

# **Geometria Analítica**

## **Engenharias**

### **Semana 07 – Aula 2**

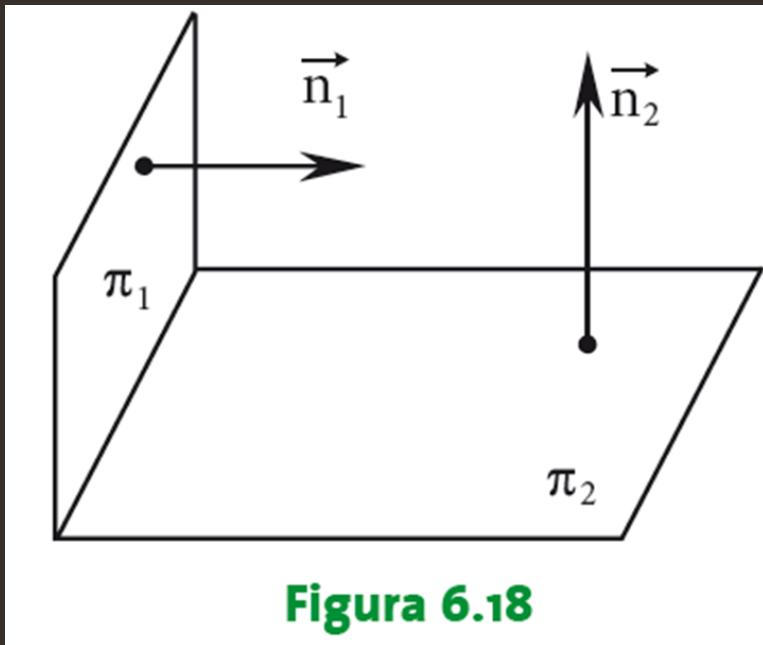
### **Posições relativas do plano**

**Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria**

**henrique.faria@unesp.br**

# Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares quando o produto escalar entre seus vetores normais é nulo.



# Planos perpendiculares

Dois planos são perpendiculares quando o produto escalar entre seus vetores normais é nulo.

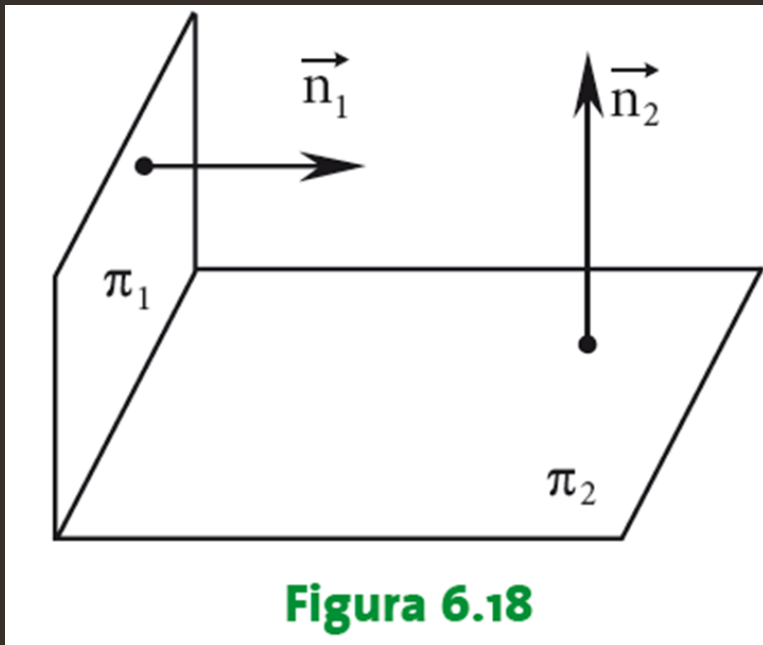


Figura 6.18

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

# Exemplo 1

Verificar se os planos são perpendiculares:

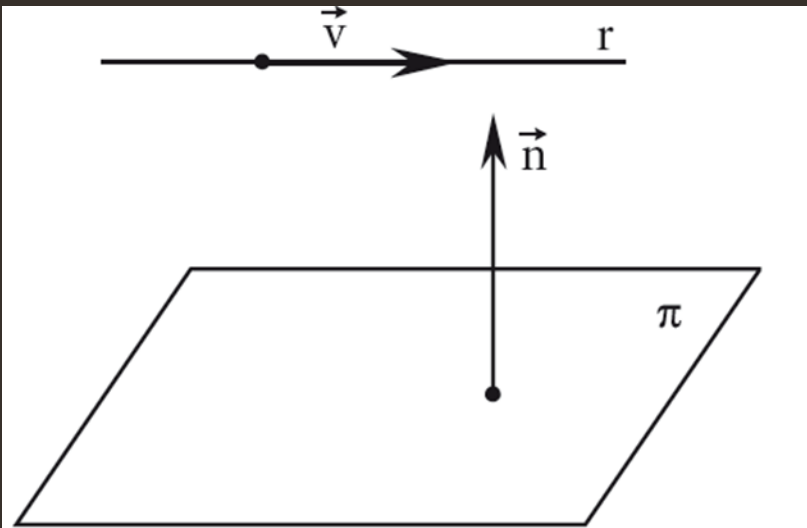
$$\pi_1: x + y - 4 = 0 \quad \pi_2: \begin{cases} x = 2 - h + 2t \\ y = h + t \\ z = t \end{cases} .$$

# Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  e um plano  $\pi$  com vetor normal  $\vec{n}$ .

# Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  e um plano  $\pi$  com vetor normal  $\vec{n}$ .

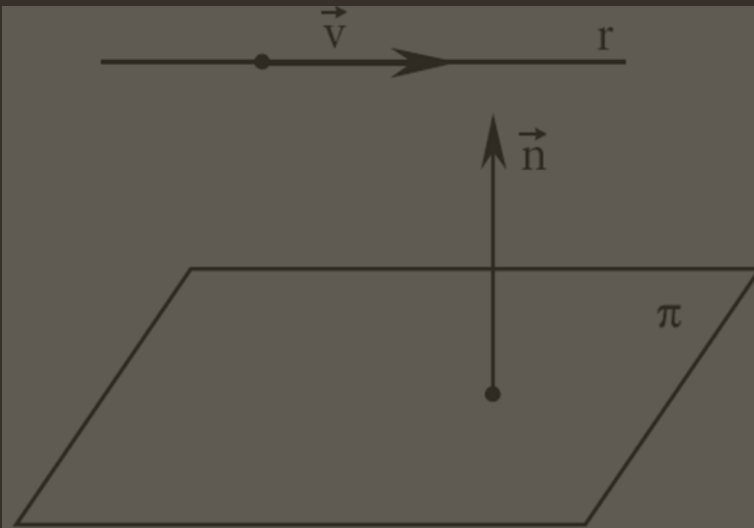


$$r \parallel \pi \text{ se } \vec{v} \perp \vec{n}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

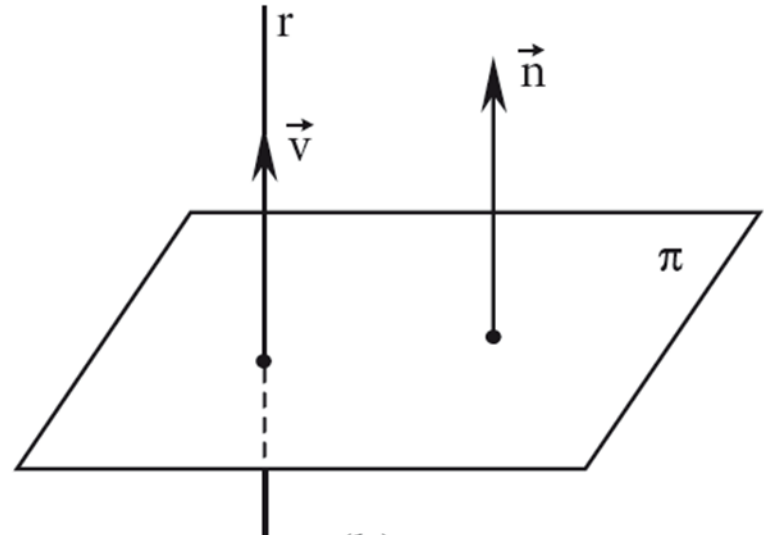
# Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  e um plano  $\pi$  com vetor normal  $\vec{n}$ .



$$r \parallel \pi \text{ se } \vec{v} \perp \vec{n}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

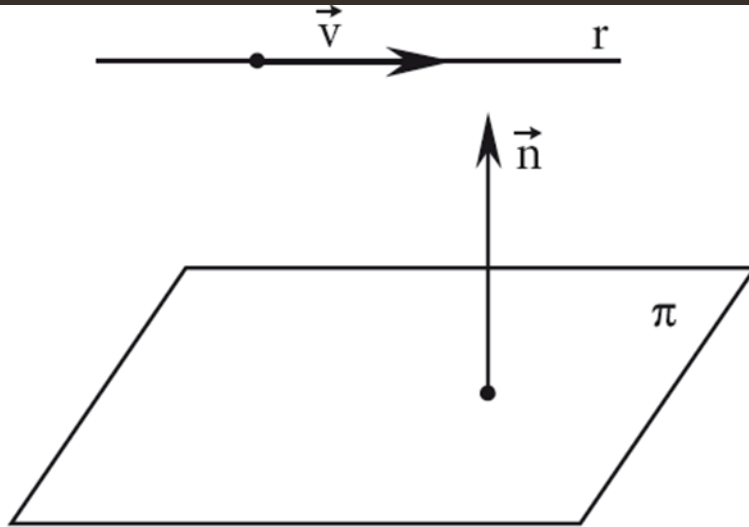


$$r \perp \pi \text{ se } \vec{v} \parallel \vec{n}$$

$$\vec{v} = k\vec{n} \quad (k \in \mathbb{R})$$

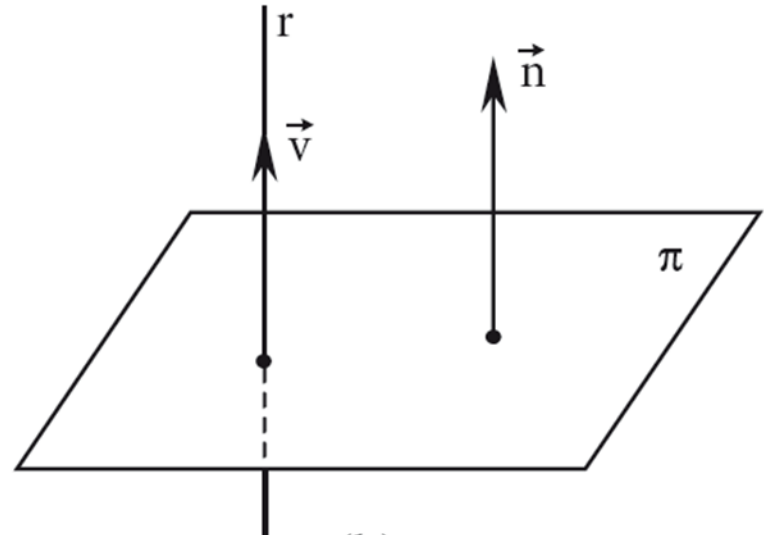
# Paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  e um plano  $\pi$  com vetor normal  $\vec{n}$ .



$$r \parallel \pi \text{ se } \vec{v} \perp \vec{n}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$



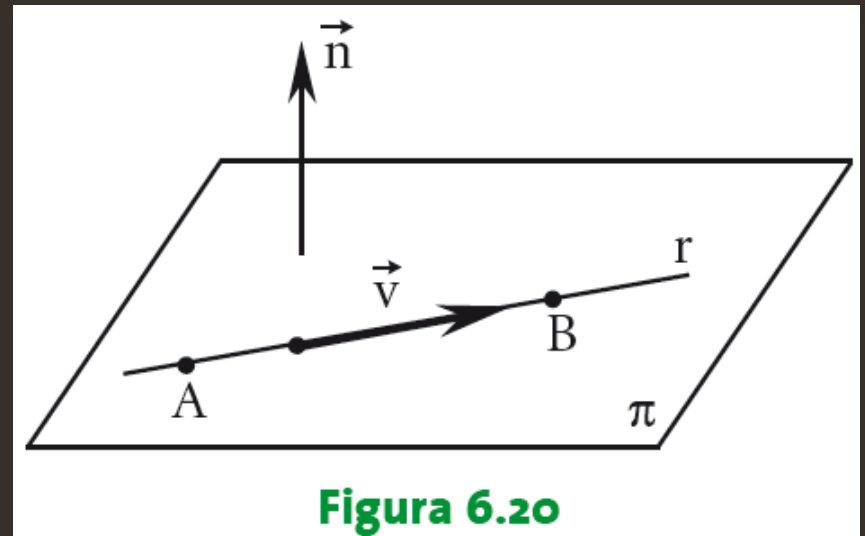
$$r \perp \pi \text{ se } \vec{v} \parallel \vec{n}$$

$$\vec{v} = k\vec{n} \quad (k \in \mathbb{R})$$



# Reta contida em um plano

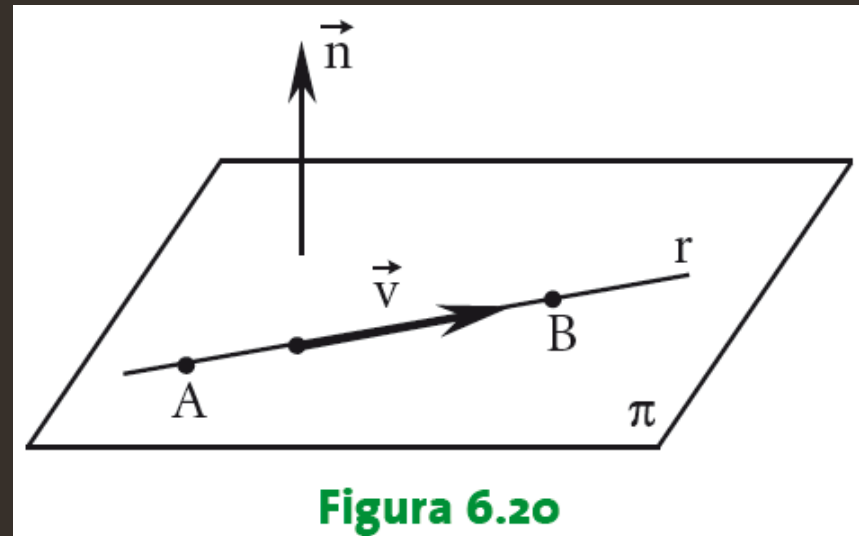
A reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  está contida no plano  $\pi$  se uma das duas condições for satisfeita:



# Reta contida em um plano

A reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  está contida no plano  $\pi$  se uma das duas condições for satisfeita:

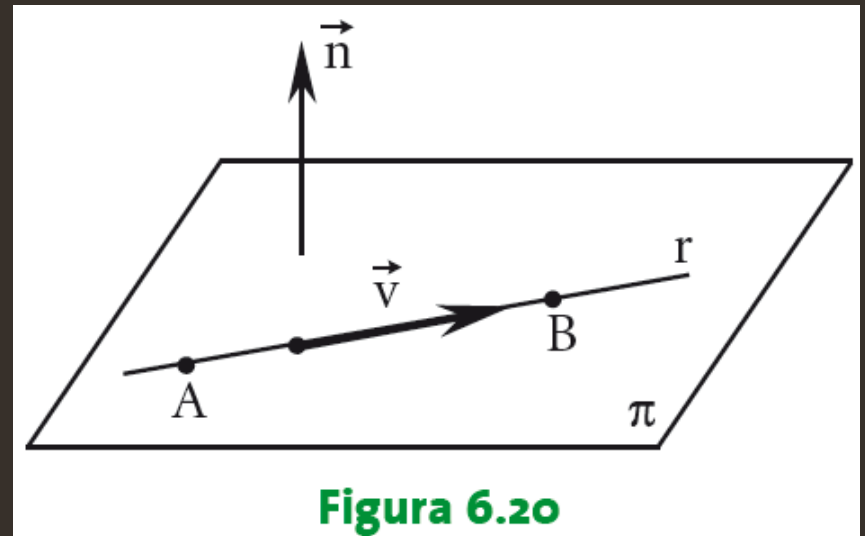
- I.  $A$  e  $B$  pertencerem, simultaneamente, a  $r$  e  $\pi$ ;



# Reta contida em um plano

A reta  $r$  com direção de  $\vec{v}$  está contida no plano  $\pi$  se **uma das duas** condições for satisfeita:

- I.  $A$  e  $B$  pertencerem, simultaneamente, a  $r$  e  $\pi$ ;
- II. Um ponto pertencer a  $r$  e  $\pi$  e ainda  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ .



# Exercício

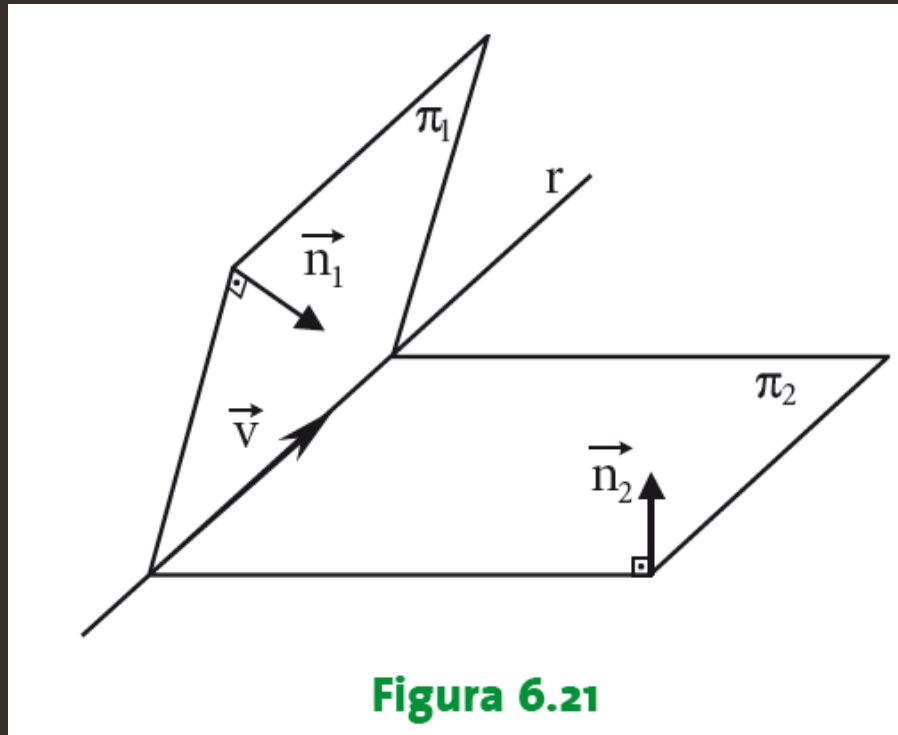
Obter a equação geral do plano que contenha o ponto

$A(3, -2, -1)$  e a reta  $r$  definida pelas equações:

$$r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$$

# Intersecção de dois planos

Sejam dois planos não paralelos e uma reta  $r$ .



# Intersecção de dois planos

- A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta  $r$  cujas equações se deseja determinar;
- São dois procedimentos básicos para determinar  $r$ .

# Intersecção de dois planos

## Procedimento 1

- Coordenadas de  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz as equações de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

# Intersecção de dois planos

## Procedimento 1

- Coordenadas de  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz as equações de  $\pi_1$  e  $\pi_2$ .

## Procedimento 2

- Determinar um ponto  $P(x, y, z) \in r$  e o vetor diretor.



# Exemplo 3

**Pelo procedimento 1** (  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz eqs.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 1** (  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz eqs.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se  $z$ :  $z = -5x + y + 5$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 1** (  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz eqs.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se  $z$ :  $z = -5x + y + 5$

Em (2):  $x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 1** (  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz eqs.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se  $z$ :  $z = -5x + y + 5$

Em (2):  $x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Voltando  $y$  na expressão de  $z$ :  $z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$z = -2x + 4$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 1** (  $P(x, y, z) \in r$  satisfaz eqs.  $\pi_1$  e  $\pi_2$  ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1) isola-se  $z$ :  $z = -5x + y + 5$

Em (2):  $x + y + 2(-5x + y + 5) - 7 = 0$

$$y = 3x - 1$$

Equações reduzidas de  $r$

Voltando  $y$  na expressão de  $z$ :  $z = -5x + 3x - 1 + 5$

$$z = -2x + 4$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 2** ( $P(x, y, z) \in r$  e vetor diretor de  $r$ ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 2** ( $P(x, y, z) \in r$  e vetor diretor de  $r$ ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{se } x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: -y + z - 5 = 0 \rightarrow z = y + 5 \\ \pi_2: +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

# Exemplo 3

**Pelo procedimento 2** ( $P(x, y, z) \in r$  e vetor diretor de  $\pi$ ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{se } x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: -y + z - 5 = 0 \rightarrow z = y + 5 \\ \pi_2: +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \rightarrow z = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad P(0, -1, 4)$$



# Exemplo 3

**Pelo procedimento 2** ( $P(x, y, z) \in r$  e vetor diretor de  $\pi$ ).

$$\begin{cases} \pi_1: 5x - y + z - 5 = 0 & (1) \\ \pi_2: x + y + 2z - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{se } x = 0 \quad \begin{cases} \pi_1: -y + z - 5 = 0 \rightarrow z = y + 5 \\ \pi_2: +y + 2z - 7 = 0 \rightarrow y + 2(y + 5) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 5 = 0 \rightarrow z = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad P(0, -1, 4)$$

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-3, -9, 6)$$

$$r: (x, y, z) = (0, -1, 4) + t(-3, -9, 6)$$

# Exercícios

(a) Calcular os valores de  $m$  e  $n$  para que a reta  $r$  esteja contida no plano  $\pi$ :  $mx + 2y - 3z + n = 0$

$$r: x = -2 + t \quad y = 3 - 2t \quad z = 2t.$$

$$\text{Resp.: } m = 10 \text{ e } n = 14$$

(b) Encontrar as equações reduzidas na variável  $x$  da reta  $r$  de intersecção dos planos:

$$\pi_1: x + y - z + 2 = 0 \quad \pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\text{Resp.: } y = -x - 1 \text{ e } z = 1$$

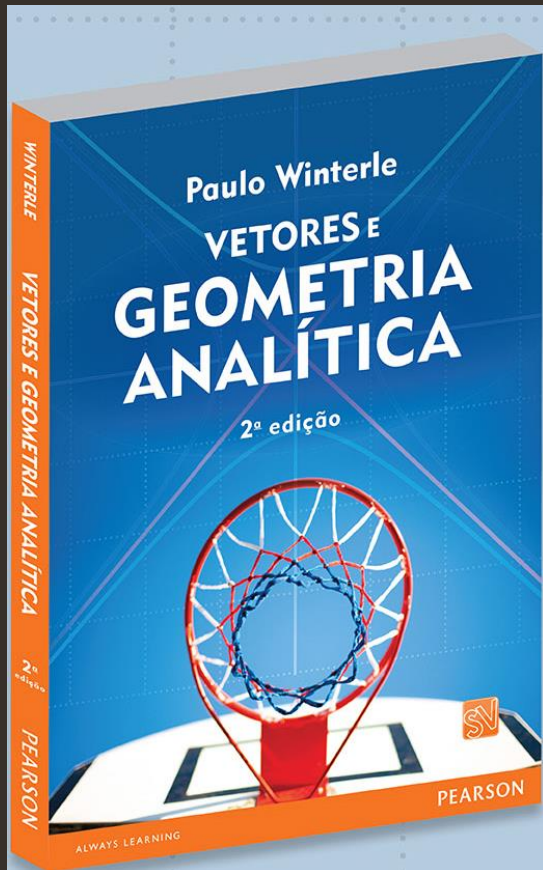
# Exercícios

(c) Determinar o ponto de intersecção da reta  $r$  de com o plano  $\pi$ :  $2x - y + 3z - 9 = 0$       *Resp.:*  $A(2, -8, -1)$

$$r: \begin{cases} y = x - 10 \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

(d) Dada a equação geral de  $\pi$ :  $3x - 2y - z - 6 = 0$  determinar um sistema de equações paramétricas desse plano      *Resp.:*  $x = t$      $y = h$     e     $z = -6 + 3t - 2h$

# Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2<sup>a</sup> ed.

# Contato



[profhenriquefaria.com](http://profhenriquefaria.com)



[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)