

Verificamos que, na média, a distribuição dos fótons concorda com nossas previsões da Seção 36.3. Em pontos correspondentes aos máximos da figura de difração contamos muitos fótons, nos mínimos não contamos quase nenhum fóton, e assim por diante. O gráfico das contagens nos diversos pontos fornece a mesma figura de difração prevista na Equação 36.7.

Suponha agora que a intensidade seja reduzida a tal ponto que somente alguns fótons por segundo passem através da fenda. Assim, registramos uma série discreta de colisões, cada uma representando um único fóton. Como não há uma maneira de prever o local exato em que um único fóton vai colidir, ao longo do tempo as colisões acumuladas formam uma figura de difração familiar, o que é esperado para uma onda. Para reconciliar a descrição ondulatória com a descrição corpuscular da figura de difração, devemos encarar essa figura como uma distribuição *estatística* que nos informa quantos fótons, na média, atingem cada local. De modo equivalente, a figura nos diz a *probabilidade* de que um fóton individual atinja um determinado ponto. Se fizermos nosso feixe de luz brilhar em um dispositivo de fenda dupla, obtemos um resultado similar (**Figura 38.16**). Novamente não é possível prever o local exato onde podemos encontrar um determinado fóton; a figura de interferência é uma distribuição estatística.

Como o princípio da complementaridade se aplica a essas experiências de interferência e difração? A descrição ondulatória, e não a descrição corpuscular, explica as experiências da fenda única e da fenda dupla. Porém a descrição corpuscular, e não a descrição ondulatória, explica como um detector fotomultiplicador pode ser usado para construir a figura de interferência mediante a adição de pacotes discretos de energia. As duas descrições completam nossa compreensão dos resultados. Por exemplo, suponha que estejamos considerando um fóton individual e perguntamos como ele sabe “qual caminho deve seguir” quando passa pela fenda. Essa pergunta se parece com um enigma, isso porque é formulada admitindo-se que a luz seja uma *partícula*. É a natureza ondulatória da luz, e não sua natureza corpuscular, que determina a distribuição dos fótons. Reciprocamente, o fato de que o fotomultiplicador detecta luz fraca como uma sequência de “pontos” individuais não pode ser explicado em termos ondulatórios.

Probabilidade e incerteza

Embora os fótons possuam energia e momento linear, são muito diferentes do modelo corpuscular que usamos para a mecânica newtoniana nos capítulos de 4 a 8. O modelo de partícula newtoniano trata um objeto como um ponto que possui massa. Podemos descrever a localização e o estado do movimento como uma partícula em qualquer instante usando três coordenadas espaciais e três componentes do momento linear e, assim, podemos prever o movimento da partícula no futuro. No entanto, esse modelo não funciona de forma alguma para fótons: simplesmente não podemos tratar um fóton como um objeto pontual. Isso porque existem limitações fundamentais quanto à precisão com que podemos determinar a posição e o momento linear de um fóton simultaneamente. (No Capítulo 39 descobriremos que as ideias não newtonianas que desenvolvemos para os fótons nesta seção também se aplicam a partículas como os elétrons.)

Para obter mais esclarecimentos a respeito do problema de medirmos a posição e o momento linear de um fóton simultaneamente, vamos olhar novamente na difração da luz em uma fenda única.

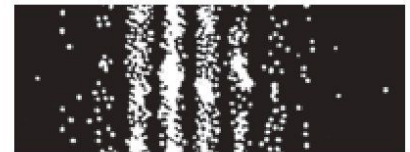
Suponha que o comprimento de onda λ seja muito menor que a largura a da fenda (**Figura 38.17**). Em seguida, a maioria (85%) dos fótons entra na parte mais ao centro da figura de difração e o restante vai para as outras partes da figura. Usamos θ_1 para designar o ângulo entre o ponto mais ao centro e o primeiro ponto mínimo da figura. Usando a Equação 36.2 com $m = 1$, descobrimos que θ_1 é dado por $\sin \theta_1 = \lambda/a$. Uma vez que assumimos $\lambda \ll a$, segue-se que θ_1 é muito pequeno, e $\sin \theta_1$ é quase igual a θ_1 (em radianos), e

Figura 38.16 Estas imagens registram as posições em que fótons individuais incidem na tela em uma experiência de interferência de fenda dupla. À medida que mais fótons atingem a tela, começamos a reconhecer uma figura de interferência.

Após 21 fótons atingirem a tela



Após 1.000 fótons atingirem a tela



Após 10.000 fótons atingirem a tela

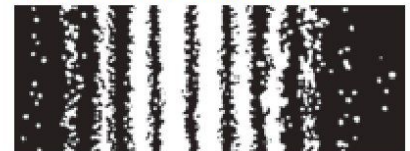
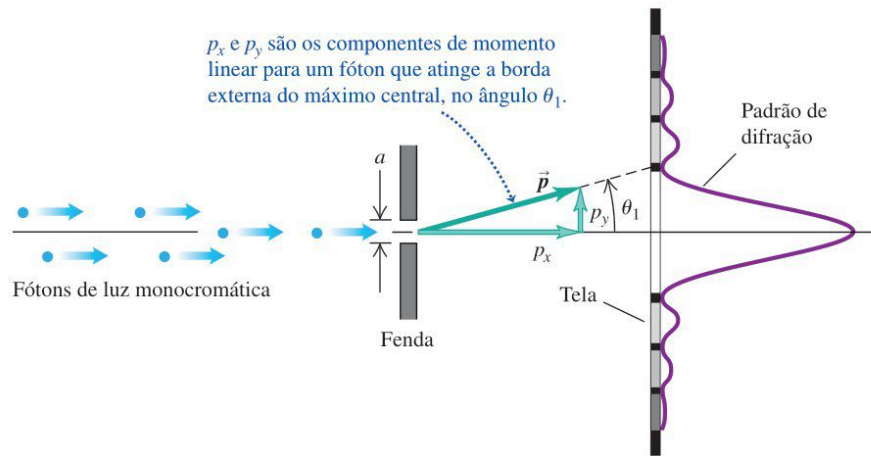


Figura 38.17 Interpretando a difração de fenda única em termos do momento linear do fóton.



$$\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \tag{38.12}$$

Mesmo sabendo que todos os fótons têm o mesmo estado inicial do movimento, nem todos eles seguem o mesmo caminho. Não podemos prever a trajetória exata de qualquer fóton individual a partir do conhecimento de seu estado inicial; só podemos descrever a *probabilidade* de que um fóton individual vai atingir um determinado ponto na tela. Essa indeterminação fundamental não tem correspondência na mecânica newtoniana.

Além disso, existem *incertezas* fundamentais, tanto na posição quanto no momento linear de uma partícula individual, e essas incertezas estão inseparavelmente relacionadas. Para esclarecer esse ponto, vamos voltar para a Figura 38.17. Um fóton que atinge a tela na borda exterior do ponto mais ao centro, formando um ângulo θ_1 com ele, deve ter um componente do momento linear p_y no eixo y , bem como um componente p_x na direção do eixo x , apesar do fato de que, inicialmente, o feixe tenha se dirigido ao longo do eixo x . A partir da geometria da situação, os dois componentes estão relacionados por $p_y/p_x = \tan \theta_1$. Visto que θ_1 é pequena, podemos usar a aproximação $\tan \theta_1 = \theta_1$, e

$$p_y = p_x \theta_1 \tag{38.13}$$

Substituindo a Equação 38.12, $\theta_1 = \lambda/a$, na Equação 38.13, obtemos

$$p_y = p_x \frac{\lambda}{a} \tag{38.14}$$

A Equação 38.14 diz que, para os 85% dos fótons que atingem o detector dentro do máximo central (ou seja, em ângulos entre $-\lambda/a$ e $+\lambda/a$), o componente y do momento é espalhado por um intervalo de $-p_x \lambda/a$ até $+p_x \lambda/a$. Agora, vamos considerar *todos* os fótons que passam pela fenda e atingem a tela. Novamente, eles podem atingir acima ou abaixo do centro da figura, de modo que seu componente p_y pode ser positivo ou negativo. Porém, a simetria da figura de difração nos mostra o valor médio $(p_y)_{\text{méd}} = 0$. Haverá uma *incerteza* Δp_y no componente y do momento linear pelo menos tão grande quanto $p_x \lambda/a$. Ou seja,

$$\Delta p_y \geq p_x \frac{\lambda}{a} \tag{38.15}$$

Quanto menor for a largura a da fenda, mais larga será a figura de difração e maior a incerteza no valor do componente y do momento linear p_y .

O comprimento de onda λ do elétron está relacionado com seu momento linear p_x por meio da Equação 38.5, que pode ser reescrita na forma $\lambda = h/p_x$. Usando esse resultado na Equação 38.15 e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}\Delta p_y &\geq p_x \frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a} \\ \Delta p_y a &\geq h\end{aligned}\quad (38.16)$$

Qual é o significado da Equação 38.16? A largura a da fenda representa uma incerteza no componente y da *posição* de um fóton quando ele passa pela fenda. Não podemos saber exatamente *onde* cada elétron passa através da fenda. Logo, a posição y e o componente y do momento linear possuem incertezas, que são relacionadas pela Equação 38.16. Podemos diminuir a incerteza do *momento linear* Δp_y apenas reduzindo a largura da figura de difração. Para isso, é necessário aumentar a largura a da fenda, o que aumenta a incerteza da *posição*. Reciprocamente, quando *diminuímos* a incerteza da posição reduzindo a largura da fenda, a figura de difração se alarga e a incerteza do momento linear *aumenta*.

Você pode argumentar que o resultado anterior entra em conflito com o senso comum, por um fóton não ter um dado momento linear e uma posição definida. Respondemos dizendo que o chamado *senso comum* se baseia em uma familiaridade obtida a partir de experiências. Nossa experiência geralmente não inclui o contato com partículas microscópicas, como os fótons. Algumas vezes, somos obrigados a aceitar conclusões que violam nossa intuição ao considerar fenômenos muito distantes da nossa experiência cotidiana.

O princípio da incerteza

Em discussões mais gerais acerca das relações de incerteza, notamos que a incerteza de uma grandeza geralmente é descrita com base em um conceito estatístico chamado de *desvio-padrão*, que fornece uma medida de afastamento dos valores de um conjunto de números em relação ao valor médio desses números. Suponha agora que passemos a descrever incertezas dessa maneira (na Equação 38.16 nem a nem Δp_y são desvios-padrão). Quando a coordenada x apresenta uma incerteza Δx e o momento linear correspondente p_x apresenta uma incerteza Δp_x , então descobrimos que, em geral,

Princípio da incerteza de Heisenberg para a posição e o momento linear:

Incerteza na coordenada x

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$$

Incerteza no componente de momento correspondente p_x

Constante de Planck dividida por 2π

(38.17)

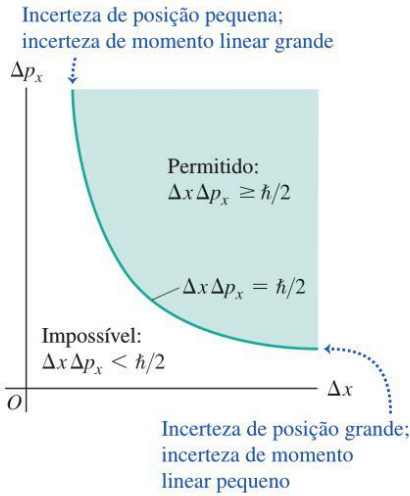
Nessa expressão, a grandeza \hbar (pronuncia-se “h-cortado”) é a constante de Planck dividida por 2π :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054571628(53) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Usaremos \hbar frequentemente para evitar escrever demasiados fatores 2π nas equações que utilizaremos daqui para a frente.

ATENÇÃO h versus h-cortado É comum que os estudantes insiram o valor de h quando o que deveriam usar é $\hbar = h/2\pi$, ou vice-versa. Não cometa o mesmo erro, ou seu resultado ficará errado por um fator de 2π !

Figura 38.18 Princípio da incerteza de Heisenberg para componentes de posição e momento linear. É impossível que o produto $\Delta x \Delta p_x$ seja menor que $\hbar/2 = h/4\pi$.



A Equação 38.17 é uma forma do **princípio da incerteza de Heisenberg**, proposto pela primeira vez pelo físico alemão Werner Heisenberg (1901-1976). Esse princípio afirma que, em geral, não podemos determinar nem a posição nem o momento linear de uma partícula com uma precisão arbitrariamente grande, como é previsto pela física clássica. Ao contrário, as incertezas dessas duas grandezas desempenham papéis complementares, conforme descrevemos. Na **Figura 38.18** mostramos as relações entre essas duas incertezas. Nossa dedução da Equação 38.16, uma forma menos refinada do princípio da incerteza dado pela Equação 38.17, mostra que esse princípio tem suas raízes no aspecto ondulatório dos fótons. Veremos, no Capítulo 39, que os elétrons e outras partículas subatômicas também possuem um aspecto ondulatório, e o mesmo princípio da incerteza também se aplica a eles.

Podemos ser levados a supor que obteríamos uma precisão mais elevada usando detectores de posição e momento linear mais sofisticados. Verificou-se que isso é impossível. Para detectar uma partícula, o detector teria de *interagir* com ela, e essa interação produziria inevitáveis perturbações no movimento da partícula, introduzindo uma incerteza em seu estado inicial. Por exemplo, podemos imaginar um elétron sendo colocado em um certo ponto no meio da fenda da Figura 38.17. Se o fóton passar pelo meio, veríamos o recuo do elétron. Então saberíamos que o fóton passou por esse ponto na fenda e teríamos muito mais certeza sobre a coordenada x do fóton. Porém, a colisão entre o fóton e o elétron mudaria o momento do fóton, produzindo maior incerteza em seu momento linear. Uma análise mais detalhada dessas experiências hipotéticas mostra que as incertezas que descrevemos são fundamentais e intrínsecas. Elas *não* podem ser evitadas *mesmo em princípio* por meio de qualquer técnica experimental, por mais sofisticada que seja.

Não existe nada de especial com o eixo x . Em três dimensões, com coordenadas (x, y, z) , existe uma relação de incerteza para cada coordenada e seu respectivo componente do momento linear: $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$, $\Delta y \Delta p_y \geq \hbar/2$ e $\Delta z \Delta p_z \geq \hbar/2$. Contudo, a incerteza em uma coordenada *não* é relacionada com a incerteza de outro componente do momento linear. Por exemplo, não existe nenhuma relação direta entre Δx e Δp_y .

Aplicação Caçando borboletas com Heisenberg Visto que \hbar possui um valor pequeno, o princípio da incerteza de Heisenberg entra em ação apenas para objetos na escala de átomos ou partículas menores. Para visualizar o que esse princípio significa, imagine que poderíamos tornar o valor de \hbar maior por um fator de 10^{34} , de modo que $\hbar = 1,05 \text{ J} \cdot \text{s}$. Se você apanhar uma borboleta em uma rede, saberá a posição dela dentro do diâmetro de 0,25 m da rede. Logo, a incerteza na posição da borboleta é aproximadamente $\Delta x = 0,25 \text{ m}$. A incerteza mínima em seu momento linear é, então, $\Delta p_x = (\hbar/2 \Delta x) = (1,05 \text{ J} \cdot \text{s})/2(0,25 \text{ m}) = 2,1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, de modo que apenas caçando a borboleta você poderia transmitir esse momento linear a ela. Uma borboleta comum possui uma massa de aproximadamente $3 \times 10^{-4} \text{ kg}$. Com todo esse momento linear, a velocidade da borboleta seria aproximadamente 7.000 m/s (cerca de 20 vezes a velocidade do som!) e sua energia cinética seria cerca de 7.000 J (a mesma de uma bola de beisebol viajando a cerca de 300 m/s, pouco abaixo da velocidade do som). Confinando a borboleta na rede, você poderia lhe dar tanto momento linear e energia cinética que ela poderia estourando a rede!



Ondas e incerteza

Vejamos um modo alternativo de compreender o princípio da incerteza de Heisenberg em termos das propriedades das ondas. Imagine uma onda eletromagnética senoidal propagando-se no sentido x positivo com seu campo elétrico polarizado na direção y . Se a onda possui comprimento de onda λ , frequência f e amplitude A , podemos escrever a função de onda como

$$E_y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (38.18)$$

Nessa expressão, o número de onda é $k = 2\pi/\lambda$ e a frequência angular é $\omega = 2\pi f$. Podemos imaginar a função de onda da Equação 38.18 como a descrição de um fóton com um comprimento de onda e uma frequência definidos. Em termos de k e ω , podemos expressar o momento linear e a energia do fóton como

$$p_x = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \quad (\text{momento linear do fóton em termos de número de onda}) \quad (38.19a)$$

$$E = hf = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = \hbar \omega \quad (\text{energia do fóton em termos da frequência angular}) \quad (38.19b)$$

Usando as equações 38.19 na Equação 38.18, podemos reescrever nossa equação de onda do fóton como

$$E_y(x, t) = A \text{sen}[(p_x x - Et)/\hbar] \quad (\text{função de onda para um fóton com momento linear } x = px \text{ e energia } E) \quad (38.20)$$

Visto que essa função de onda possui um valor definido de momento $x = p_x$, não existe incerteza no valor dessa quantidade: $\Delta p_x = 0$. O princípio da incerteza de Heisenberg, Equação 38.17, diz que $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$. Se Δp_x for zero, então Δx deverá ser infinito. De fato, a onda descrita pela Equação 38.20 se estende por todo o eixo x e tem a mesma amplitude em toda parte. O preço que pagamos por conhecer o momento linear do fóton com precisão é que não temos ideia de onde o fóton se encontra!

Em situações práticas, sempre temos *alguma* ideia de onde um fóton se encontra. Para descrever essa situação, precisamos de uma função de onda que seja mais localizada no espaço. Podemos criar uma superpondo duas ou mais funções senoidais. Para manter as coisas simples, vamos considerar apenas ondas que se propagam na direção x positiva. Por exemplo, vamos somar duas funções de onda senoidal como as das equações 38.18 e 38.20, mas com comprimentos de onda e frequências ligeiramente diferentes e, portanto, valores ligeiramente diferentes p_{x1} e p_{x2} do momento x e valores de energia E_1 e E_2 ligeiramente diferentes. A função de onda total é

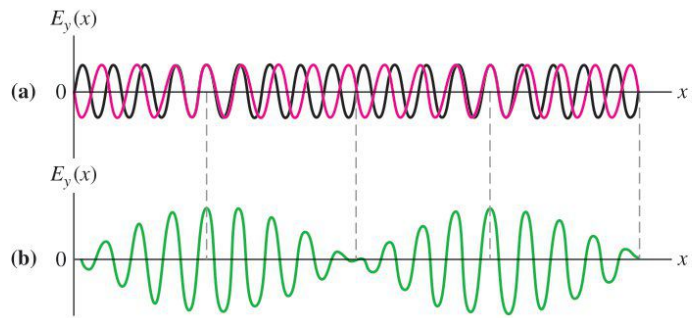
$$E_y(x, t) = A_1 \text{sen}[(p_{1x} x - E_1 t)/\hbar] + A_2 \text{sen}[(p_{2x} x - E_2 t)/\hbar] \quad (38.21)$$

Considere como seria essa função em determinado instante no tempo, digamos, $t = 0$. Nesse instante, a Equação 38.21 torna-se

$$E_y(x, t = 0) = A_1 \text{sen}(p_{1x} x/\hbar) + A_2 \text{sen}(p_{2x} x/\hbar) \quad (38.22)$$

A **Figura 38.19a** é um gráfico das funções de onda individuais em $t = 0$ para o caso $A_2 = -A_1$, e a Figura 38.19b representa graficamente a função de onda combinada $E_y(x, t = 0)$ dada pela Equação 38.22. Vimos algo muito semelhante à Figura 38.19b em nossa discussão sobre batimentos na Seção 16.7: quando sobrepusemos duas ondas senoidais com frequências ligeiramente diferentes (veja a Figura 16.25), a onda resultante exibiu variações de amplitude que não existiam nas ondas originais. Da mesma forma, um fóton representado pela função de onda na Equação 38.21 provavelmente deverá ser encontrado nas regiões onde a amplitude da função de onda é maior. Ou seja, o fóton é *localizado*. Porém, o momento linear do fóton não tem mais um valor definido, pois começamos com dois valores de momento linear x diferentes, p_{x1} e p_{x2} . Isso corresponde ao princípio da incerteza de Heisenberg: diminuindo a incerteza na posição do fóton, aumentamos a incerteza em seu momento.

Figura 38.19 (a) Duas ondas senoidais com números de onda ligeiramente diferentes k e, portanto, valores ligeiramente diferentes de momento linear $p_x = \hbar k$, mostradas em um instante do tempo. (b) A superposição dessas ondas possui um momento linear igual à média dos valores individuais do momento linear. A amplitude varia, dando à onda total um caráter desajeitado não possuído por qualquer onda individual.



Incerteza na energia

Nossa discussão sobre combinação de ondas também mostra que existe um princípio da incerteza que envolve *energia* e *tempo*. Para ver por que isso acontece, imagine a medição da função de onda combinada descrita pela Equação 38.21 em uma certa posição, digamos, $x = 0$, por um período. Em $x = 0$, a função de onda da Equação 38.21 torna-se

$$\begin{aligned} E_y(x, t) &= A_1 \text{sen}(-E_1 t/\hbar) + A_2 \text{sen}(-E_2 t/\hbar) \\ &= -A_1 \text{sen}(E_1 t/\hbar) - A_2 \text{sen}(E_2 t/\hbar) \end{aligned} \quad (38.23)$$

O que medimos em $x = 0$ é uma combinação de dois campos elétricos oscilantes com frequências angulares ligeiramente diferentes $\omega_1 = E_1/\hbar$ e $\omega_2 = E_2/\hbar$. Este é exatamente o fenômeno dos batimentos que discutimos na Seção 16.7 (compare com a Figura 16.25). A amplitude do campo combinado aumenta e diminui, de modo que o fóton descrito por esse campo está localizado no *tempo*, assim como na posição. O fóton provavelmente será encontrado nos instantes em que a amplitude é grande. O preço que pagamos por localizar o fóton no tempo é que a onda não tem uma energia definida. Ao contrário, se o fóton for descrito por uma onda senoidal, como na Equação 38.20, que *possui* uma energia definida E , mas com a mesma amplitude o tempo todo, não temos ideia de quando o fóton aparecerá em $x = 0$. Assim, quanto melhor soubermos sobre a energia do fóton, menos certeza teremos sobre quando o fóton será observado.

Assim como para o princípio da incerteza da posição e do momento linear, podemos escrever uma expressão matemática para o princípio da incerteza que relaciona energia e tempo. De fato, exceto por um sinal de menos geral, a Equação 38.23 é idêntica à 38.22 se substituirmos o momento p_x pela energia E e a posição x pelo tempo t . Isso nos diz que, na relação de incerteza da posição e do momento linear, Equação 38.17, podemos substituir a incerteza do momento linear Δp_x pela incerteza da energia ΔE e substituir a incerteza da posição Δx pela incerteza do tempo Δt . O resultado é

Princípio da incerteza de Heisenberg para a energia e o tempo:

$$\Delta t \Delta E \geq \hbar/2 \quad (38.24)$$

Incerteza do tempo de um fenômeno
Constante de Planck dividida por 2π

Incerteza da energia do mesmo fenômeno

Na prática, qualquer fóton real possui uma extensão espacial limitada e, portanto, passa qualquer ponto em uma quantidade de tempo limitada. O exemplo a seguir ilustra como isso afeta o momento e a energia do fóton.