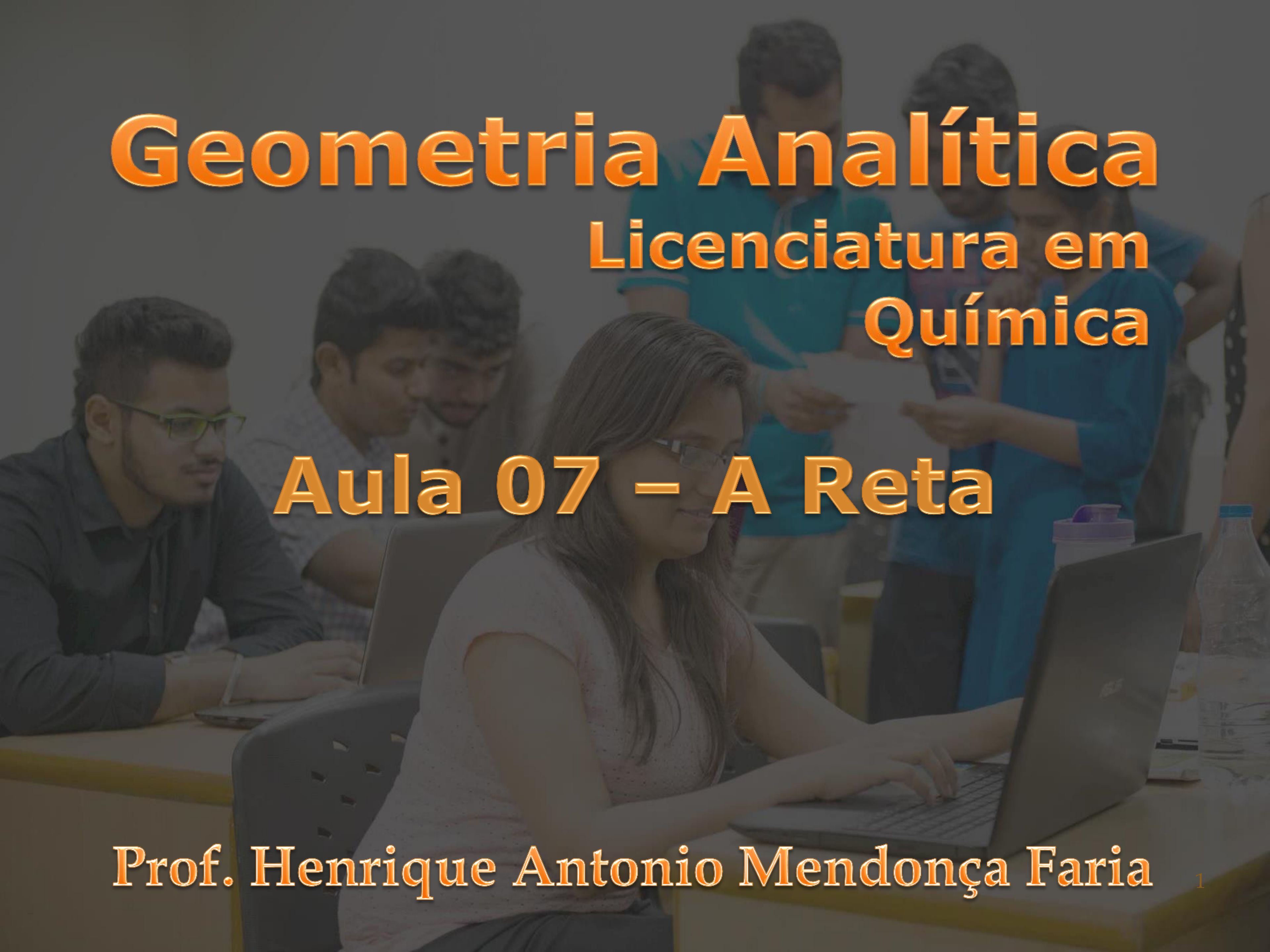


Geometria Analítica

Licenciatura em Química

Aula 07 – A Reta

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

Aula 1 - Retas

4.1 Equação vetorial da reta

Seja uma reta r que passa pelo ponto $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$ e tem direção de um vetor não nulo $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

Sendo $\boldsymbol{t}$ um número real, só existe uma reta que passa por A e é paralela a $\vec{\boldsymbol{v}}$.

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

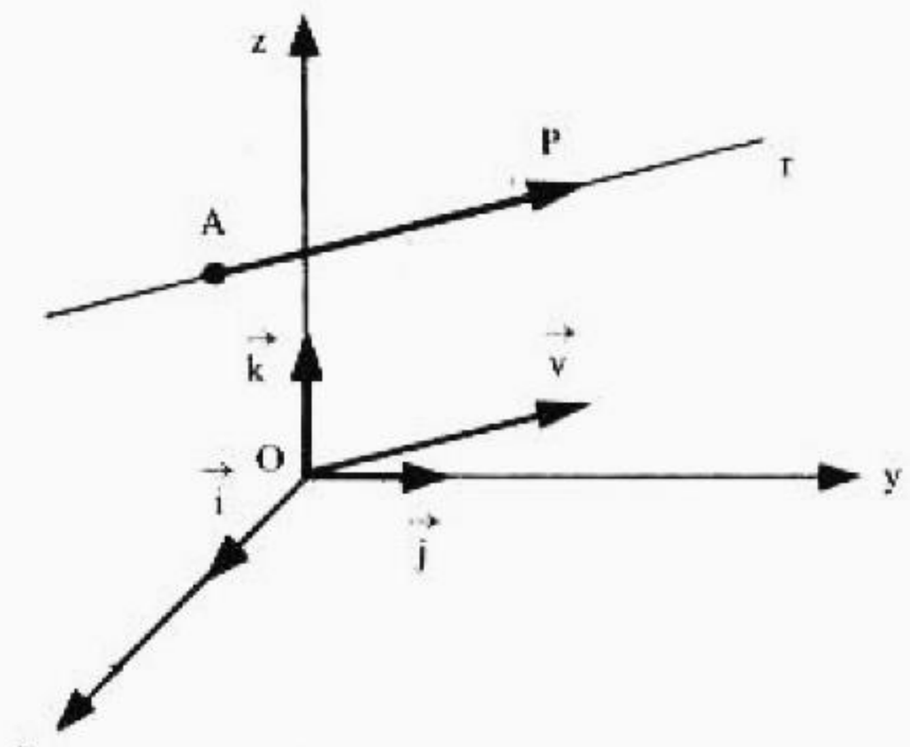


Figura 4.1

4.1 Equação vetorial da reta

Sendo: $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$, $\boldsymbol{P(x, y, z)}, \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(a, b, c)}$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$:

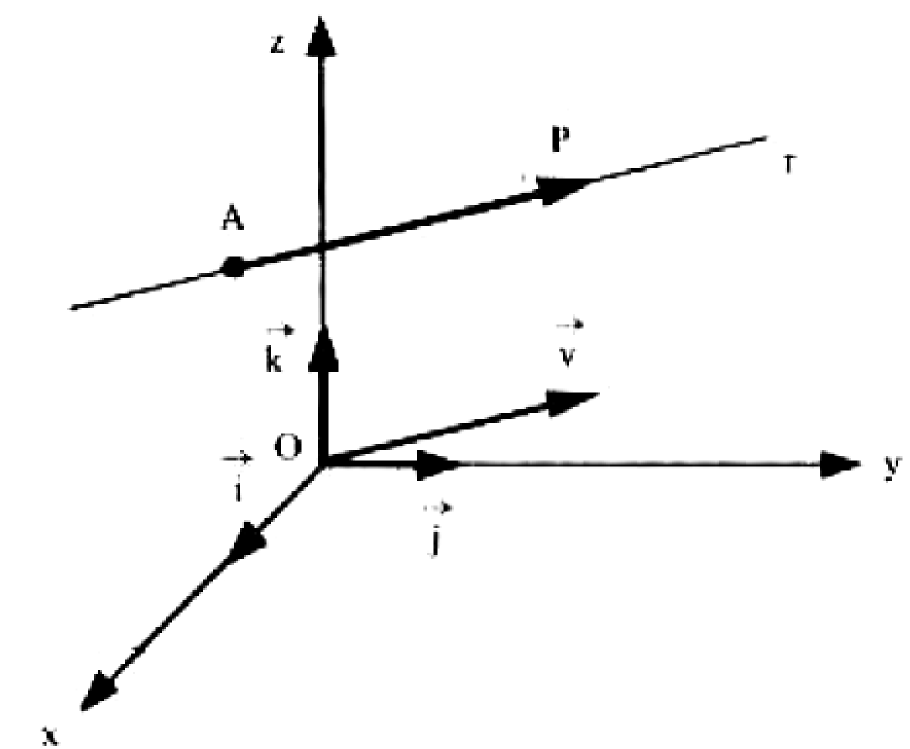


Figura 4.1

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$P = A + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

4.1 Equação vetorial da reta

Sendo: $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$, $\boldsymbol{P(x, y, z), \vec{v} = (a, b, c)}$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = t\vec{v}}$$

$$P - A = t\vec{v}$$

$$\boxed{P = A + t\vec{v}}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

Equações vetoriais da reta

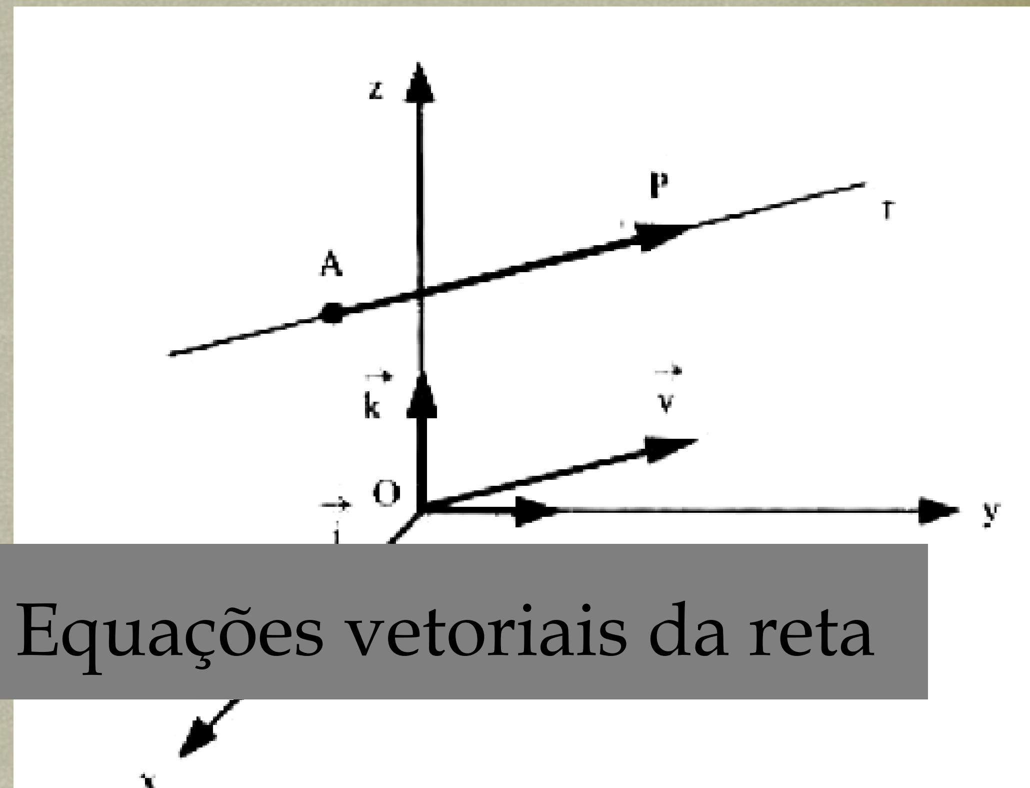


Figura 4.1

Exemplo 1

Obter a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(3,0,-5)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{2},\boldsymbol{2},-\boldsymbol{1})$.

Exercício em sala

Determinar a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(-2,3,-2)}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{3},\boldsymbol{0},\boldsymbol{2})$.

4.2 Equações paramétricas da reta

Sejam: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

4.2 Equações paramétricas da reta

Sejam: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

Da equação vetorial da reta tem-se:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Da igualdade de vetores:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Equações paramétricas da reta

Exemplo 2

Dados o ponto $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, -\mathbf{4})$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})$, pede-se:

(a) Escrever as equações paramétricas da reta $\boldsymbol{r}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A}$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Exemplo 2

(b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B}$ da reta $\boldsymbol{r}$ com o parâmetro $\boldsymbol{t = 1}$.

Exemplo 2

(c) Verificar se o ponto $\boldsymbol{D}(\mathbf{4}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$ pertence a $\boldsymbol{r}$.

Exemplo 2

(d) Escrever outro conjunto de equações paramétricas de $\boldsymbol{r}$ tomando o ponto $\boldsymbol{B(3, 1, -1)}$.

4.3 Reta definida por dois pontos

- Sejam $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$ e $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2})$, dois pontos pertencentes a reta $\boldsymbol{r}$;
- A direção dessa reta é obtida calculando-se o vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_2}) - (\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1})$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_2} - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_2} - \boldsymbol{z_1})$$

- As equações da reta são escritas em função de um dos pontos, $\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{B}$ e do vetor diretor $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Exemplo 3

A reta $\boldsymbol{r}$ passa pelos pontos $\boldsymbol{A}(\mathbf{1}, -\mathbf{2}, -\mathbf{3})$e $\boldsymbol{B}(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\mathbf{4})$. Encontrar suas equações paramétricas.

Exercício

Dada a reta:

$$r: \ (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0)$$

Escrever:

(a) As equações paramétricas de r;

(b) Encontrar um ponto $\boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{r}$ tal que $\mathrm{t} = 1/2$.

Entregar, resolvido, em folha no início da aula do dia 13/05/2019.

Aula 08 – Retas 2

4.4 Equações simétricas da reta

Sejam: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

As equações paramétricas da reta são:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Isolando o parâmetro t **e igualando-os tem-se :**

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

4.4 Equações simétricas da reta

Sejam: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}), \vec{\boldsymbol{v}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$.

As equações paramétricas da reta são:

$$r: \begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Isolando o parâmetro t e igualando-os tem-se :

$$t = \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Equações simétricas da reta

Exemplo 1

A reta r passa pelo ponto $\boldsymbol{A}(-\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3})$ e tem direção de $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{3})$. **Construa suas equações simétricas.**

4.5 Equações reduzidas da reta

Seja a reta r definida por $\boldsymbol{A(2,-4,-3)}$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{-3})$ e $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$. Sabendo que as equações são:

Vetorial:

$$r: \ (x, y, z) = (2, -4, -3) + t(1, 2, -3)$$

Paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

Simétricas:

$$x - 2 = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3}$$

4.5 Equações reduzidas da reta

Expressando duas das variáveis em termos de uma variável comum tem-se:

$$x - 2 = \frac{y + 4}{2} = \frac{z + 3}{-3}$$

4.5 Equações reduzidas da reta

Expressando duas das variáveis em termos de uma variável comum tem-se:

$$\boxed{x-2}=\boxed{\frac{y+4}{2}}=\frac{z+3}{-3}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+4}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2x-8=y$$

4.5 Equações reduzidas da reta

Expressando duas das variáveis em termos de uma variável comum tem-se:

$$\boxed{x-2} = \frac{y+4}{2} = \boxed{\frac{z+3}{-3}}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2x - 8 = y$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z+3}{-3} \quad \Longrightarrow \quad -3x + 3 = z$$

4.5 Equações reduzidas da reta

Expressando duas das variáveis em termos de uma variável comum tem-se:

$$x - 2 = \frac{y + 4}{2} = \frac{z + 3}{-3}$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 4}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{2x - 8 = y}$$

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{z + 3}{-3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{-3x + 3 = z}$$

Equações reduzidas da reta

Exemplo 2

A partir das equações reduzidas da reta r encontrar o seu vetor diretor.

$$r: \begin{cases} 2x - 8 = y \\ -3x + 3 = z \end{cases}$$

Exemplo 2

A partir das equações reduzidas da reta r encontrar o seu vetor diretor.

$$r: \begin{cases} 2x - 8 = y \\ -3x + 3 = z \end{cases}$$

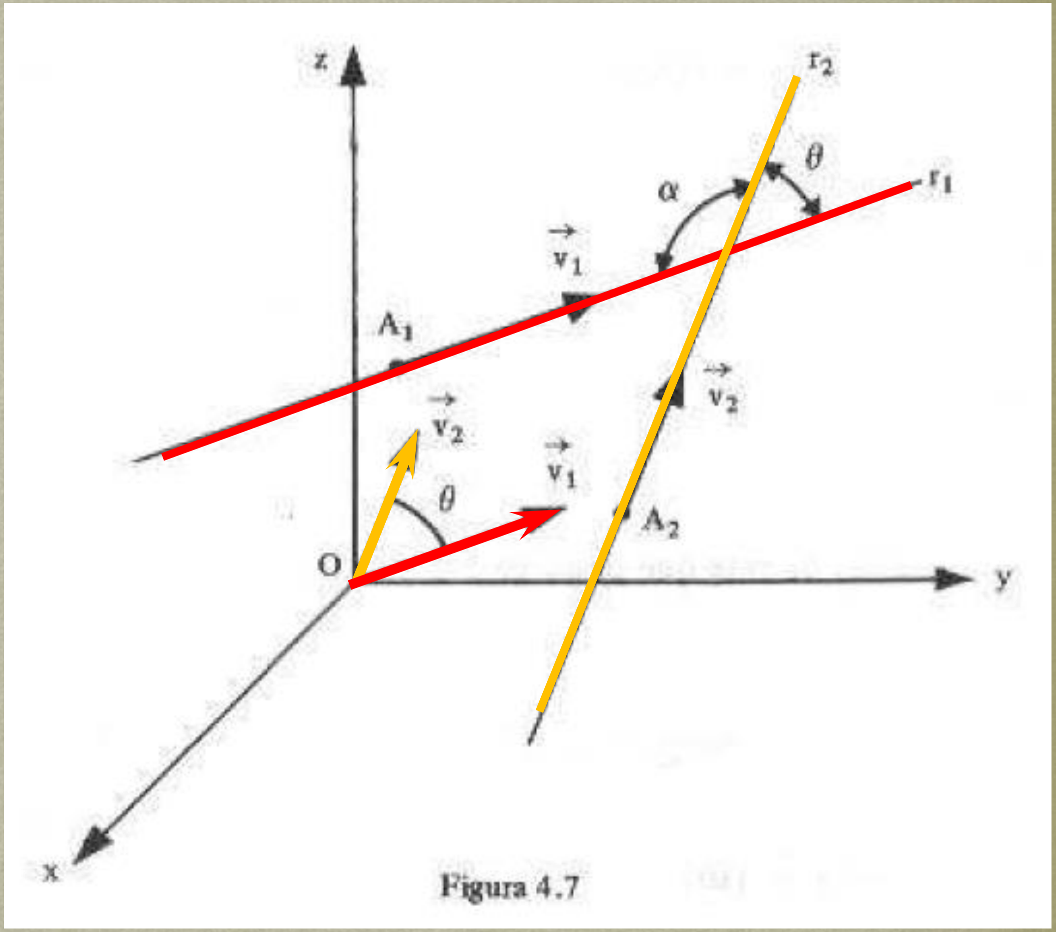
Para encontrar o vetor diretor de r:

$$\begin{cases} 2x - 8 = y \\ -3x + 3 = z \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{para } x = 0 & \rightarrow & y = -8 \;\; e\; z = 3 \\ \text{para } x = 1 & \rightarrow & y = -6 \;\; e\; z = 0 \end{matrix}$$

$$A(0, -8, 3) \quad e \quad B(1, -6, 0) \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -3)$$

4.7 Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas r_1 e r_2 é o menor ângulo entre seus vetores diretores.



4.7 Ângulo entre duas retas

O ângulo entre duas retas r_1 e r_2 é o menor ângulo entre seus vetores diretores.

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}|}{|\overrightarrow{v_1}| \cdot |\overrightarrow{v_2}|}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

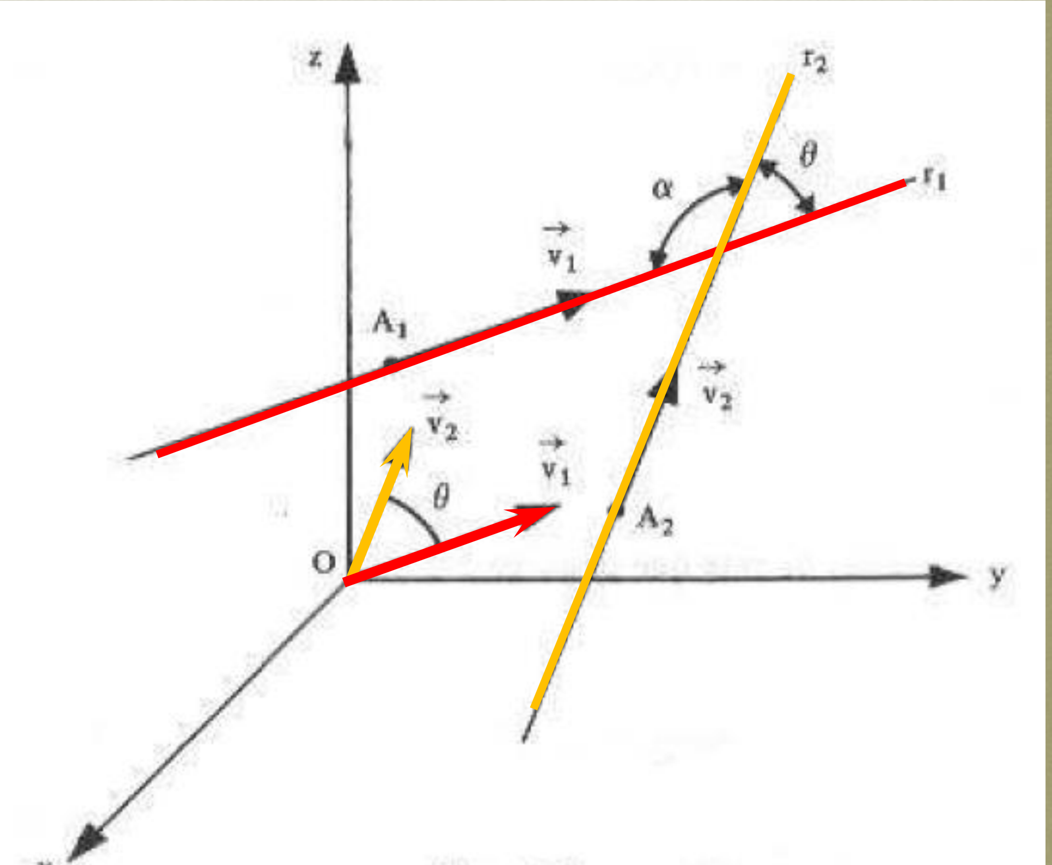
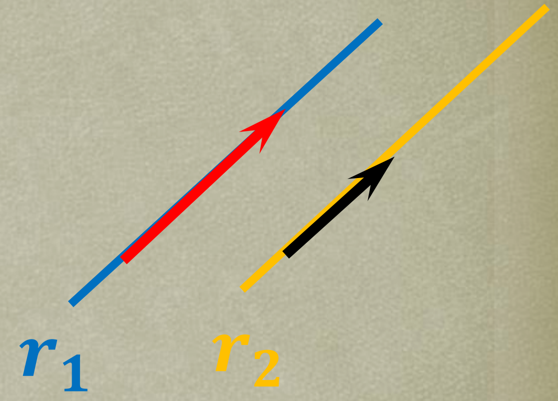


Figura 4.7

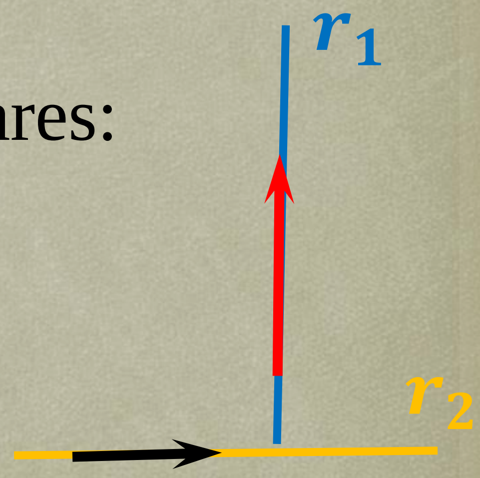
4.8 Condições de paralelismo entre retas

Se as retas r_1 e r_2 forem paralelas:



- $\theta = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_1 = m\vec{v}_2$

Se as retas r_1 e r_2 forem perpendiculares:



- $\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 0$

Exemplo 3

Calcular m para que as retas r e s sejam perpendiculares.

$$r: \begin{cases} y = mx - 3 \\ z = -2x \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 5t \end{cases}$$

Resp.: $m = -8$

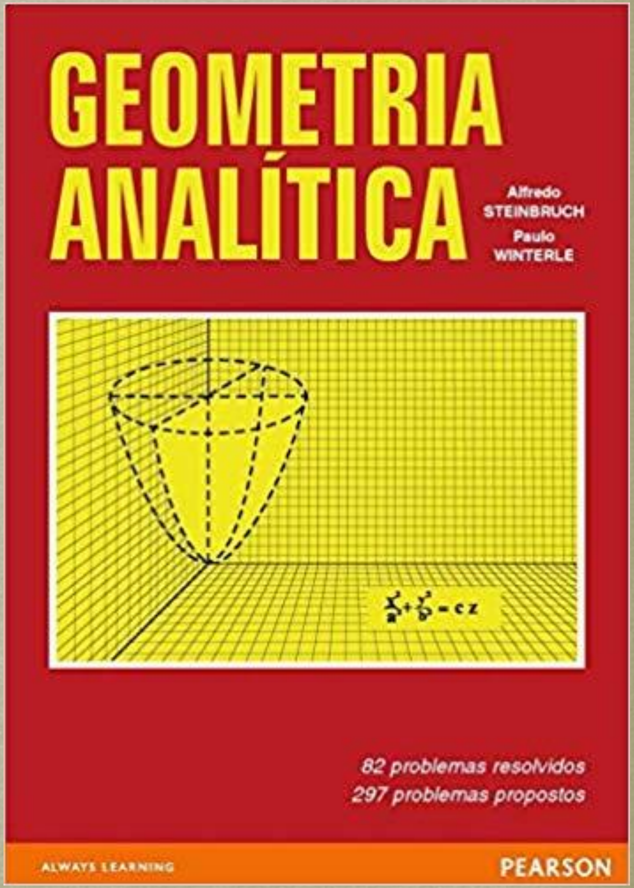
Resolver os problemas propostos:

p. 132: **1, 2, 4, 6, 11a, 11c, 12, 14a, 14c, 20, 24a, 24c.**

Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes

http://lattes.cnpq.br/1614784455223743