Geometria Analítica
Engenharias

Semana 07 – Aula 2
Posições relativas do plano

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares quando o produto escalar entre seus vetores normais é nulo.

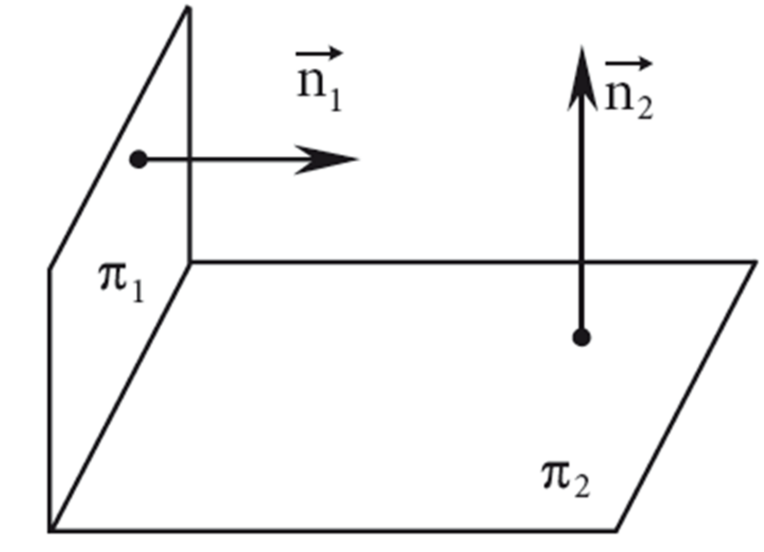


Figura 6.18

Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares quando o produto escalar entre seus vetores normais é nulo.

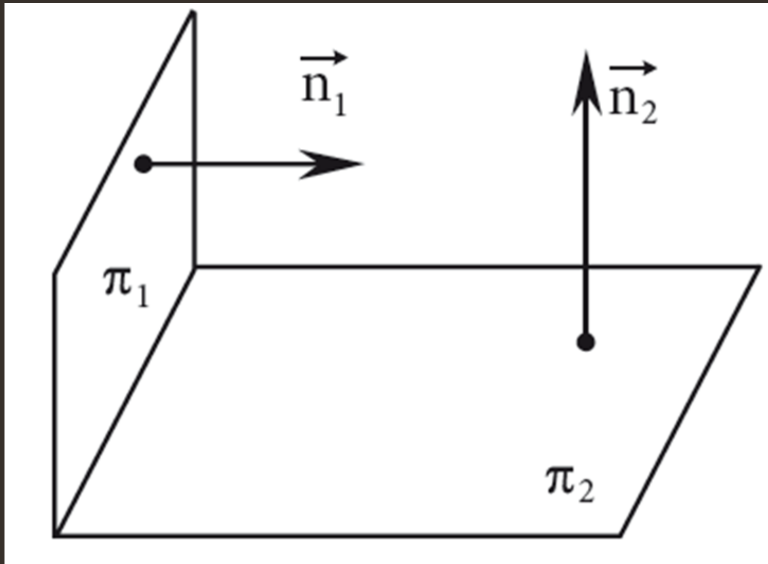


Figura 6.18

$$\pi_1 \perp \pi_2 \iff \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2}$$

$$\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2} = 0$$

Exemplo 1

Verificar se os planos são perpendiculares:

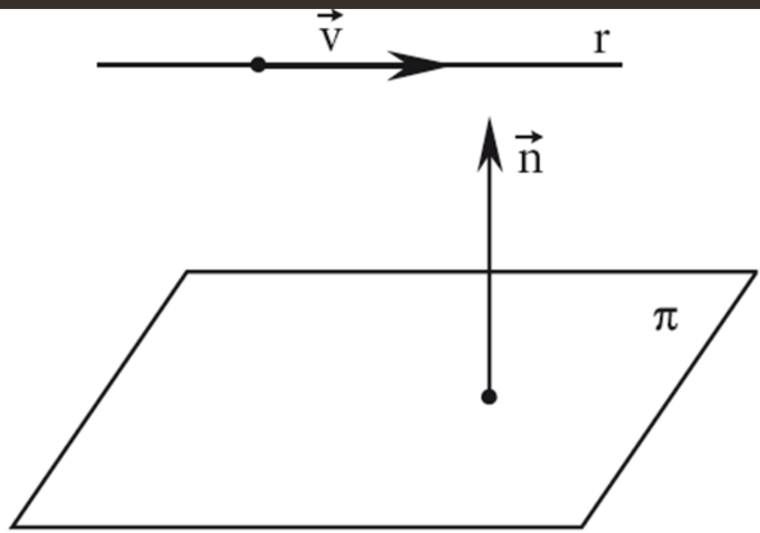
$$\boldsymbol{\pi_1}\text{: } \boldsymbol{x + y - 4 = 0} \qquad \boldsymbol{\pi_2}\text{: } \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 - h + 2t} \\ \boldsymbol{y = h + t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}.$$

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.

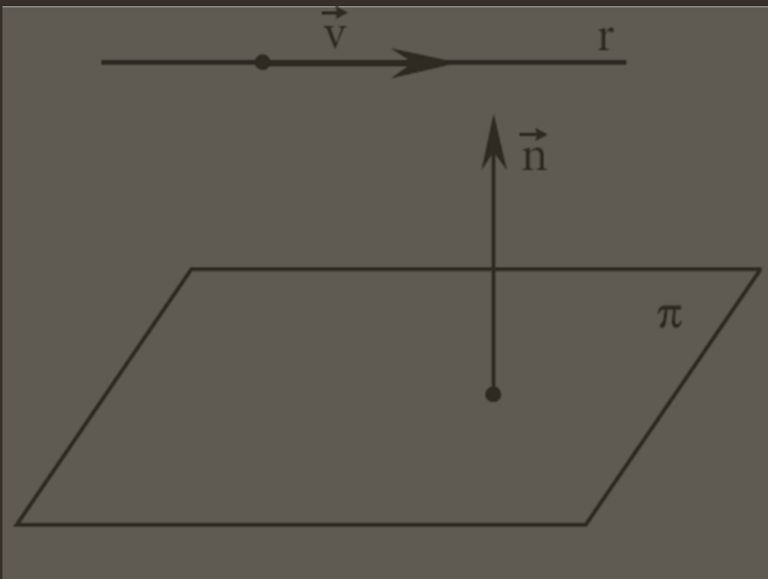


$$\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\pi_2} \;\; \boldsymbol{se} \;\; \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

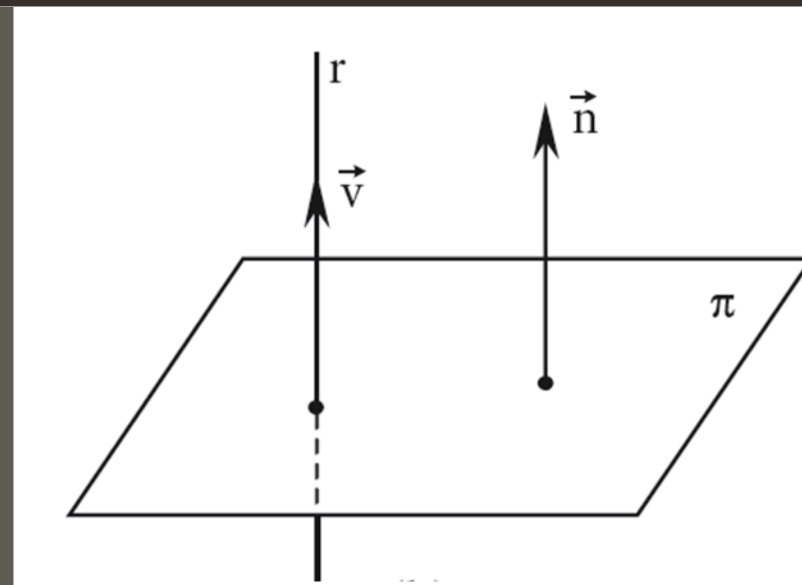
Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.



$$r \parallel \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \perp \vec{n}$$

$$\vec{v} \bullet \vec{n} = 0$$

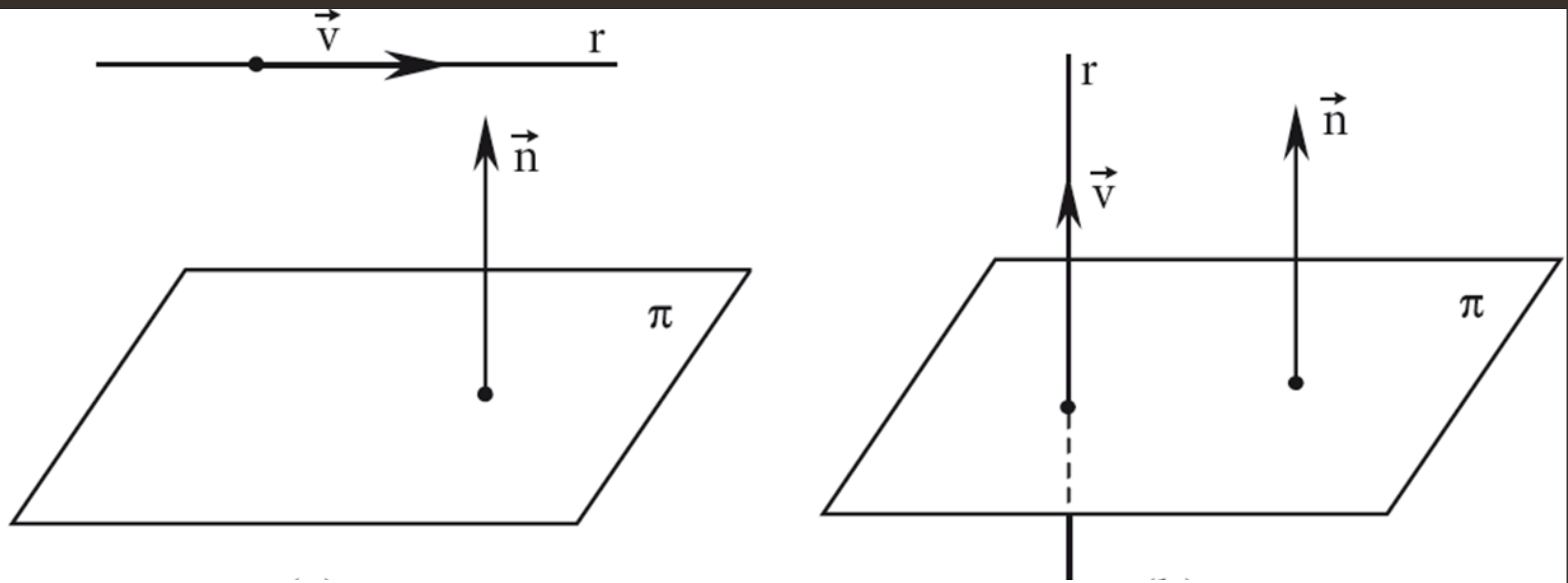


$$r \perp \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \parallel \vec{n}$$

$$\vec{v} = k\vec{n} \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.



$$\boldsymbol{r \parallel \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \perp \vec{n}} \qquad\qquad \boldsymbol{r \perp \pi_2 \;\; se \;\; \vec{v} \parallel \vec{n}}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} \bullet \vec{n} = 0} \qquad\qquad \boldsymbol{\vec{v} = k\vec{n} \quad (k \in \mathbb{R})}$$

Reta contida em um plano

A reta r com direção de $\vec{v}$ está contida no plano π se uma das duas condições for satisfeita:

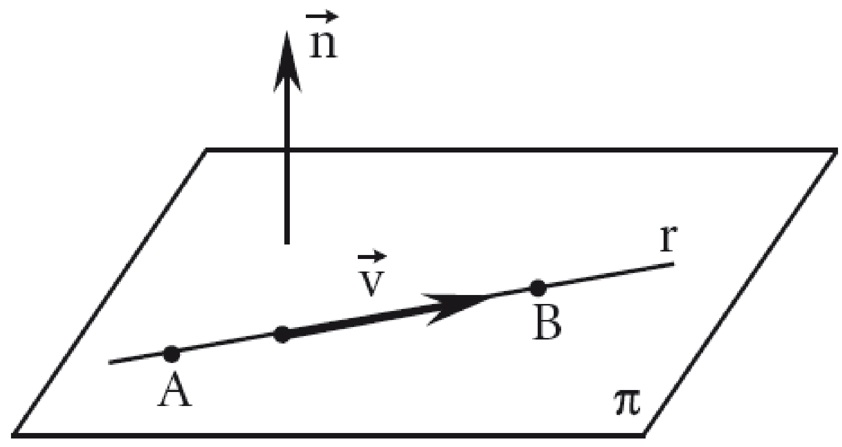


Figura 6.20

Reta contida em um plano

A reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ está contida no plano $\boldsymbol{\pi}$ se uma das duas condições for satisfeita:

I. $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B}$ pertencerem,

simultaneamente, a $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi}$;

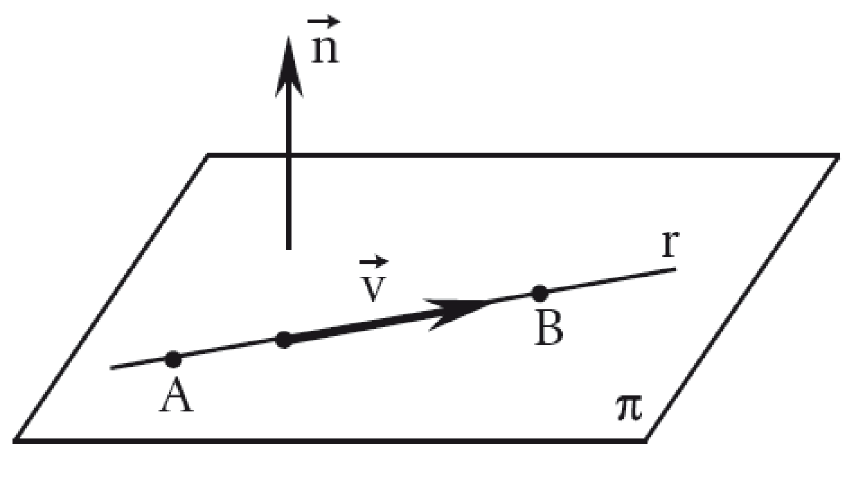


Figura 6.20

Reta contida em um plano

A reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ está contida no plano $\boldsymbol{\pi}$ se uma das duas condições for satisfeita:

I. $\boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{B}$ pertencerem, simultaneamente, a $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi}$;

II. Um ponto pertencer a $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi}$ e ainda $\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$.

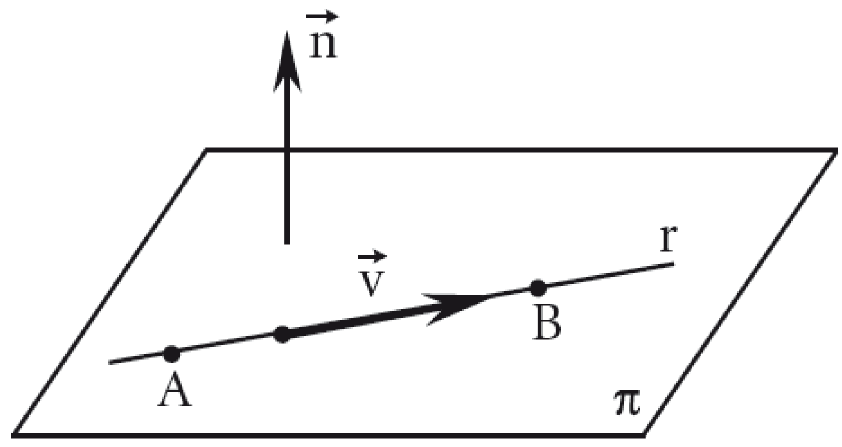


Figura 6.20

Exercício

Obter a equação geral do plano que contenha o ponto $\boldsymbol{A(3,-2,-1)}$ e a reta $\boldsymbol{r}$ definida pelas equações:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{2x + y - z + 7 = 0} \end{cases}$$

Intersecção de dois planos

Sejam dois planos não paralelos e uma reta r .

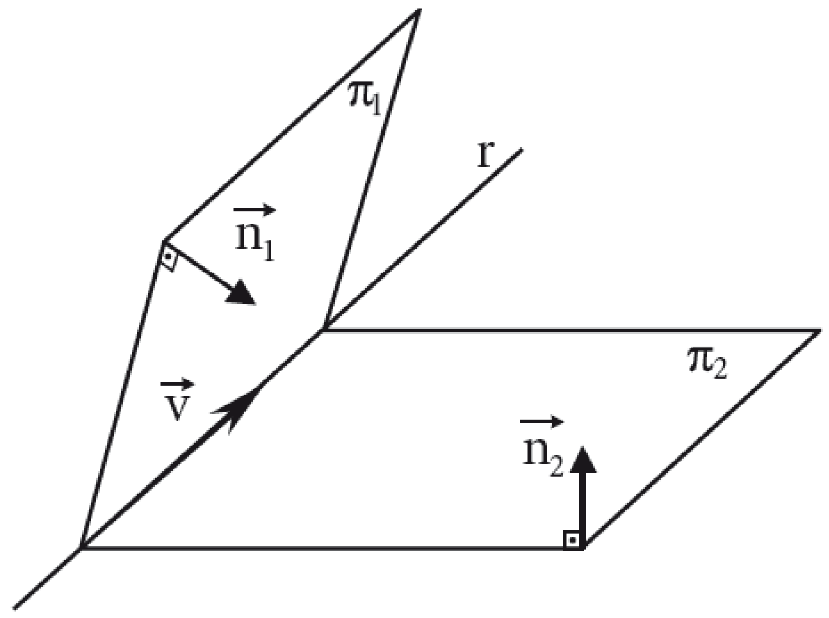


Figura 6.21

Intersecção de dois planos

- A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta $\boldsymbol{r}$ cujas equações se deseja determinar;

- São dois procedimentos básicos para determinar $\boldsymbol{r}$.

Intersecção de dois planos

Procedimento 1

- Coordenadas de $\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz as equações de π_1 e π_2.

Intersecção de dois planos

Procedimento 1

- Coordenadas de $\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz as equações de π_1 e π_2.

Procedimento 2

- Derterminar um ponto $\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e o vetor diretor.

Exemplo 3

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \qquad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \qquad (2) \end{cases}$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: \ 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \ x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Exemplo 3

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x,y,z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: \ 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: \ x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 1 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: & 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: & x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Voltando y na expressão de z: $\quad z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$z = -2x + 4$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 1 ($P(x, y, z) \in r$ satisfaz eqs. π_1 e π_2).

$$\begin{cases} \pi_1: \ 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: \ x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se z: $\quad z = -5x + y + 5$

Em (2): $\quad x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$\boxed{y = 3x - 1}$$

Equações reduzidas de r

Voltando y na expressão de z: $\quad z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$\boxed{z = -2x + 4}$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de r).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de r).

$$\begin{cases} \pi_1: \;\; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \;\; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$se \; x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: \;\; -y + z - 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = y + 5 \\ \pi_2: \;\; +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de π).

$$\begin{cases} \pi_1: \ \ 5x - y + z - 5 = 0 \quad\quad (1) \\ \pi_2: \ \ x + y + 2z - 7 = 0 \quad\quad (2) \end{cases}$$

$$se\ x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: \ \ -y + z - 5 = 0 \ \ \rightarrow \ \ z = y + 5 \\ \pi_2: \ \ +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \ \ \rightarrow \ \ z = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad\quad P(0, -1, 4)$$

Exemplo 3

Pelo procedimento 2 ($\mathrm{P}(x, y, z) \in r$ e vetor diretor de π).

$$\begin{cases} \pi_1: \; 5x - y + z - 5 = 0 \quad (1) \\ \pi_2: \; x + y + 2z - 7 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$se\ x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: \; -y + z - 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = y + 5 \\ \pi_2: \; +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \;\; \rightarrow \;\; z = 4 \\ y = -1 \end{cases} \qquad P(0, -1, 4)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (-3, -9, 6)$$

$$r: \; (x, y, z) = (0, -1, 4) + \mathrm{t}(-3, -9, 6)$$

Exercícios

(a) Calcular os valores de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ para que a reta $\boldsymbol{r}$ esteja contida no plano $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{mx + 2y - 3z + n = 0}$

$$r:\ \ x = -2 + t \qquad y = 3 - 2t \qquad z = 2t.$$

$\boldsymbol{Resp.: m = 10\ \ e\ \ n = 14}$

(b) Encontrar as equações reduzidas na variável $\boldsymbol{x}$ da reta $\boldsymbol{r}$ de intersecção dos planos:

$$\boldsymbol{\pi_1:\ \ x + y - z + 2 = 0 \qquad \pi_2:\ \ x + y + 2z - 1 = 0}$$

$\boldsymbol{Resp.: y = -x - 1 \quad e \quad z = 1}$

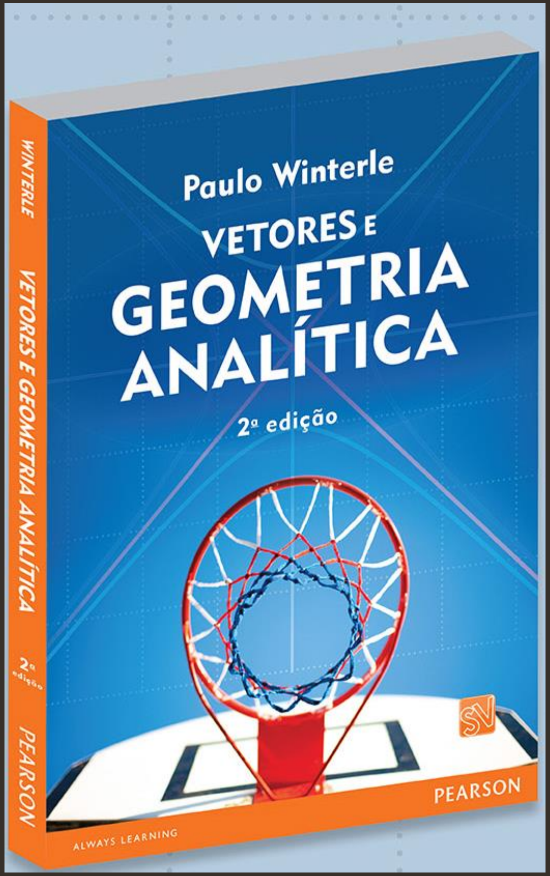
Exercícios

(c) Determinar o ponto de intersecção da reta $\boldsymbol{r}$ de com o plano $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\mathbf{3}\boldsymbol{z}-\mathbf{9}=\mathbf{0}$ $\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{A}(\mathbf{2},-\mathbf{8},-\mathbf{1})$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}-\mathbf{10} \\ \boldsymbol{z}=-\boldsymbol{x}+\mathbf{1} \end{cases}$$

(d) Dada a equação geral de $\boldsymbol{\pi}$: $\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}-\mathbf{6}=\mathbf{0}$ determinar um sistema de equações paramétricas desse plano $\boldsymbol{Resp.}: \boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{z}=-\mathbf{6}+\mathbf{3}\boldsymbol{t}-\mathbf{2}\mathrm{h}$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br