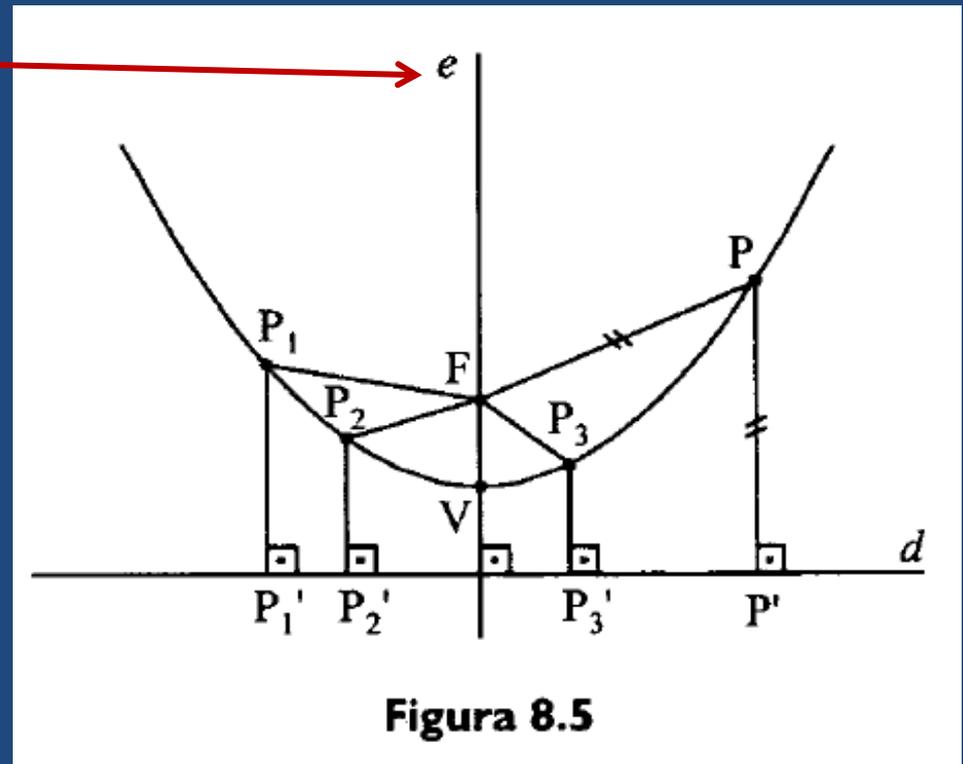
$$d(P, F) = d(P, d)$$

Elementos da Parábola



Elementos da Parábola

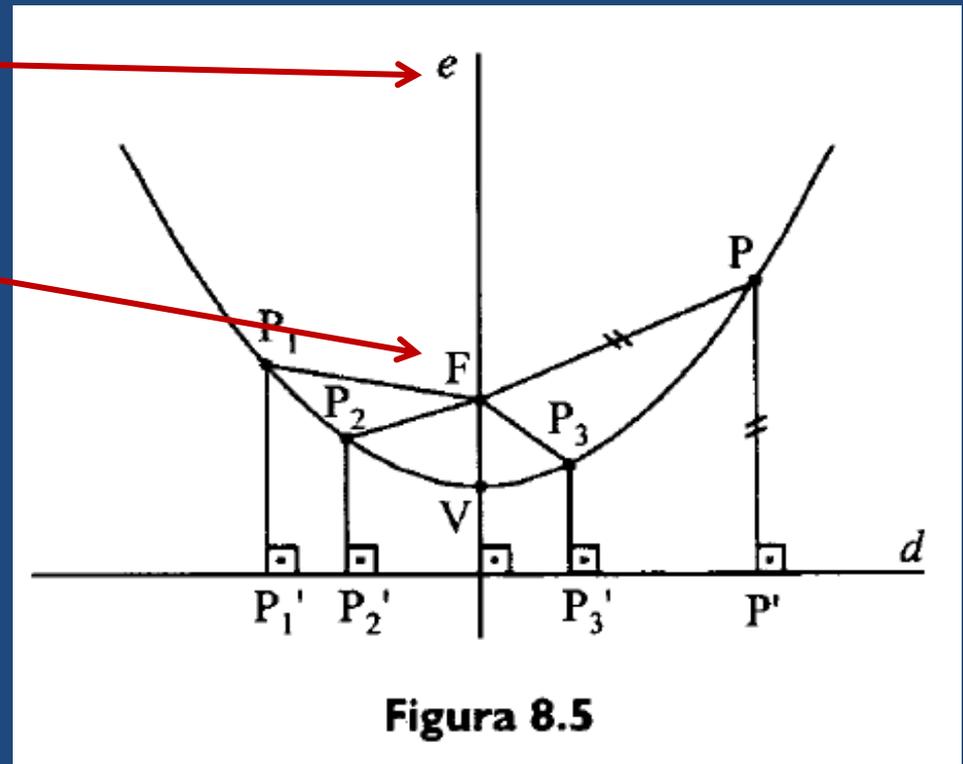
- Eixo de simetria:
reta e



Elementos da Parábola

➤ **Eixo de simetria:**
reta e

➤ **Foco:** ponto F

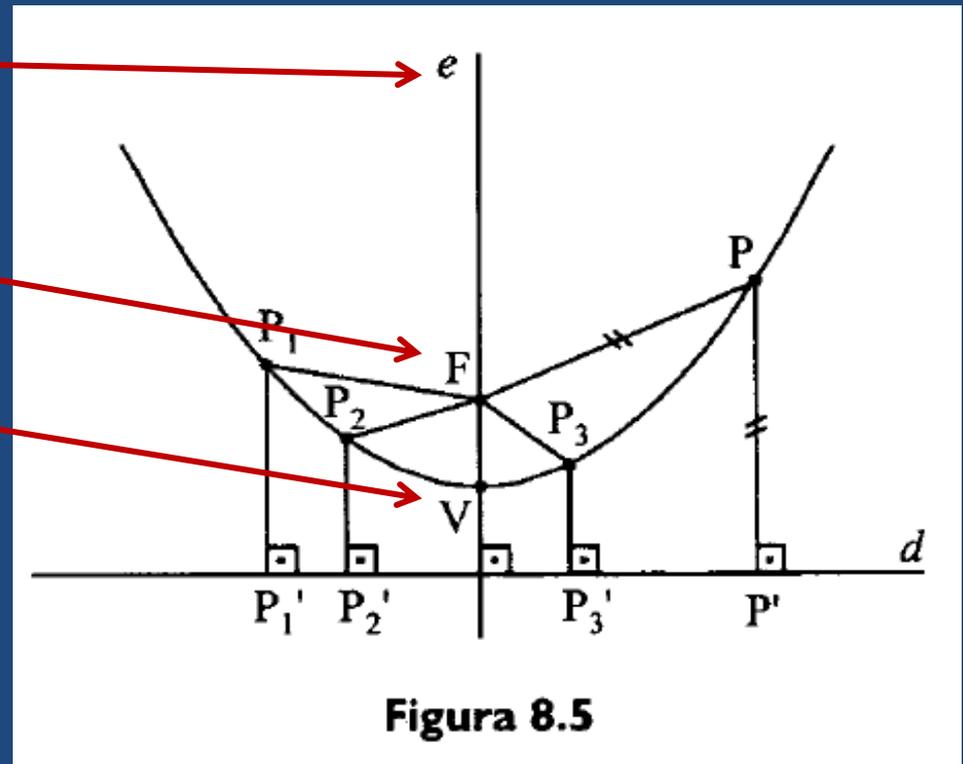


Elementos da Parábola

➤ **Eixo de simetria:**
reta e

➤ **Foco:** ponto F

➤ **Vértice:** ponto V



Elementos da Parábola

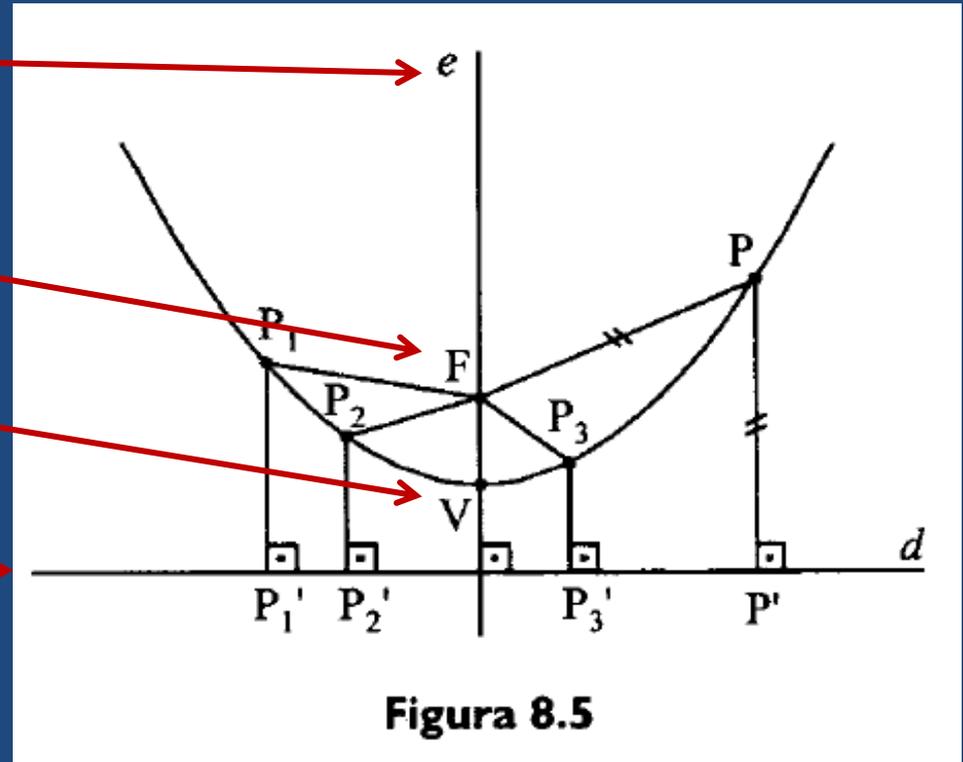
➤ **Eixo de simetria:**
reta e

➤ **Foco:** ponto F

➤ **Vértice:** ponto V

➤ **Diretriz:** reta d

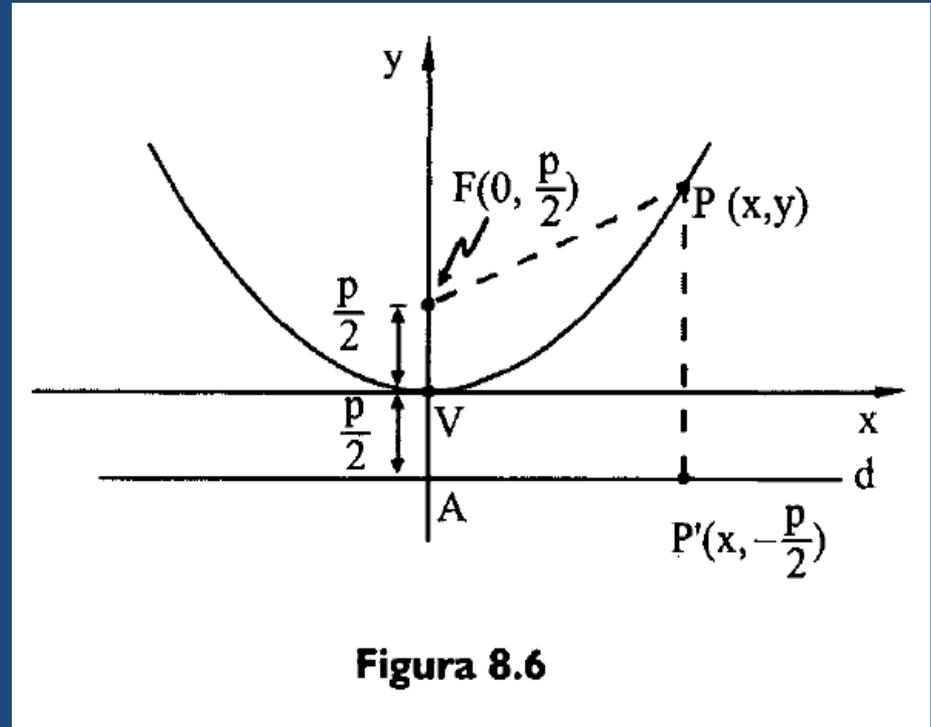
➤ **Parâmetro:** p



Equação reduzida da Parábola

1º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo y .

Foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ $p \in \mathbb{R}$



Equação reduzida da Parábola

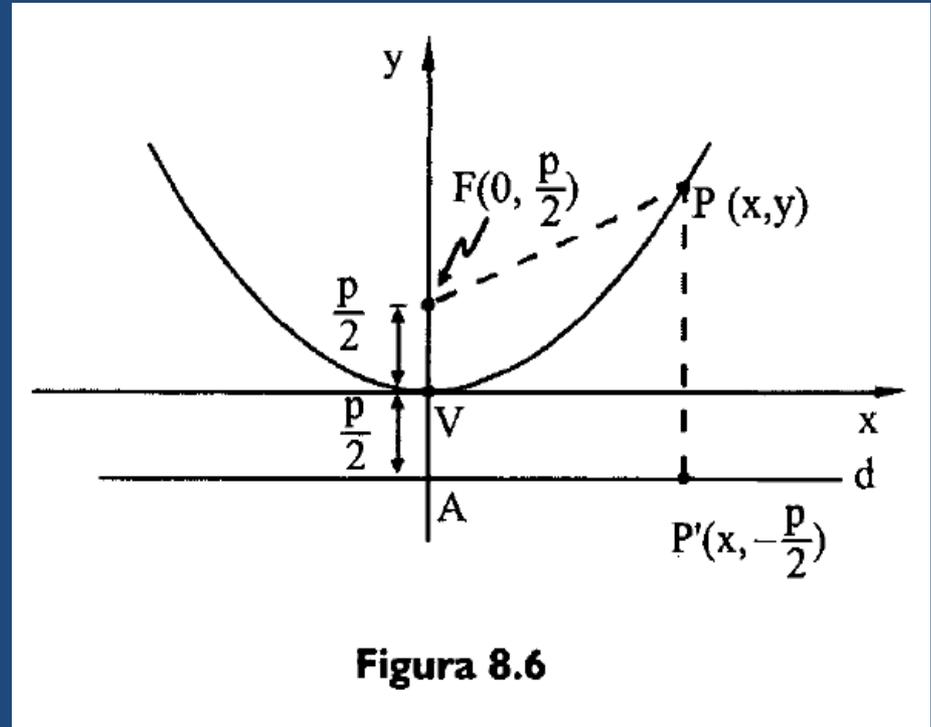
1º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo y .

Foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ $p \in \mathbb{R}$

Pela definição:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{PP'}| \rightarrow \left| \left(x - 0, y - \frac{p}{2}\right) \right| = \left| \left(x - x, y + \frac{p}{2}\right) \right|$$



Equação reduzida da Parábola

1º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo y .

Foco: $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ $p \in \mathbb{R}$

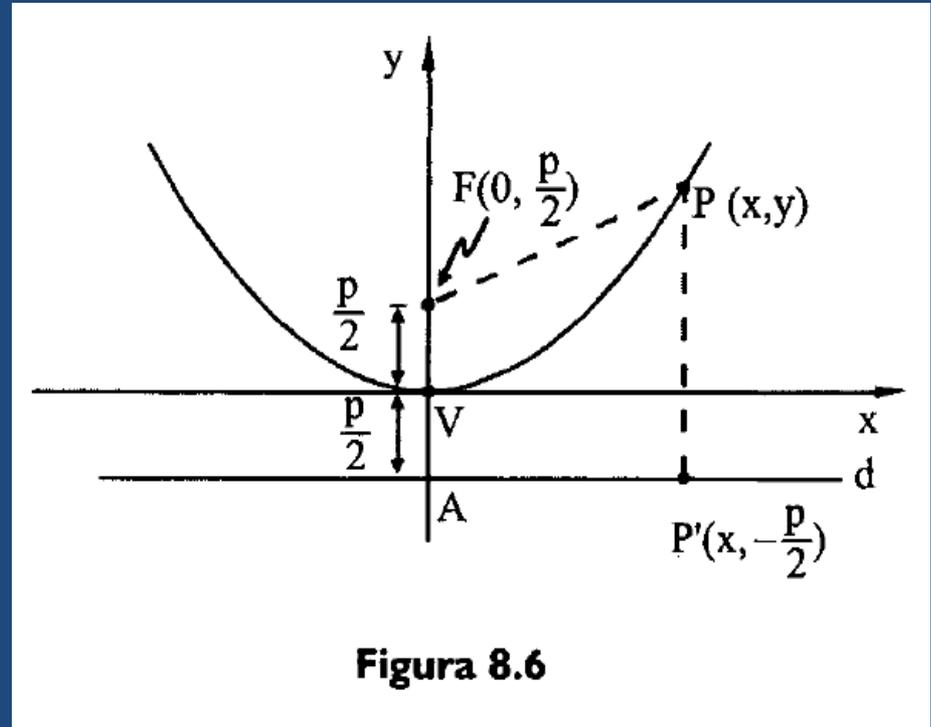
Pela definição:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{PP'}| \rightarrow \left| \left(x - 0, y - \frac{p}{2}\right) \right| = \left| \left(x - x, y + \frac{p}{2}\right) \right|$$

$$\rightarrow x^2 = 2py$$

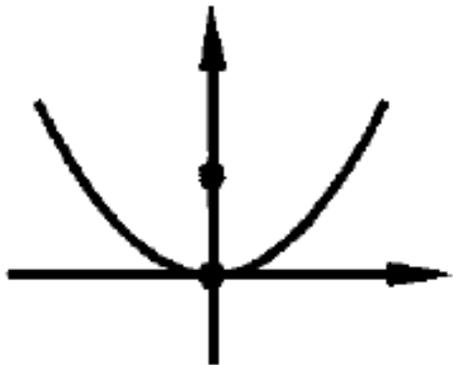
**Equação reduzida
da Parábola**



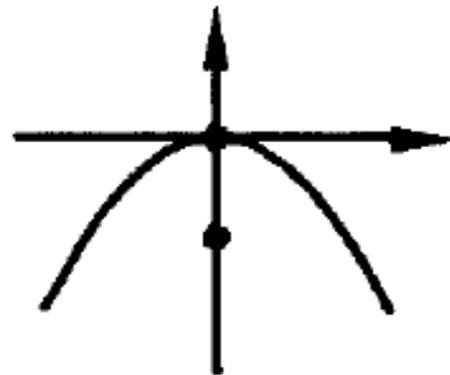
Equação reduzida da Parábola

1º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo y .

Como: $x^2 = 2py$ $py > 0$ (*sempre*)



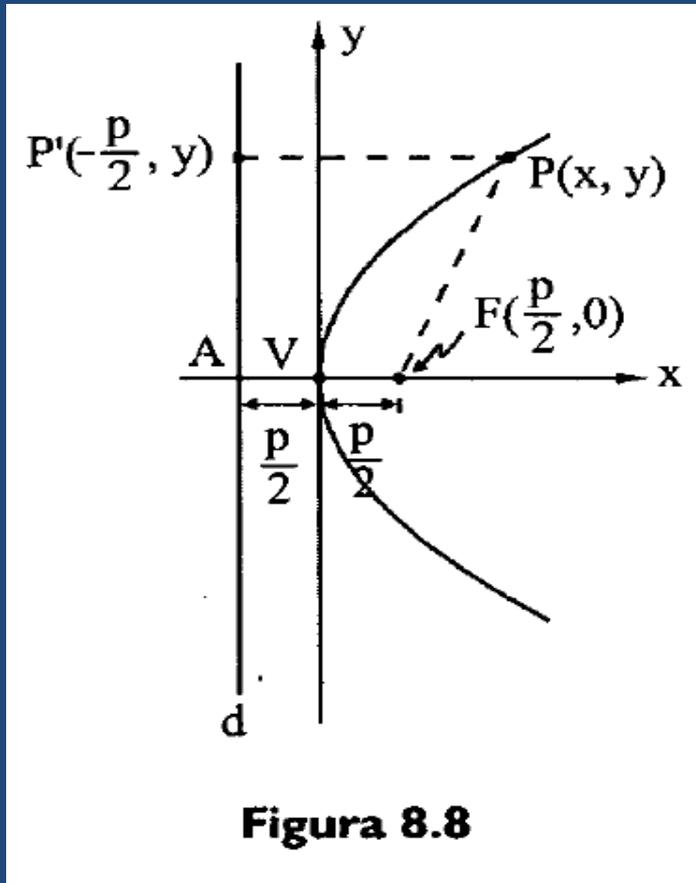
$y > 0$
 $p > 0$



$y < 0$
 $p < 0$

Figura 8.7

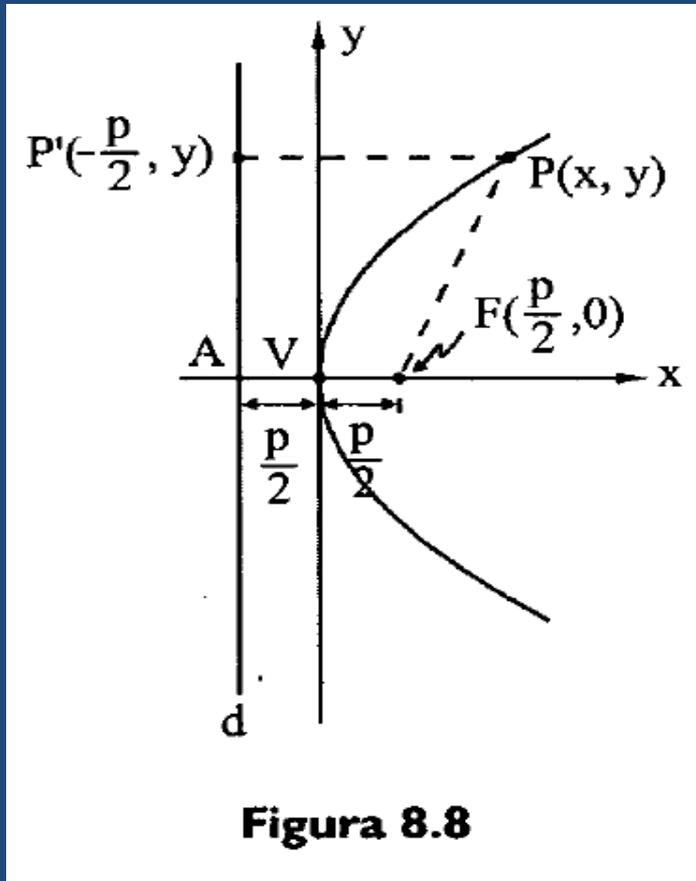
Equação reduzida da Parábola



2º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo x .

Foco: **$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$** $p \in \mathbb{R}$

Equação reduzida da Parábola



2º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo x .

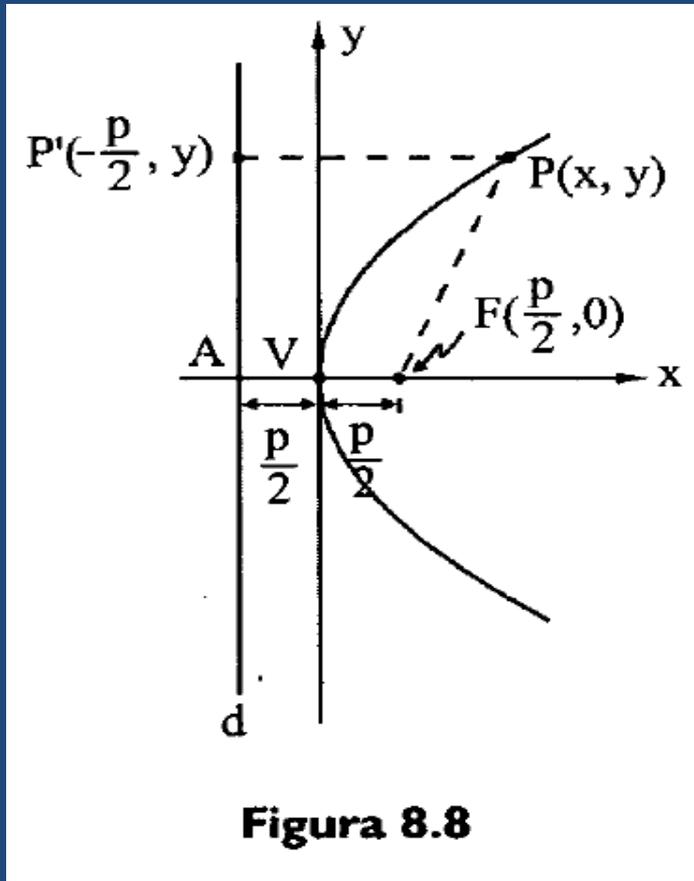
Foco: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $p \in \mathbb{R}$

Pela definição:

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{PP'}|$$

Fazer como exercício ...

Equação reduzida da Parábola



2º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo x .

Foco: $\mathbf{F}\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ $p \in \mathbb{R}$

Pela definição:

$$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{PP'}|$$

Fazer como exercício ...

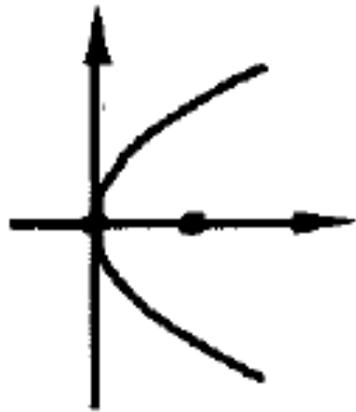
$$y^2 = 2px$$

**Equação reduzida
da Parábola**

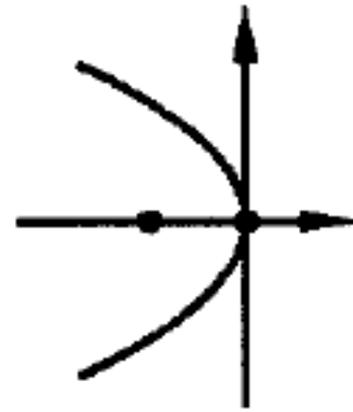
Equação reduzida da Parábola

2º Caso: Eixo de simetria coincide com eixo x .

Como: $y^2 = 2px$ $px > 0$ (*sempre*)



$$x > 0$$
$$p > 0$$



$$x < 0$$
$$p < 0$$

Figura 8.9

Exemplo 1

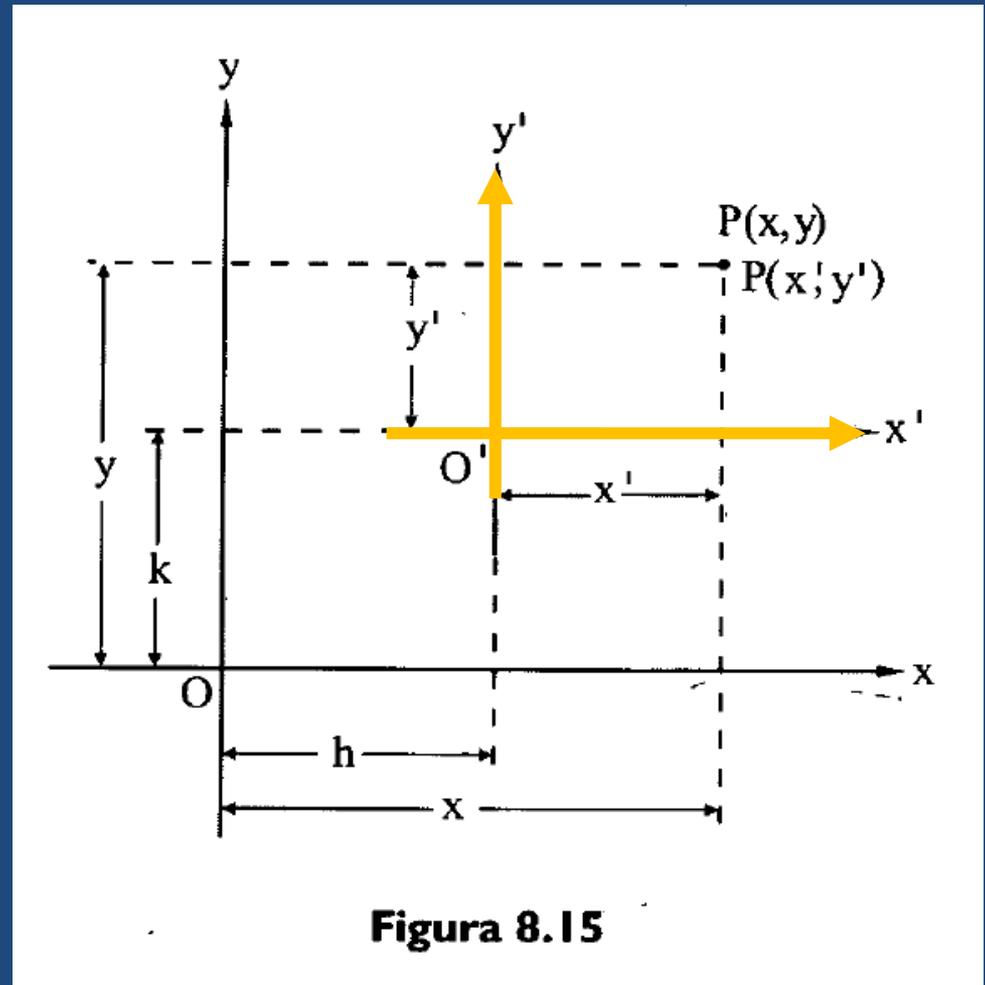
Uma parábola é definida pela equação reduzida

$x = -\frac{1}{2}y^2$. Encontre o foco, a equação da diretriz e

esboce o gráfico desta parábola. Resp.: $F\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $x = 1/2$

Translação de eixos

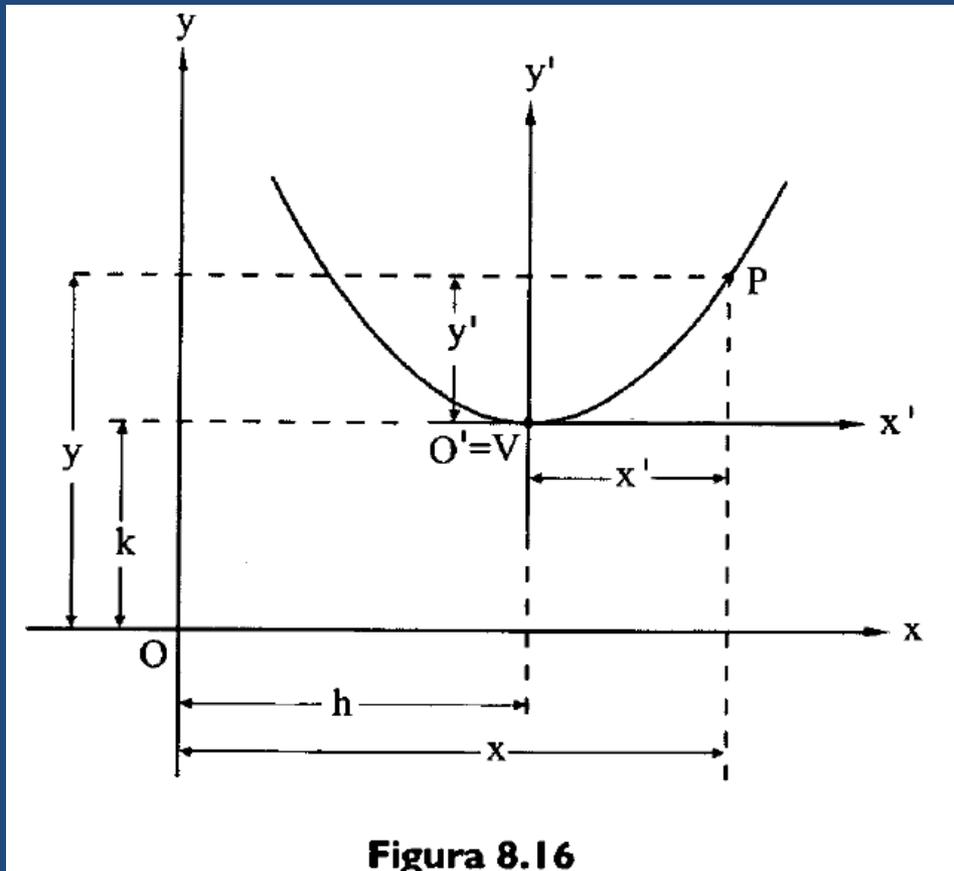
- Sejam dois planos xoy e o segundo $x'oy'$ em que a origem $O'(h, k)$ é medida em relação à origem $O(0,0)$.
- ox' e oy' tem a mesma direção de ox e oy , respectivamente.



Equação reduzida da Parábola

Caso 1: Eixo y' \parallel eixo y .

$$x'^2 = 2py' \rightarrow (x - h)^2 = 2p(y - k)$$



Equação reduzida da Parábola

Caso 2: Eixo x' \parallel eixo x .

$$y'^2 = 2px' \quad \rightarrow \quad (y - k)^2 = 2p(x - h)$$

Translação de eixos

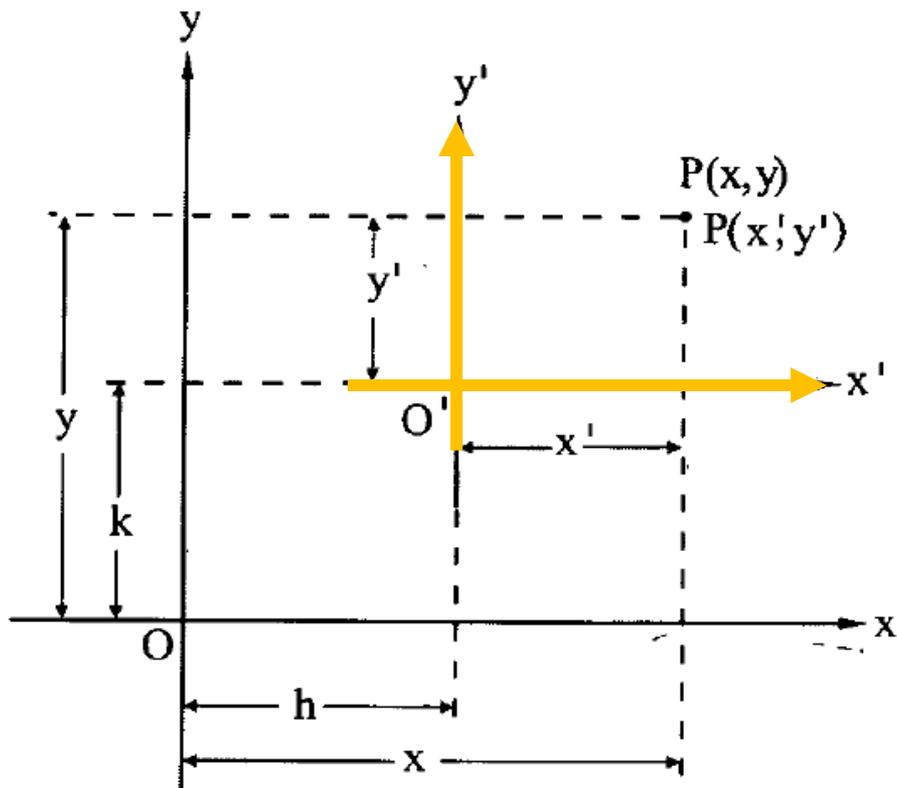


Figura 8.15

- $P(x, y)$ plano xOy ;
- $P(x', y')$ plano $x'Oy'$;
- Da figura:

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Relações de
transformação

Exemplo 2

$$\text{Resp.: } y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5/2$$

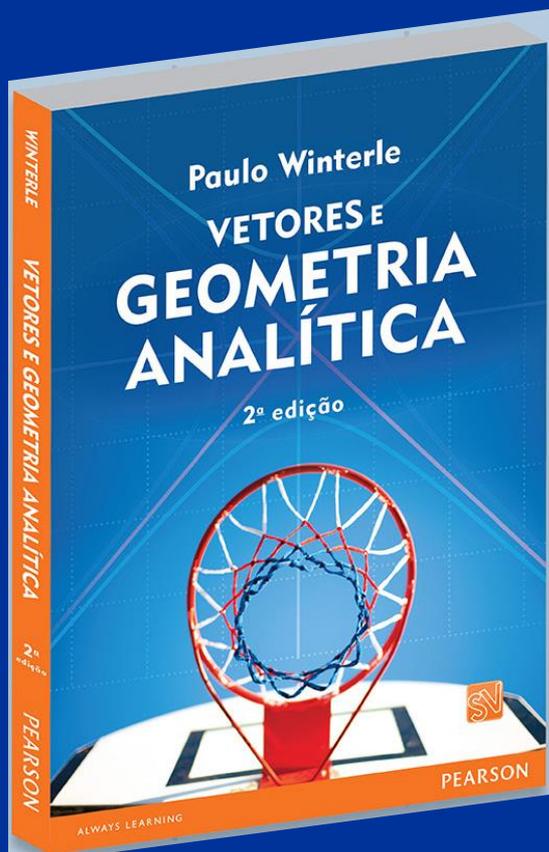
Determinar a equação da parábola de vértice $V(3, -2)$, com eixo paralelo ao eixo y e de parâmetro $p = 1$.

Exercício

Determinar a equação geral da parábola de vértice $V(4, 2)$, e foco $F(1,2)$.

Resp.: $y^2 - 4y + 12x - 44 = 0$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.