

Cálculo I

Licenciatura em Química

Regras para Integração

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Relembrando conceitos

Teorema fundamental do cálculo

- Ambas as partes do **Teorema Fundamental do Cálculo** estabelecem conexões entre as antiderivadas e as integrais.
- Relembrando o Teorema Fundamental do Cálculo:

Teorema fundamental do cálculo

Se f for contínua em $[a, b]$ e $F(x)$ for antiderivada de f em $[a, b]$, então:

Teorema fundamental do cálculo

Se f for contínua em $[a, b]$ e $F(x)$ for antiderivada de f em $[a, b]$, então:

Parte 1.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Teorema fundamental do cálculo

Se f for contínua em $[a, b]$ e $F(x)$ for antiderivada de f em $[a, b]$, então:

Parte 1.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Parte 2.

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Em que F é a antiderivada de f , ou: $F'(x) = f(x)$.

1 Integral indefinida

A integral indefinida é uma notação para expressar a **antiderivada ou primitiva de uma função**:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

significa: $F'(x) = f(x)$

C é uma constante

1 Integral indefinida

A integral indefinida é uma notação para expressar a **antiderivada ou primitiva de uma função**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

significa: $F'(x) = f(x)$

C é uma constante

Antiderivada
ou primitiva de $f(x)$

Exemplo - determinar $f(x)$

a. Seja $F(x) = \frac{1}{3}x^3$

Exemplo - determinar $f(x)$

a. Seja $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3}x^3 \right] = x^2$

Exemplo - determinar $f(x)$

a. Seja $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3}x^3 \right] = x^2$

➤ Mas, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de $f(x)$;

Exemplo - determinar $f(x)$

a. Seja $F(x) = \frac{1}{3}x^3 \rightarrow f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3}x^3 \right] = x^2$

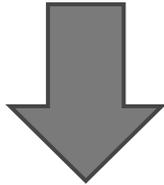
➤ Mas, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ não é a única antiderivada de $f(x)$;

➤ Ao ser somada uma constante C a $F(x)$, também tem-se outra antiderivada:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C \rightarrow F'(x) = f(x) = x^2$$

Integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

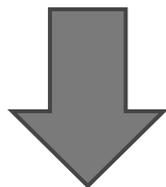


Família de funções

C é uma constante

Integral indefinida

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

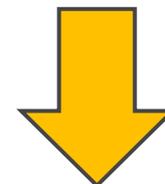


Família de funções

C é uma constante

Integral definida

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Número Real

2 Principais antiderivadas (primitivas)

➤ $\int k dx = kx + C$ k, C são constantes

➤ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $n \neq -1$

➤ $\int e^x dx = e^x + C$

➤ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

➤ $\int \text{sen}x dx = -\text{cos}x + C$

➤ $\int \text{cos}x dx = \text{sen}x + C$

Exemplos - encontrar a primitiva. Que é o mesmo que resolver a integral indefinida.

a) $\int 4 \cos x \, dx$

b) $\int (x + x^2) \, dx$

c) $\int \left(\frac{t^2 - 2t^4}{t^4} \right) dt$

d) $\int \left(\sqrt{1 + x^2} \right) 2x \, dx$

Para resolver esta integral teremos que utilizar a técnica da substituição de variável.

$$d) \int (\sqrt{1 + x^2}) 2x dx$$

Técnicas de integração

Técnicas de integração

- ✓ Possibilitam a resolução de integrais que não possuem uma primitiva imediata;
- ✓ São equivalentes inversas das técnicas de derivação;

Técnicas de integração

- ✓ Possibilitam a resolução de **integrais que não possuem uma primitiva imediata**;
- ✓ São equivalentes inversas das técnicas de derivação;
- ✓ Duas dessas técnicas, **constante vezes uma função e soma de funções na derivada**, ficaram evidentes nas **propriedades das integrais**;
- ✓ **Resta então**, definir as técnicas correspondentes à **regra do produto, da cadeia e do quociente**.

Integração por substituição ou mudança de variável

A - Integração por substituição

Se uma função $F = F(g(x))$, depender de outra função, então pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

A - Integração por substituição

Se uma função $F = F(g(x))$, depender de outra função, então pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Calculando-se a integral da derivada retorna-se a primitiva

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

A - Integração por substituição

Substituindo $g(x) = u \rightarrow du = g'(x)dx$, tem-se:

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = \int F'(u) du = F(u) + C$$

A - Integração por substituição

Substituindo $g(x) = u \rightarrow du = g'(x)dx$, tem-se:

$$\int F'(g(x))g'(x) dx = \int F'(u) du = F(u) + C$$

Como $F' = f$:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

A - Integração por substituição

Se $g(x) = u$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo $[a, b]$ e f for contínua em $[a, b]$:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du$$

A - Integração por substituição

Se $g(x) = u$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo $[a, b]$ e f for contínua em $[a, b]$:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u)du$$

Essa técnica funciona sempre que a integral puder ser escrita na forma:

$$\int f(g(x))g'(x) dx$$

Exemplo - Resolver por substituição de variável

$$2d) \rightarrow a) \int (\sqrt{1+x^2}) 2x dx$$

Exemplo 2 - Resolver por substituição de variável

$$a) \int (x^2 + 1)^{50} 2x dx$$

$$b) \int \cos(5x) dx$$

$$c) \int \frac{1}{(x - 8)^5} dx$$

$$d) \int \sen^2 x \cos x dx$$

B – Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:

B – Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:
 1. Calcular primeiro a **integral indefinida** com substituição; **voltar a variável original** e avaliar nos limites.

B - Substituição na integral definida

- Deve-se atentar para os limites de integração;
- Existem dois procedimentos para o cálculo:
 1. Calcular primeiro a **integral indefinida** com substituição; **voltar a variável original** e avaliar nos limites.
 2. **Ajustar os limites de integração** na substituição da variável. **(mais direto)**

Teorema para o método 2

5.9.1 TEOREMA *Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua em um intervalo contendo os valores de $g(x)$ com $a \leq x \leq b$, então*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Exemplo 3 - Resolver por substituição de variável utilizando-se dos dois procedimentos

$$a) \int_0^2 x(x^2 + 1)^3 dx$$

$$b) \int_0^{\ln 3} e^x(1 + e^x)^{1/2} dx$$

This page contains handwritten mathematical notes and diagrams. At the top, there are several equations involving variables like x , y , and z , possibly related to a coordinate system or a specific problem.

In the center, there is a diagram of a cone with a vertical axis and a circular base. The cone is shown in a perspective view, with its apex at the top and its base at the bottom. The vertical axis is labeled with z .

Below the cone, there are several graphs and plots. On the left, there is a graph showing a curve that starts at the origin and curves upwards, resembling a parabola. The axes are labeled with x and y . In the middle, there is a larger graph showing a complex, wavy curve that oscillates around a horizontal axis. On the right, there is another graph showing a curve that starts at the origin and curves upwards, similar to the one on the left.

The bottom section of the page contains several more graphs and diagrams. On the left, there is a graph showing a curve that starts at the origin and curves upwards, with a vertical axis labeled z . In the middle, there is a graph showing a curve that starts at the origin and curves upwards, with a vertical axis labeled z . On the right, there is a graph showing a curve that starts at the origin and curves upwards, with a vertical axis labeled z .

The text is written in a cursive, handwritten style. The equations and graphs are scattered across the page, with some overlapping. The overall appearance is that of a student's work or a researcher's notes.

Para depois desta aula:

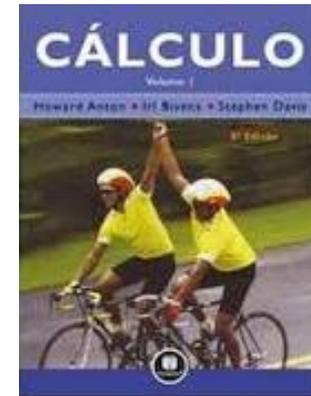
- Reler o tópico da aula no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Acessar a lista de exercícios no link: [site lista](#).

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br