Geometria Analítica

Engenharias

Semana 07 – Aula 1

O plano

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Equação geral do plano

Sejam um plano π em que $\boldsymbol{A(x_1, y_1, z_1)}$ ∈ π, $\vec{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ é ortogonal a π. Um ponto $\boldsymbol{P(x, y, z)}$ pertence a esse plano π se e somente se o vetor $\overrightarrow{AP}$ for ortogonal a $\vec{\boldsymbol{n}}$.

Equação geral do plano

Sejam um plano π em que $A(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a π. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a esse plano π se e somente se o vetor $\overrightarrow{AP}$ for ortogonal a $\vec{n}$.

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

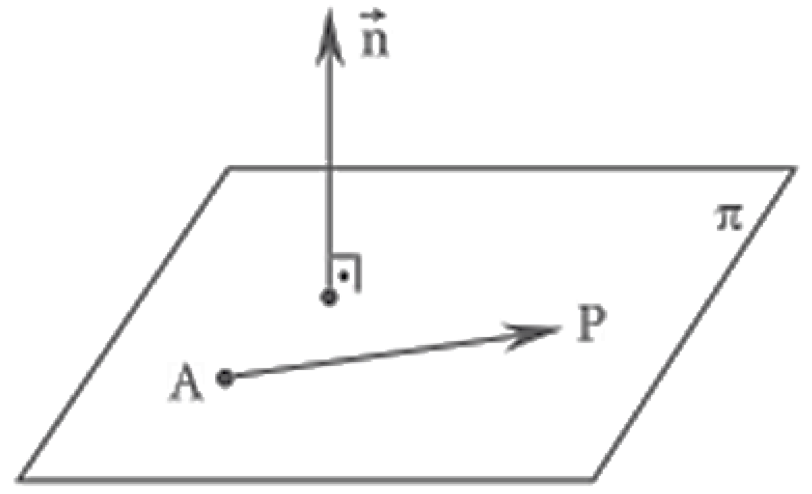


Figura 6.1

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$$

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$$

$$a(x - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{b}(y - \boldsymbol{y_1}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = \mathbf{0}$$

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$$

$$a(x - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{b}(y - \boldsymbol{y_1}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = \mathbf{0}$$

$$a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1}) = \mathbf{0}$$

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$$

$$a(x - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{b}(y - \boldsymbol{y_1}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = \mathbf{0}$$

$$a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1}) = \mathbf{0}$$

Fazendo: $\boldsymbol{d} = (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1})$

Equação geral do plano

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - \boldsymbol{x_1}, y - \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) \cdot (a, b, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$$

$$a(x - \boldsymbol{x_1}) + \boldsymbol{b}(y - \boldsymbol{y_1}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_1}) = \boldsymbol{0}$$

$$a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1}) = \boldsymbol{0}$$

Fazendo: $\boldsymbol{d} = (-\boldsymbol{ax_1} - \boldsymbol{by_1} - \boldsymbol{cz_1})$

$$\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} + \boldsymbol{cz} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$$

Equação geral do plano

Observações

a) Qualquer vetor $k\vec{n}$, $k \neq 0$ é normal ao plano π;

Observações

a) Qualquer vetor $k\vec{n}, \ k \neq 0$ é normal ao plano π;

b) Os componentes a, b, c na equação do plano são as componentes do vetor normal a π;

Observações

a) Qualquer vetor $k\vec{n}, \ k \neq 0$ é normal ao plano π;

b) Os componentes a, b, c na equação do plano são as componentes do vetor normal a π;

c) Atribuindo-se valores arbitrários a duas variáveis da equação do plano obtém-se pontos de π.

Exemplo 1

Obter uma equação geral do plano que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,-1,3)}$ e tem vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{(3,2,-4)}$.

Exemplo 2

Escrever uma equação geral do plano $\boldsymbol{\pi}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,1,3)}$ e é paralelo ao plano:

$$\boldsymbol{\pi_1: 3x - 4y - 2z + 5 = 0}.$$

Exercício

A reta $\boldsymbol{r}$ é ortogonal ao plano $\boldsymbol{\pi}$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,1,-2)}$. Determinar uma equação geral desse plano e representá-lo graficamente.

$$\boldsymbol{r}\colon \begin{cases} \boldsymbol{x = 5 + 3t} \\ \boldsymbol{y = -4 + 2t} \\ \boldsymbol{z = 1 + t} \end{cases}.$$

$\boldsymbol{Resp\colon\ 3x + 2y + z - 6 = 0}$

Equação vetorial do plano

Seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto pertencente a π, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a esse plano π. Supondo que os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sejam paralelos entre si:

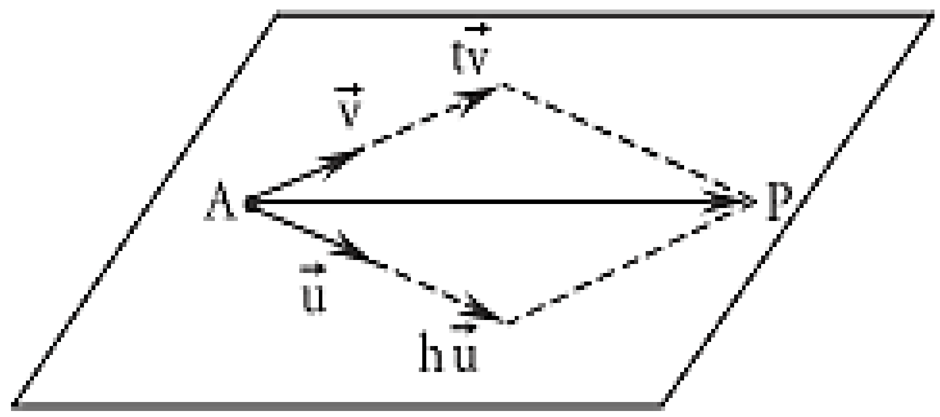


Figura 6.3

Equação vetorial do plano

Seja $\boldsymbol{A(x_0, y_0, z_0)}$ um ponto pertencente a π, $\vec{u} = (\boldsymbol{a_1, b_1, c_1})$ e $\vec{v} = (\boldsymbol{a_2, b_2, c_2})$ dois vetores paralelos a esse plano π. Supondo que os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não sejam paralelos entre si:

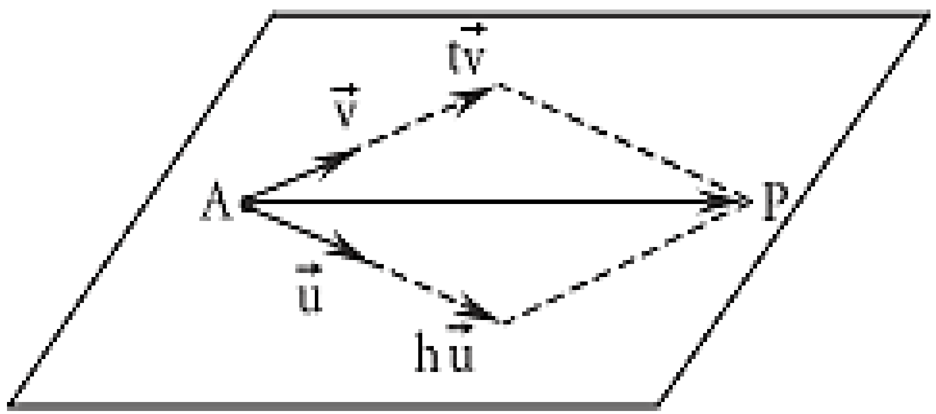


Figura 6.3

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{h\vec{u} + t\vec{v}}$$

$$h, t \in \mathbb{R}$$

Equação vetorial do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

Equação vetorial do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

Equação vetorial do plano

$$\overrightarrow{AP} = h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$P = A + h\vec{u} + t\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Equação vetorial do plano

Equações paramétricas do plano

Da equação vetorial do plano tem-se:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

Equações paramétricas do plano

Da equação vetorial do plano tem-se:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t, \; y_0 + b_1 h + b_2 t, \; z_0 + c_1 h + c_2 t)$$

Equações paramétricas do plano

Da equação vetorial do plano tem-se:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + h(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$$

A soma do lado direito fornece:

$$(x, y, z) = (x_0 + a_1 h + a_2 t,\ y_0 + b_1 h + b_2 t,\ z_0 + c_1 h + c_2 t)$$

Da igualdade de vetores:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + a_1 h + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 h + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 h + c_2 t \end{cases}$$

Equações paramétricas do plano

Exemplo 3

Um plano $\boldsymbol{\pi}$ passa pelo ponto $\boldsymbol{A(2,2,-1)}$ e é paralelo aos vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{(2,-3,1)}$ e $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{(-1,5,-3)}$ **.** Obter a equação geral, vetorial e as equações paramétricas de $\boldsymbol{\pi}$.

$\boldsymbol{Resp}: \boldsymbol{4x + 5y + 7z - 11 = 0}$

Exercício

Determinar uma equação geral do plano $\boldsymbol{\pi}$ que contém as retas:

$\boldsymbol{Resp}\text{: } \boldsymbol{-9x + 3y - 2z - 7 = 0}$

$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$$

Equação vetorial de um paralelogramo

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{C}$, não colineares, pertencente ao plano π.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo, definido pela relação de um vetor qualquer:

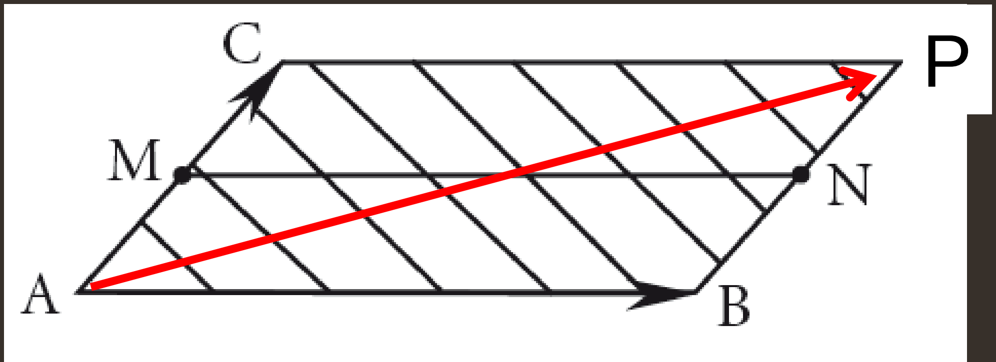


Figura 6.8

Equação vetorial de um paralelogramo

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{C}$, não colineares, pertencente ao plano π.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo, definido pela relação de um vetor qualquer:

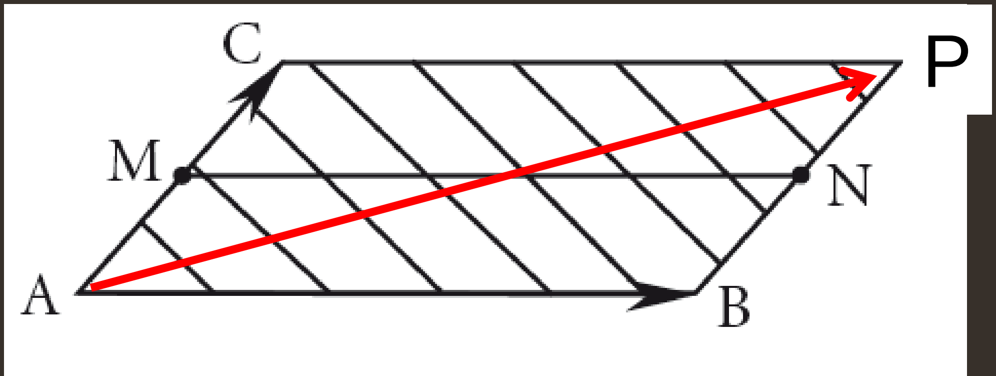


Figura 6.8

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

Equação vetorial de um paralelogramo

Sejam os pontos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{C}$, não colineares, pertencente ao plano π.

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinam o paralelogramo, definido pela relação de um vetor qualquer:

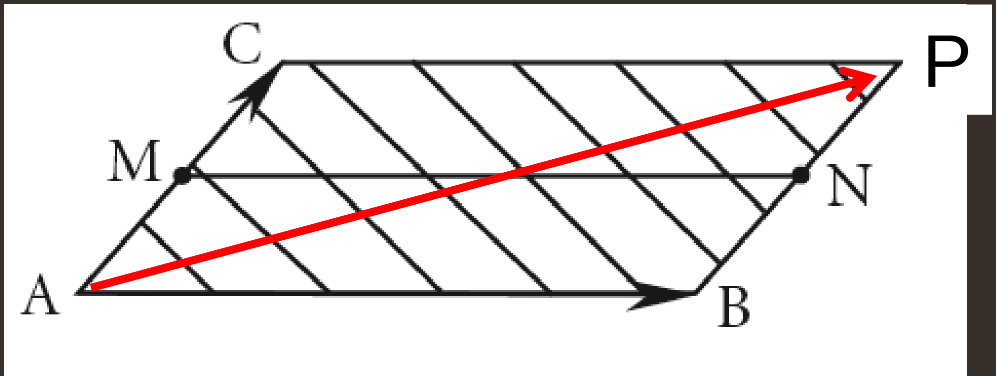


Figura 6.8

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

Ou

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} = \boldsymbol{h}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$$

Com: $\boldsymbol{h}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$

Equação vetorial de um paralelogramo

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

Equação vetorial de um paralelogramo

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$P = A + h(B - A) + t(C - A)$$

Ponto qualquer do paralelogramo

Equação vetorial de um paralelogramo

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$P = A + h(B - A) + t(C - A)$$

Ponto qualquer do paralelogramo

$$\text{Para:} \quad h = t = 0 \quad \rightarrow \quad P = A$$

$$\text{Para:} \quad h = 1 \quad e \quad t = 0 \quad \rightarrow \quad P = B$$

Casos particulares da equação geral do plano

Seja a equação geral do plano:

$$\boldsymbol{ax + by + cz + \mathrm{d} = 0}$$

Análise dos casos com exemplo numérico:

$$\boldsymbol{3x + 4y + 2z - 12 = 0}$$

Casos 0 – Plano original

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $y = z = 0$

$$3x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

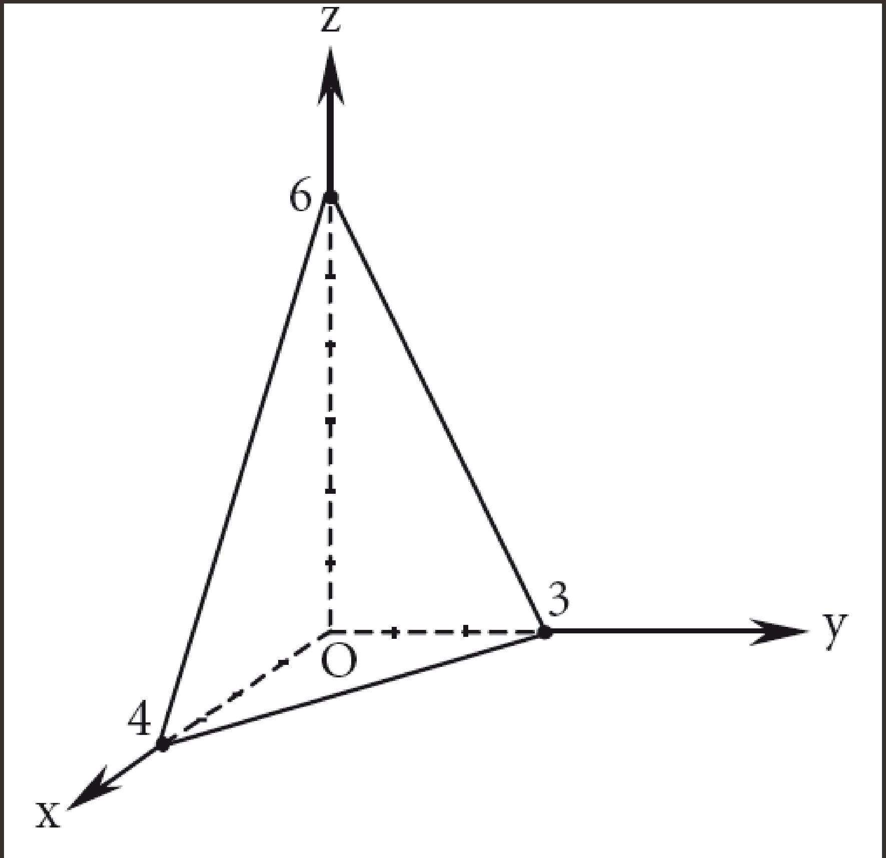


Figura 6.9

Casos 0 – Plano original

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $y = z = 0$

$$3x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

p/ $x = z = 0$

$$4y = 12 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

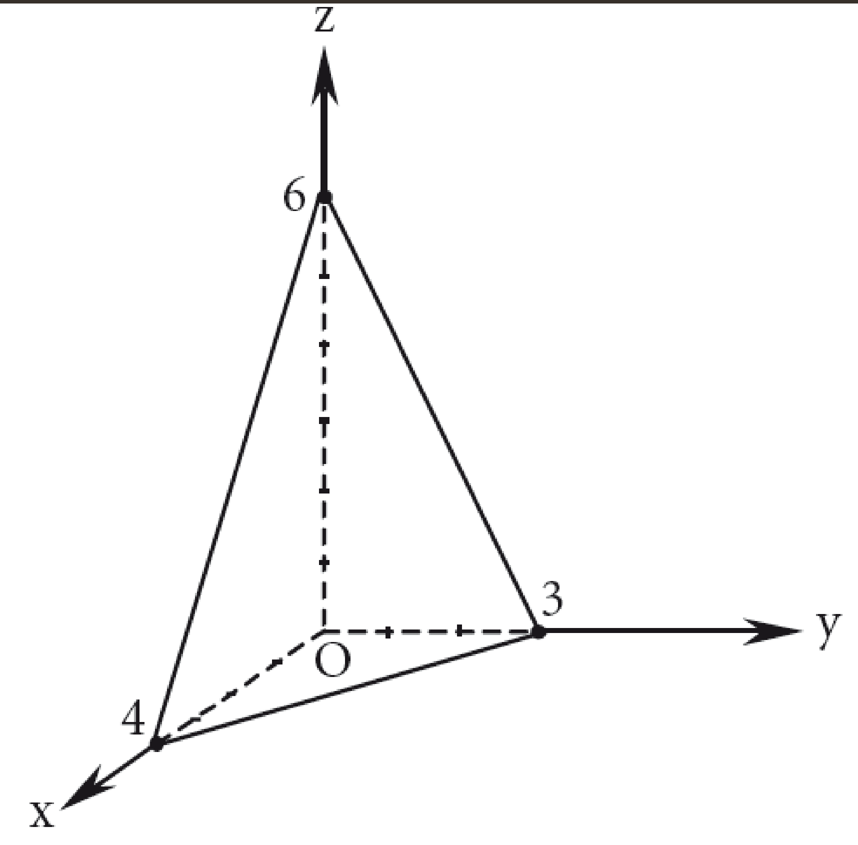


Figura 6.9

Casos 0 – Plano original

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $y = z = 0$

$$3x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

p/ $x = z = 0$

$$4y = 12 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

p/ $x = y = 0$

$$2z = 12 \quad \rightarrow \quad z = 6$$

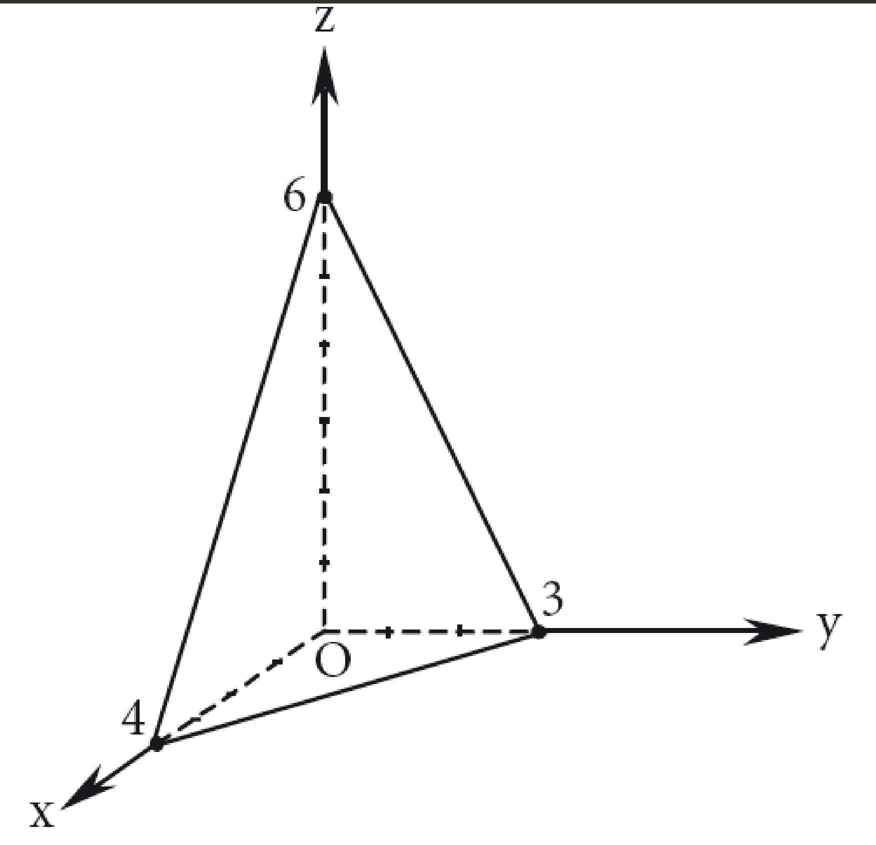


Figura 6.9

Casos 1: $d = 0$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

p/ $y = z = 0 \rightarrow x = 0$

p/ $x = z = 0 \rightarrow y = 0$

p/ $x = y = 0 \rightarrow z = 0$

Casos 1: $d = 0$

$$3x + 4y + 2z = 0$$

p/ $y = z = 0 \rightarrow x = 0$

p/ $x = z = 0 \rightarrow y = 0$

p/ $x = y = 0 \rightarrow z = 0$

p/ $y = z = 1 \rightarrow x = -2$

p/ $x = z = 1 \rightarrow y = -5/4$

p/ $x = y = 1 \rightarrow z = -7/2$

Casos 2: $a = 0\ (coeficiente\ de\ x)$

$$4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $z = 0 \rightarrow y = 3$

p/ $y = 0 \rightarrow z = 6$

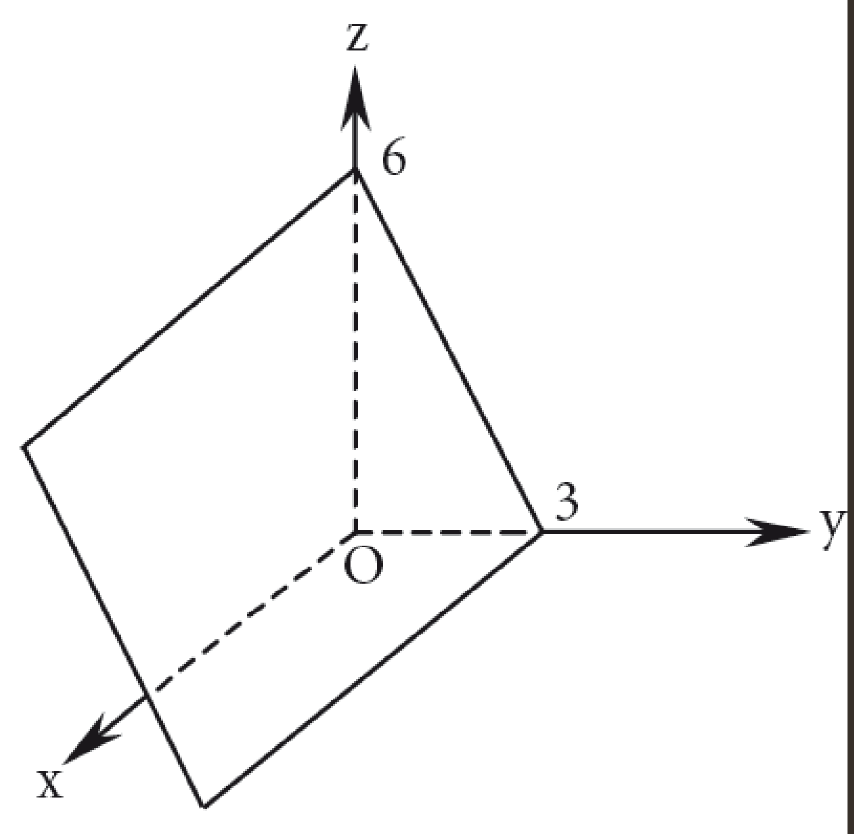


Figura 6.10

Casos 2: $a = 0\ (coeficiente\ de\ x)$

$$4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $z = 0 \rightarrow y = 3$

p/ $y = 0 \rightarrow z = 6$

- Plano não tem ponto comum com eixo x;
- Paralelo ao eixo da variável ausente;

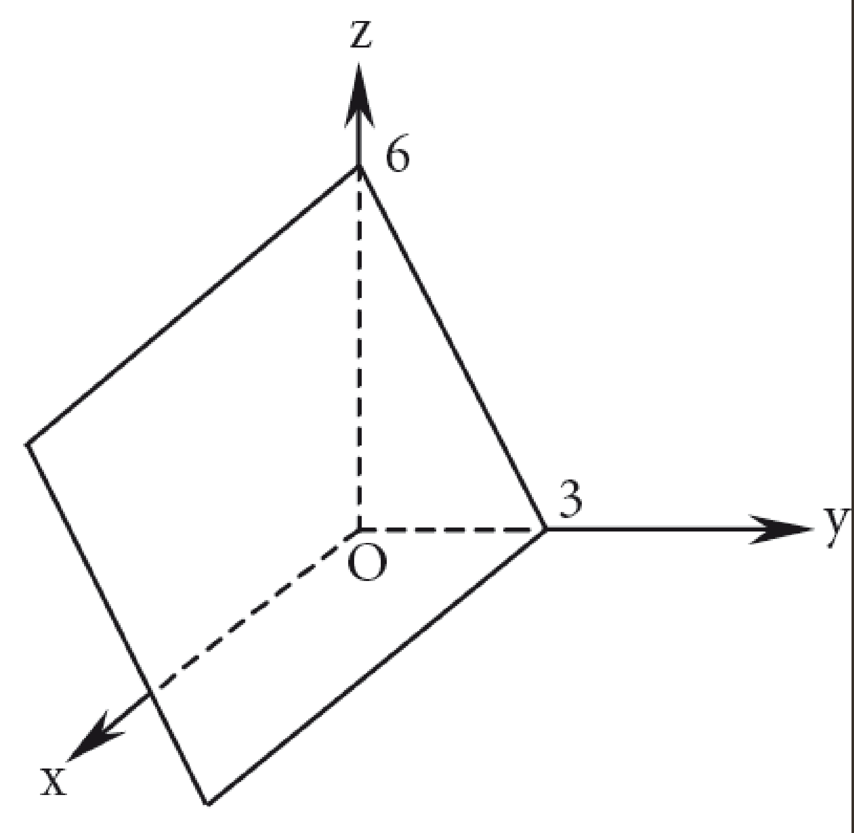


Figura 6.10

Casos 2: $a = 0\ (coeficiente\ de\ x)$

$$4y + 2z - 12 = 0$$

p/ $z = 0 \rightarrow y = 3$

p/ $y = 0 \rightarrow z = 6$

- Plano não tem ponto comum com eixo x;
- Paralelo ao eixo da variável ausente;
- Se $d = 0$ intercepta o eixo da variável ausente.

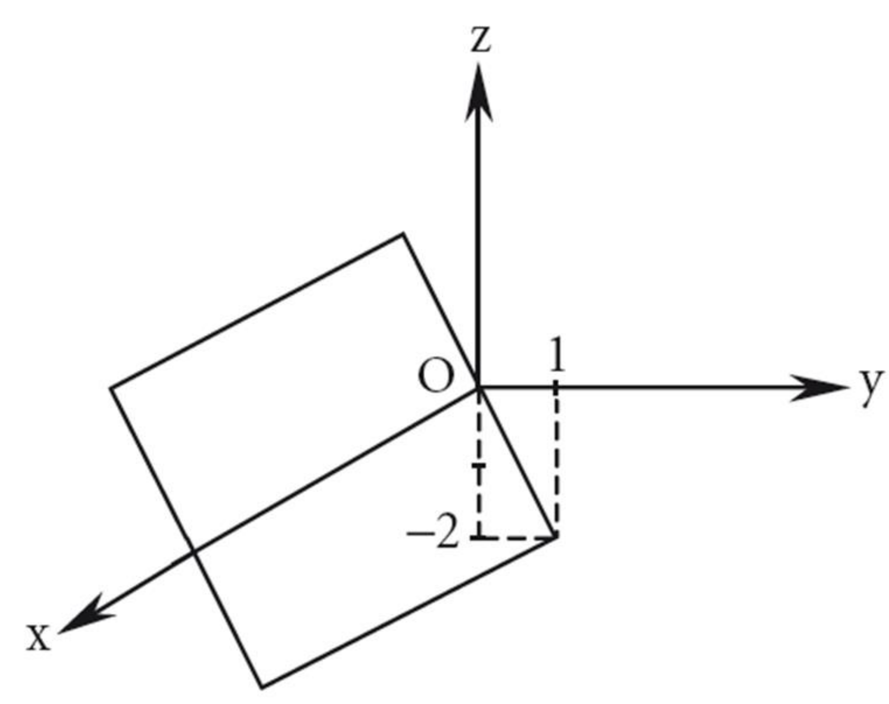


Figura 6.11

Casos 3: $a = b = 0$

$$2z - 12 = 0$$

$$\rightarrow \quad z = 6$$

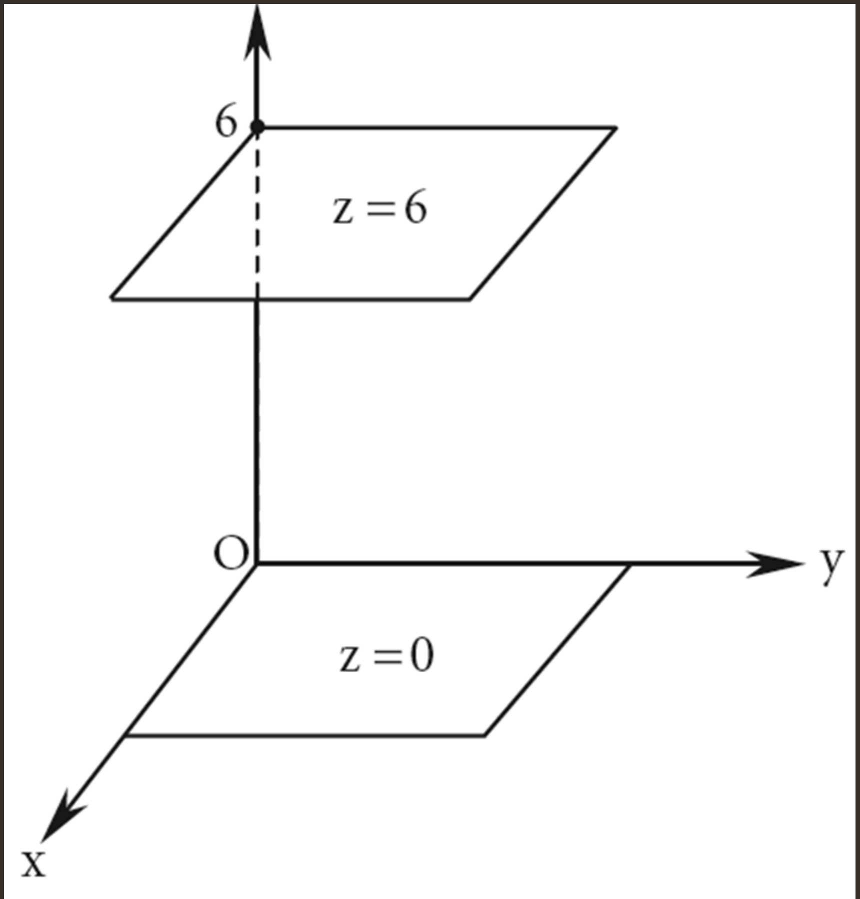


Figura 6.14

Casos 3: $a = b = 0$

$$2z - 12 = 0$$

$$\rightarrow \quad z = 6$$

- Todos os pontos do plano são do tipo $(x, y, 6)$;
- Paralelo ao plano xoy e intercepta $z = 6$

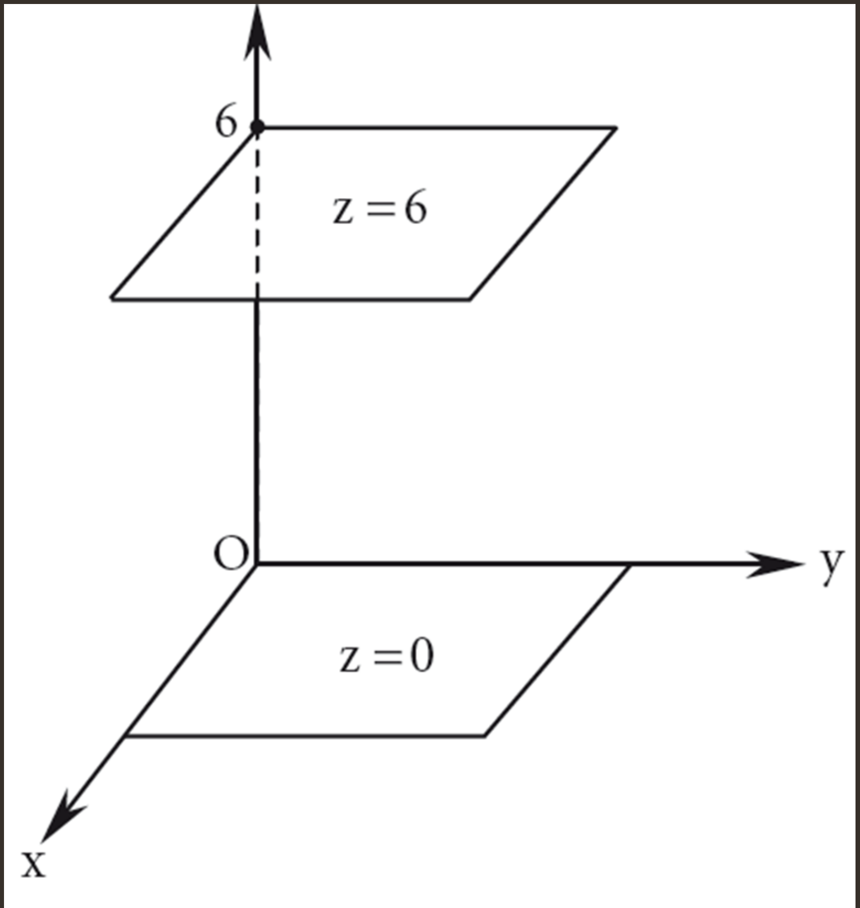


Figura 6.14

Casos 3 – *analogamente*

$$4y - 12 = 0 \;\rightarrow\; y = 3$$

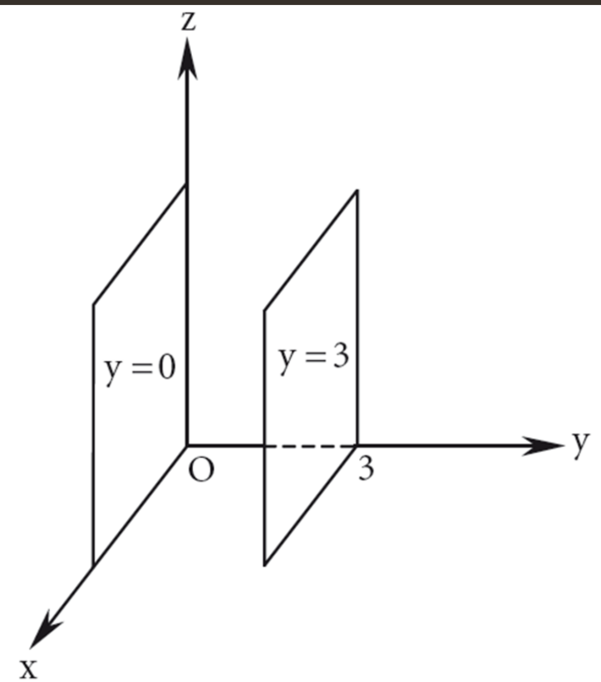


Figura 6.15

Casos 3 – *analogamente*

$$4y - 12 = 0 \ \rightarrow \ y = 3 \qquad\qquad 3x - 12 = 0 \ \rightarrow \ x = 4$$

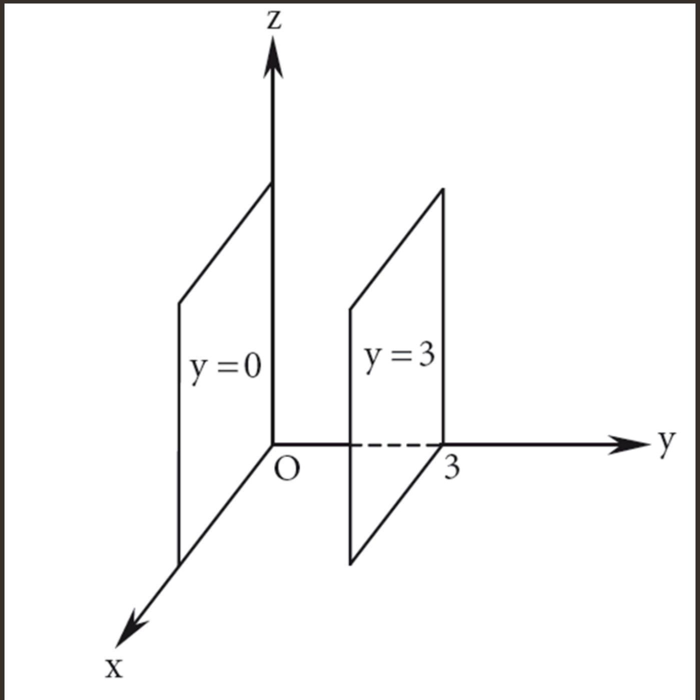


Figura 6.15

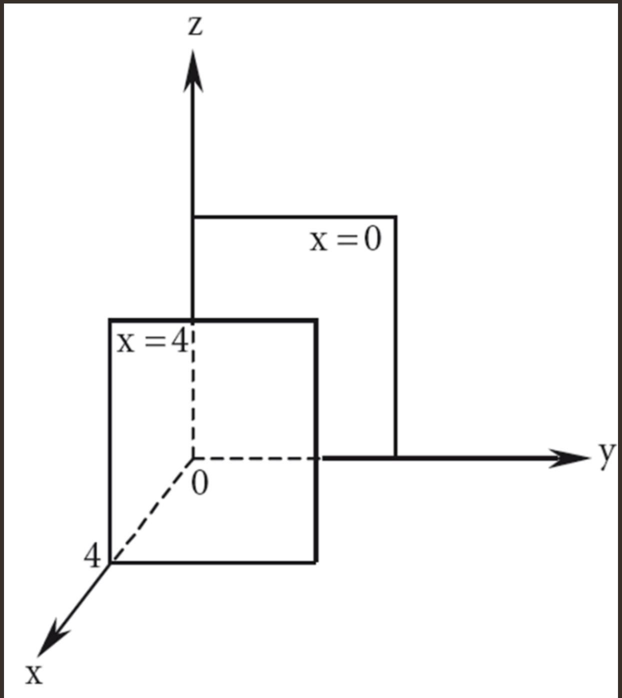


Figura 6.16

Ângulo entre dois planos

Sejam dois planos $\boldsymbol{\pi_1}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi_2}$ com vetores normais $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ $\boldsymbol{e}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$, respectivamente.

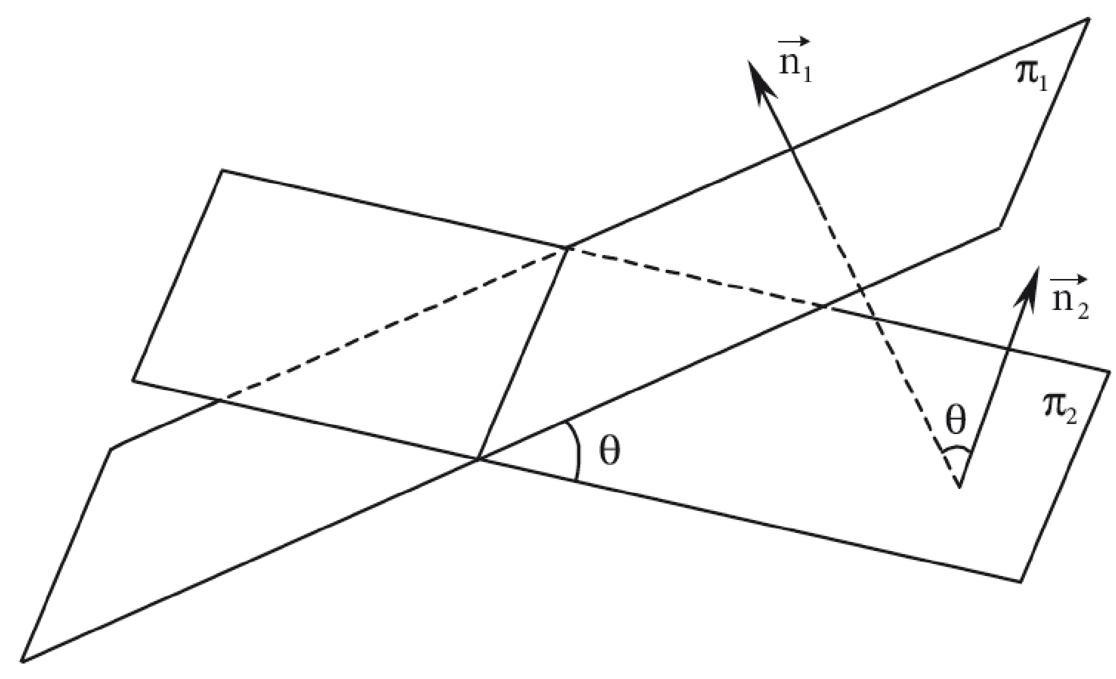


Figura 6.17

Ângulo entre dois planos

O menor ângulo que os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ formam entre si é o ângulo entre planos:

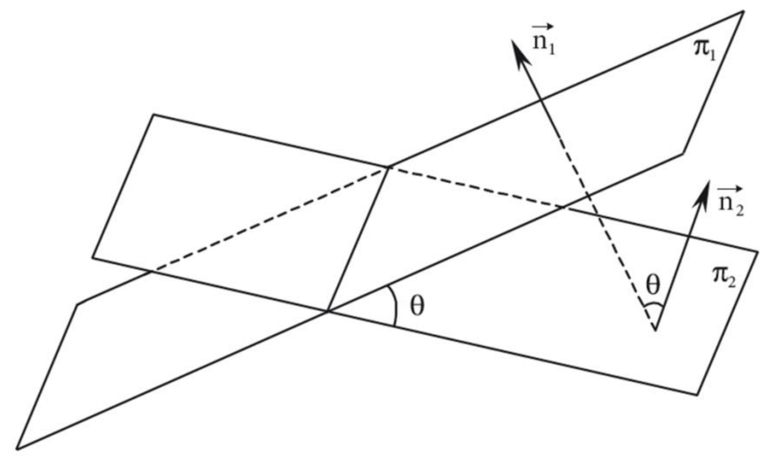


Figura 6.17

Ângulo entre dois planos

O menor ângulo que os vetores $\overrightarrow{n_1}$ e $\overrightarrow{n_2}$ formam entre si é o ângulo entre planos:

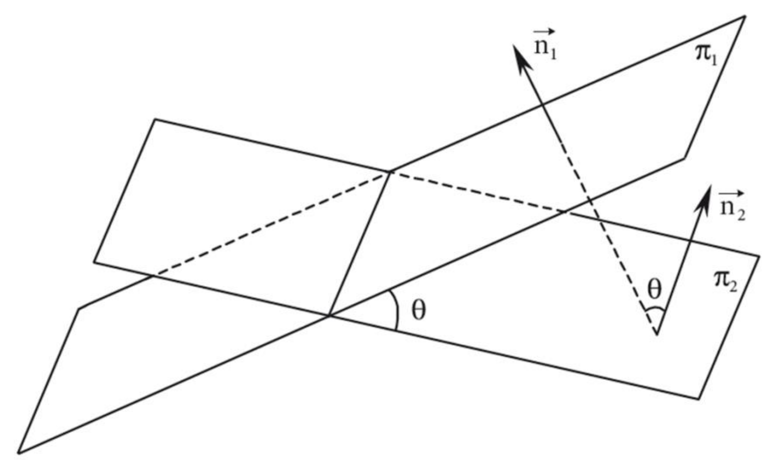


Figura 6.17

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\,|\overrightarrow{n_2}|} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Exemplo 4

Determine o ângulo entre os planos: *resp.: 30º*

$\boldsymbol{\pi_1}$: $\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} + \mathbf{3} = \mathbf{0}$ $\boldsymbol{\pi_2}$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \mathbf{4} = \mathbf{0}$.

Exercício

Determine uma equação geral do plano que seja:

(a) Paralelo ao plano $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{2x - 3y - z + 5 = 0}$ e que contenha o ponto $\boldsymbol{A(4, -2, 1)}$.

$\boldsymbol{Resp.}$: $\mathbf{2x - 3y - z - 13 = 0}$

(b) Perpendicular a reta: $\boldsymbol{Resp.}$: $\mathbf{2x - 3y + 4z - 1 = 0}$

r: $x = 2 + 2t \qquad y = 1 - 3t \qquad z = 4t.$

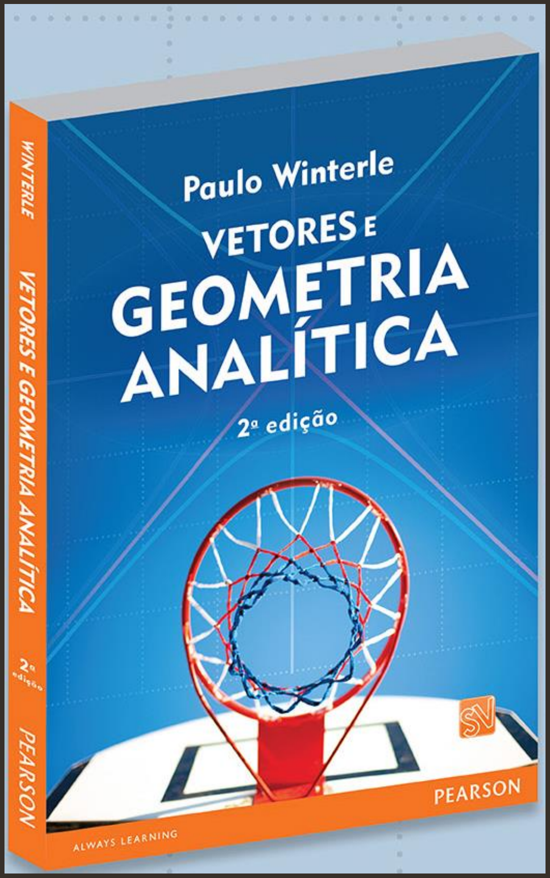
Exercício

(c) Escrever o sistema de equações paramétricas do plano determinado pelos pontos:

$\mathrm{A}(1, 0, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 2, -1)$ e $C(1, 1, -1)$.

$\boldsymbol{Resp.:}$ $\boldsymbol{x = 1 - 2h}$ $\boldsymbol{y = 2h + t}$ $\boldsymbol{z = 2 - 3h - 3t}$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br