Capítulo 8 - Cônicas
Aula 2 - Elipse

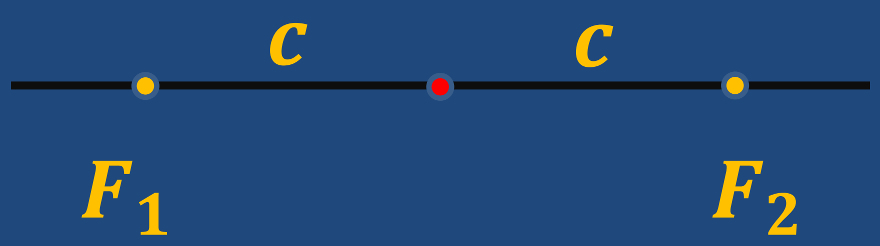
Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

Elipse

Elipse

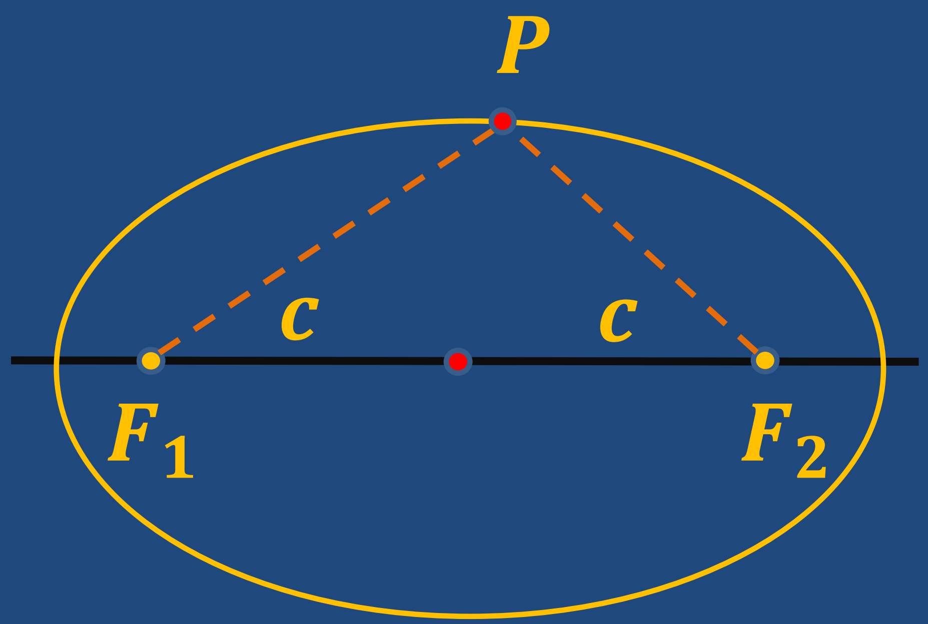
Sejam dois pontos F_1 e F_2 em que a distância entre estes é expressa por: $d(F_1, F_2) = 2c$



Elipse

Sejam dois pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ em que a distância entre estes é expressa por: $\boldsymbol{d(F_1, F_2) = 2c}$

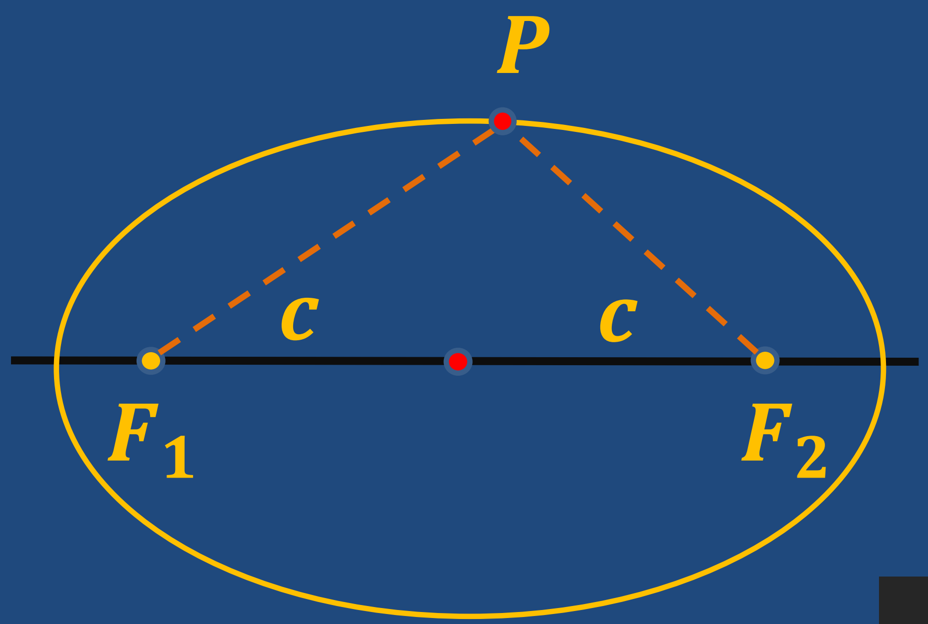
Estabelecendo como fixa a soma das distâncias $\boldsymbol{d(F_1, P)}$ e $\boldsymbol{d(F_2, P)}$, constrói-se a curva seguinte:



Elipse

Sejam dois pontos F_1 e F_2 em que a distância entre estes é expressa por: $d(F_1, F_2) = 2c$

Estabelecendo como fixa a soma das distâncias $d(F_1, P)$ e $d(F_2, P)$, constrói-se a curva seguinte:

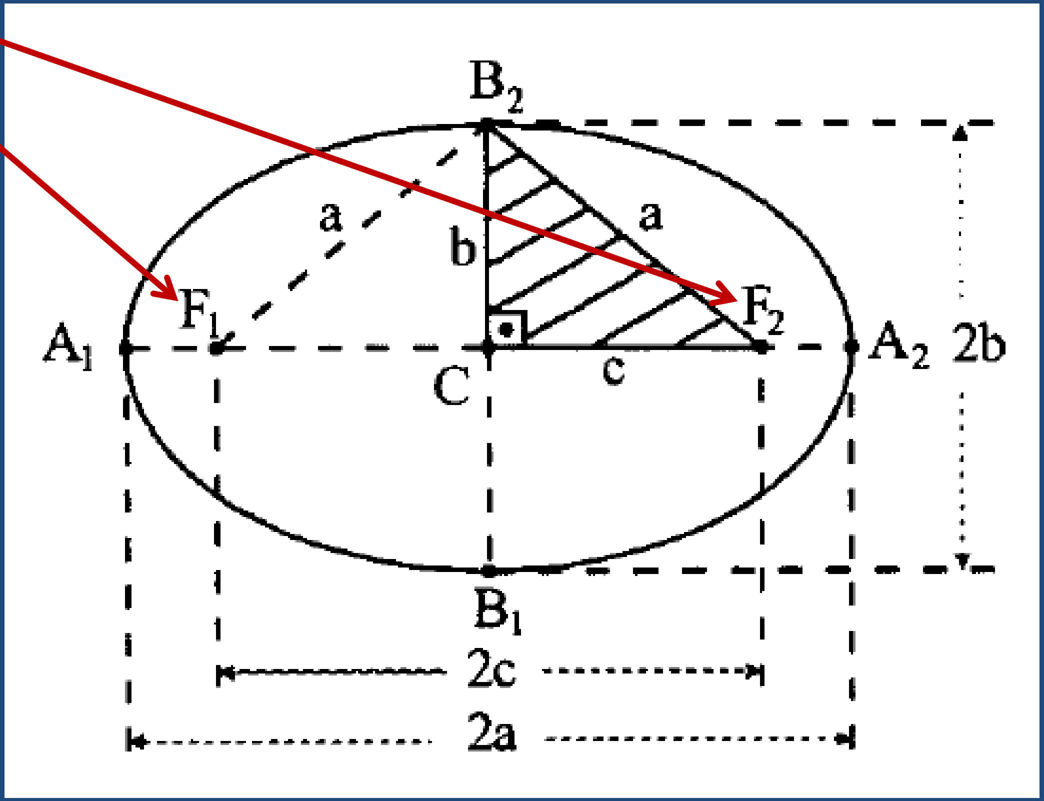


Elipse é o conjunto de todos os pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

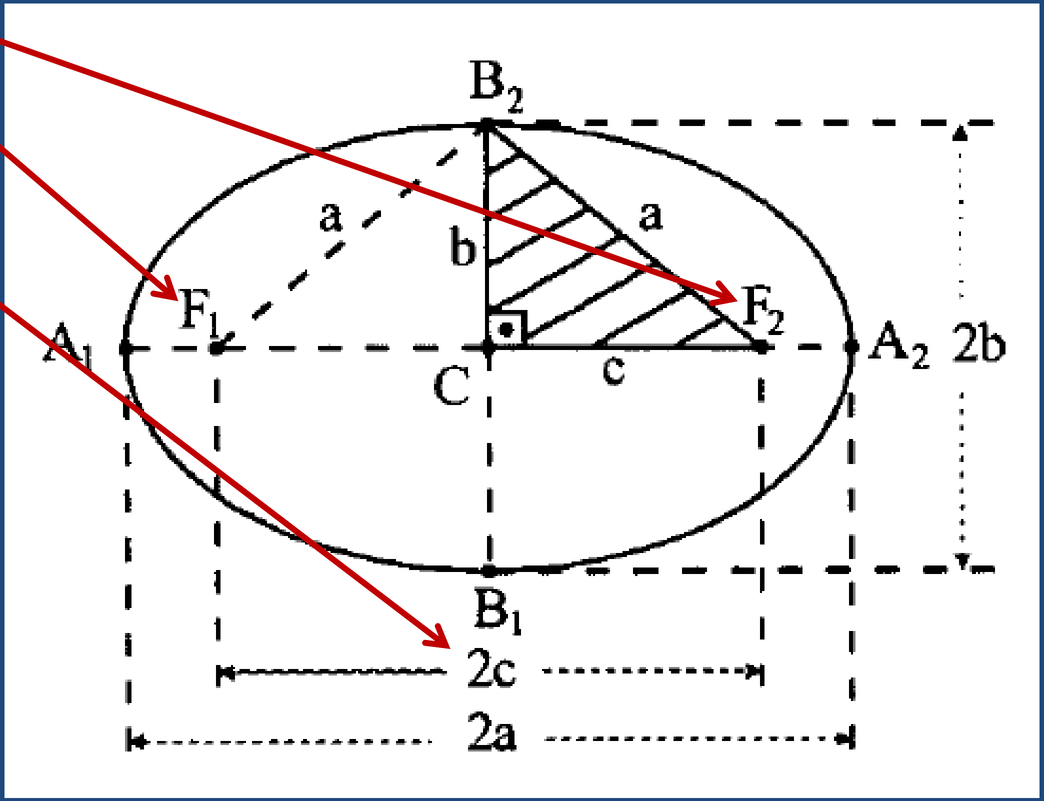
Elementos da Elipse

- **Focos:** F_1 e F_2
- **Distância Focal:** $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:** C
- **Eixo maior:** $2a$
- **Eixo menor:** $2b$
- **Vértices:** A_1, A_2, B_1, B_2



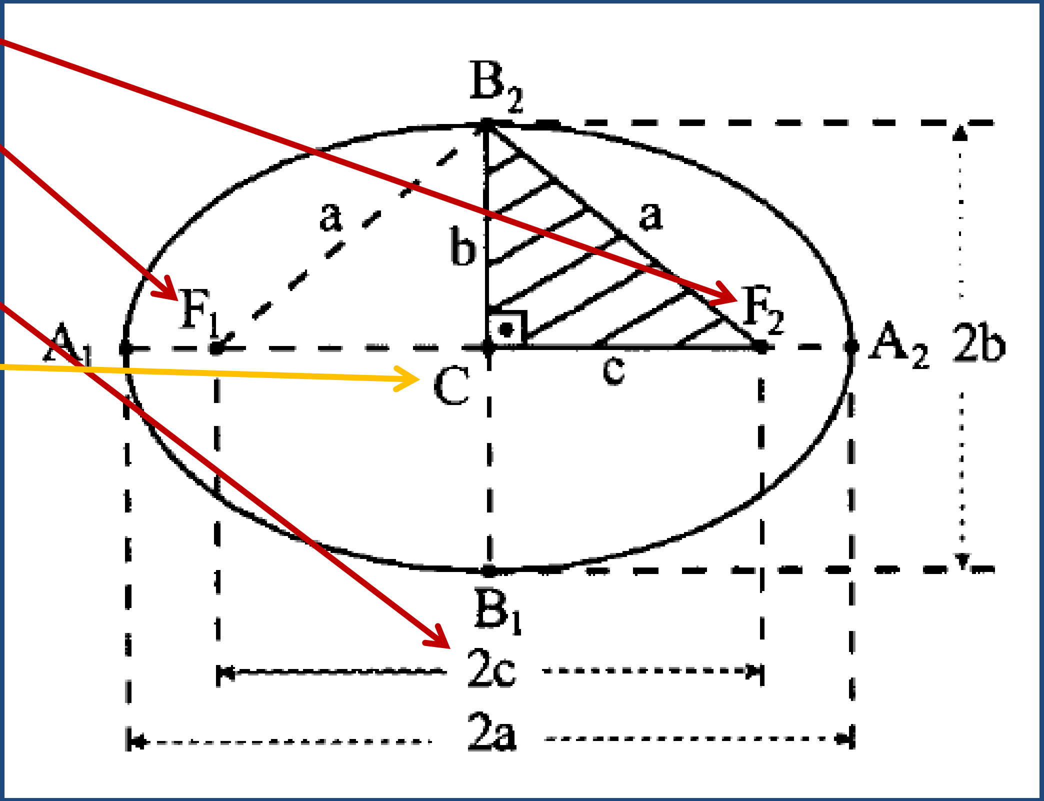
Elementos da Elipse

- **Focos:** F_1 e F_2
- **Distância Focal:** $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:** C
- **Eixo maior:** $2a$
- **Eixo menor:** 2b
- **Vértices:** A_1, A_2, B_1, B_2



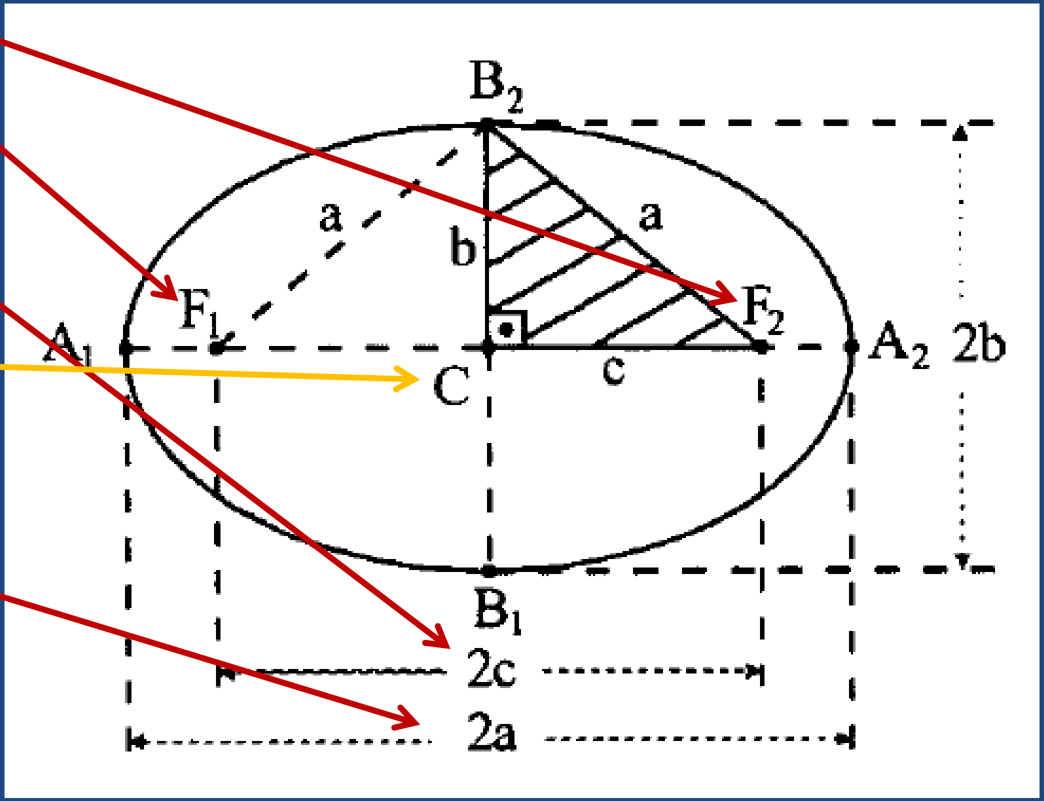
Elementos da Elipse

- **Focos:** F_1 e F_2
- **Distância Focal:** $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:** C
- **Eixo maior:** $2a$
- **Eixo menor:** 2b
- **Vértices:** A_1, A_2, B_1, B_2



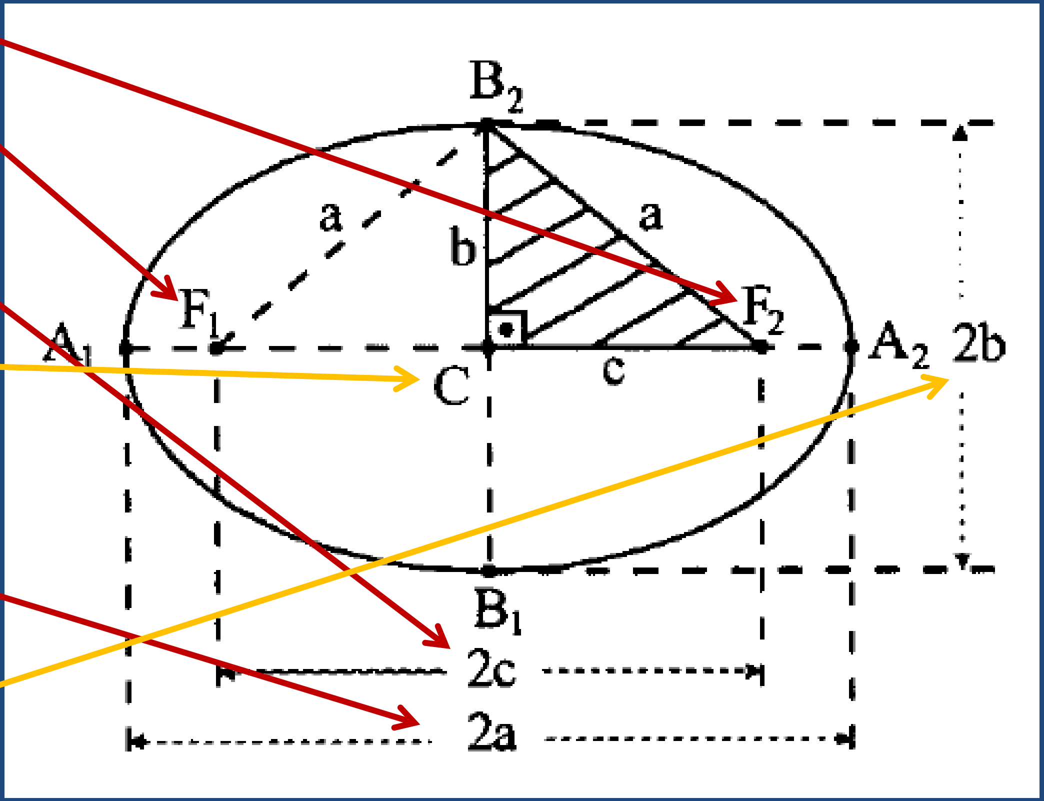
Elementos da Elipse

- Focos: F_1 e F_2
- Distância Focal: $d(F_1, F_2) = 2c$
- Centro: C
- Eixo maior: $2a$
- Eixo menor: 2b
- Vértices: A_1, A_2, B_1, B_2



Elementos da Elipse

- **Focos:** F_1 e F_2
- **Distância Focal:** $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:** C
- **Eixo maior:** $2a$
- **Eixo menor:** $2b$
- **Vértices:** A_1, A_2, B_1, B_2



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade da elipse

Número real $0 < e < 1$ obtido pela razão:

$$e = \frac{c}{a}$$

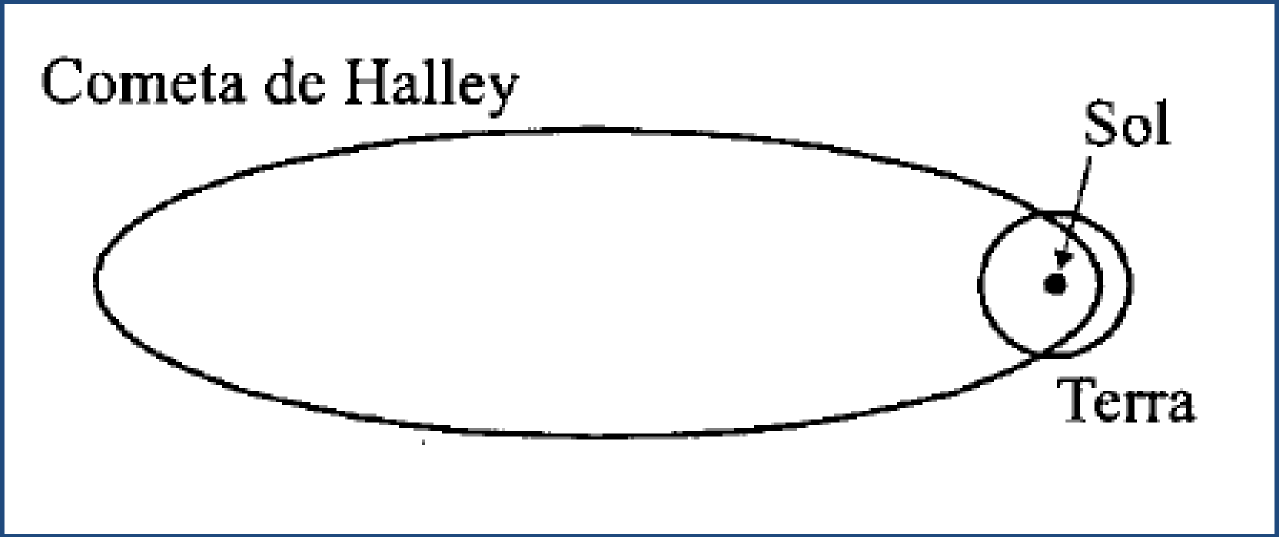
A excentricidade é responsável pela forma da elipse.

- $e \cong 0$ se aproximam de uma circunferência;
- $e \cong 1$ elipses achatadas.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Excentricidade da elipse

O corpo com órbita mais excêntrica no sistema solar é o cometa Halley: $\boldsymbol{e = 0,967}$. Ele leva 76 anos para completar uma volta em torno do sol (revolução).



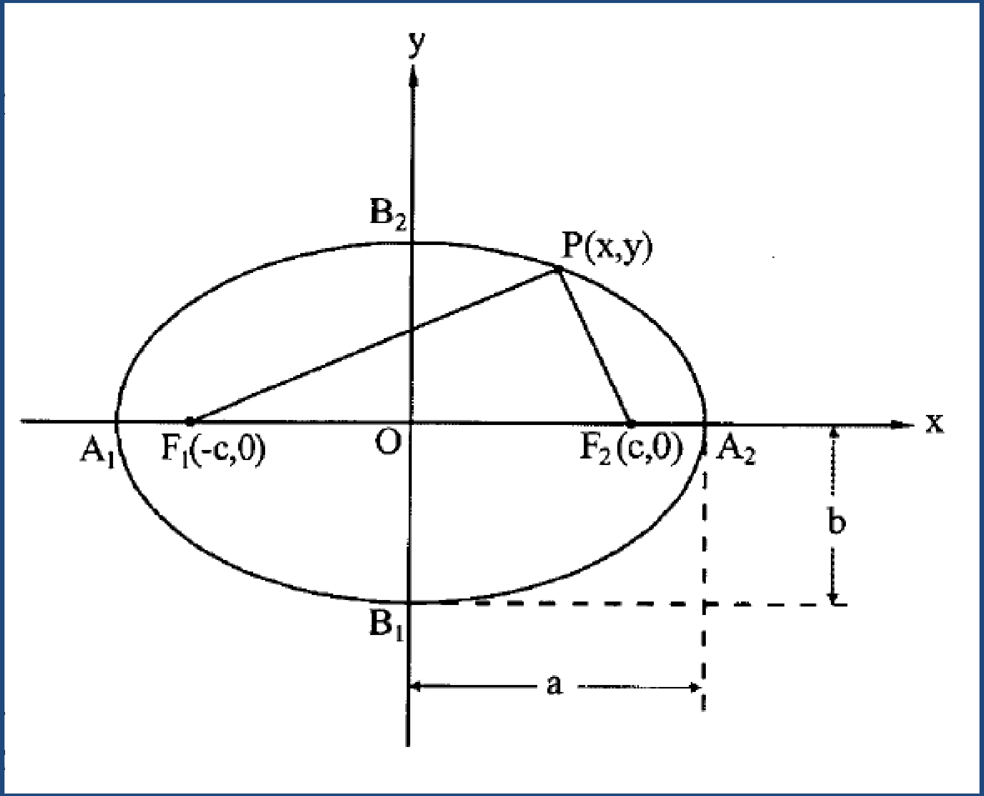
Enquanto a excentricidade da órbita da terra em torno do sol: $\boldsymbol{e = 0,02.}$

Equação reduzida da elipse

1º Caso: Eixo maior sobre o eixo x.

Focos: $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$



Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

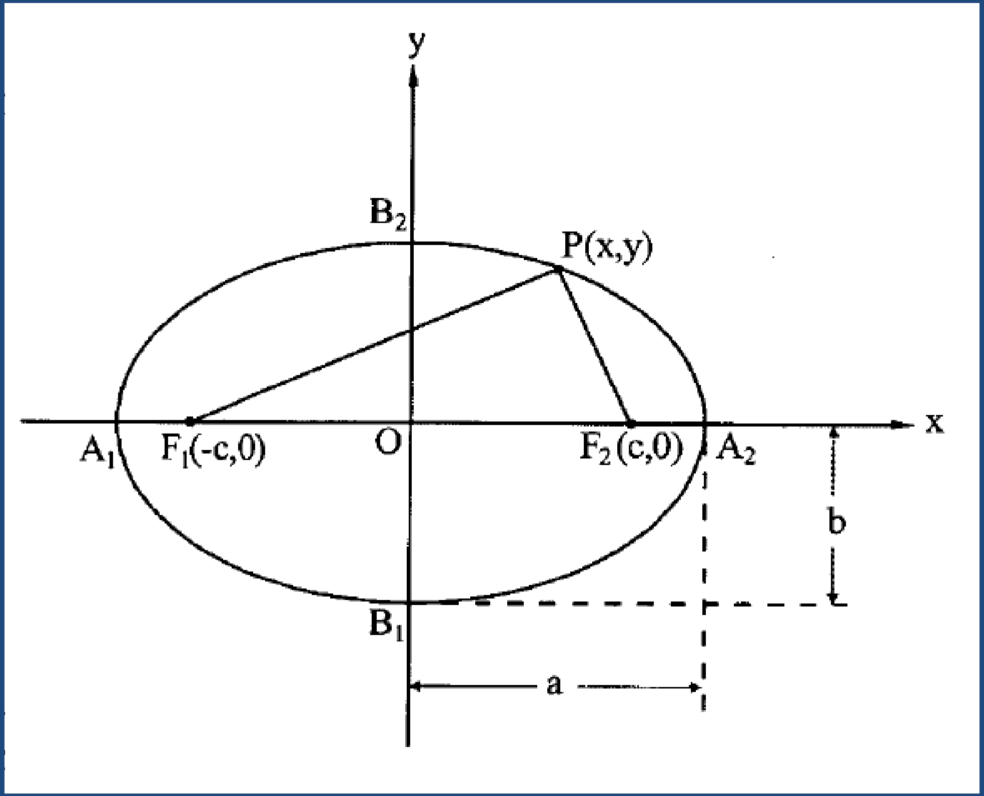
$$|(x, y) - (-c, 0)| + |(x, y) - (c, 0)| = 2a$$

Equação reduzida da elipse

<u>1º Caso:</u> Eixo maior sobre o eixo x.

Focos: $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$



Pela definição:

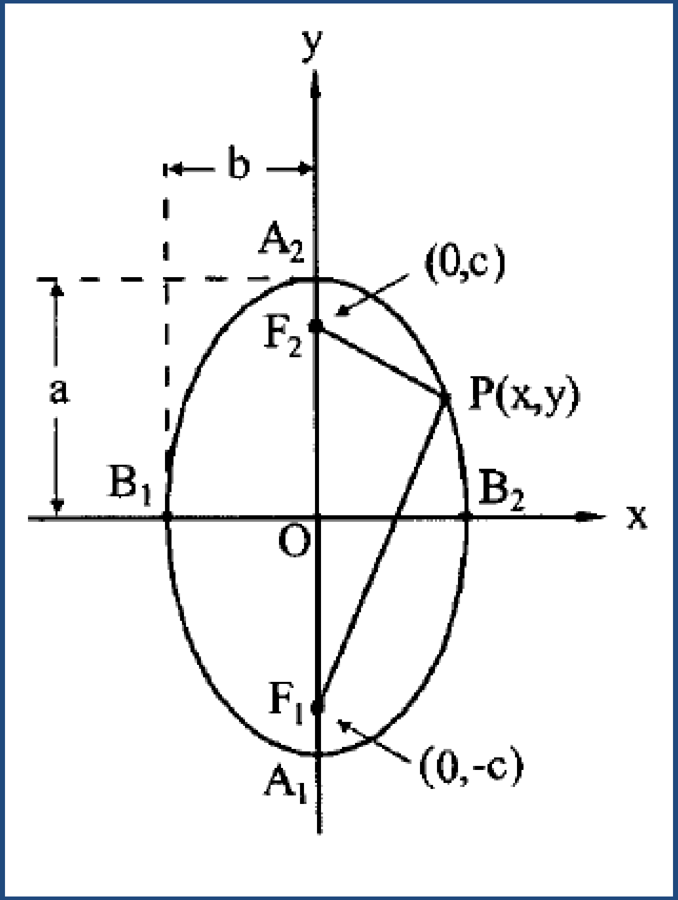
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

$$|(x, y) - (-c, 0)| + |(x, y) - (c, 0)| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação reduzida da Elipse



2º Caso: Eixo maior sobre o eixo y.

Foco: $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$

Pela definição:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$

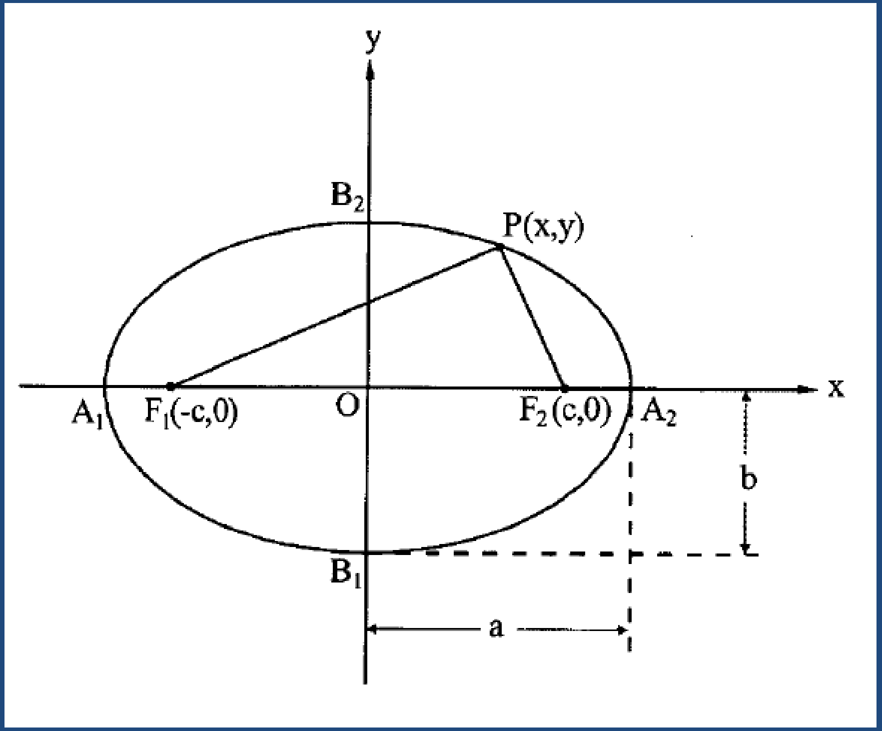
Fazer como exercício em casa ...

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Como identificar o eixo maior?

Na representação, sempre para elipse: $a > b$

Então:



Como identificar o eixo maior

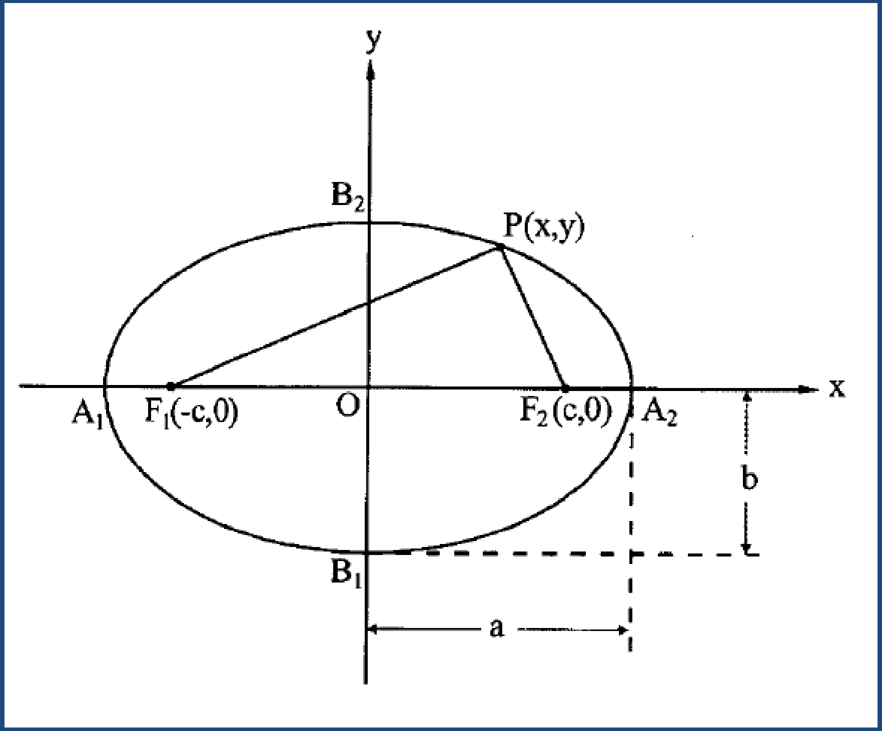
Na representação, sempre para elipse: $a > b$

Então:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eixo maior

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Exemplo 1

Resp.: $F_1\left(0, -\sqrt{12}\right)$ $\boldsymbol{e = 0,86}$

Determine para a elipse $\boldsymbol{4x^2 + y^2 - 16 = 0}$.

a) A medida dos semieixos; b) Os Focos

c) A excentricidade; d) O esboço do gráfico

Exercício em classe

Resp.: $F_1(\sqrt{7}, 0)$ $\boldsymbol{e = \frac{\sqrt{7}}{4}}$

Determine para a elipse $\boldsymbol{9x^2 + 16y^2 - 144 = 0}$.

a) A medida dos semieixos; b) Os Focos

c) A excentricidade; d) O esboço do gráfico

Translação de eixos

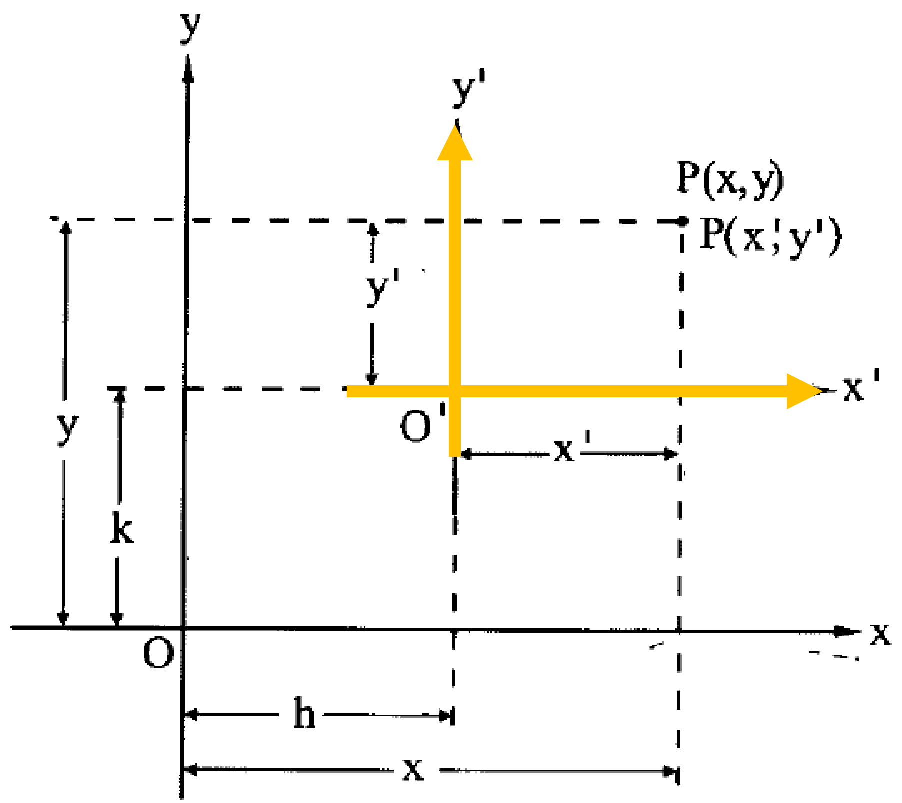


Figura 8.15

- $\boldsymbol{P(x, y)}$ plano $\boldsymbol{xoy}$;
- $\boldsymbol{P(x', y')}$ plano $\boldsymbol{x'oy'}$;
- Da figura:

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

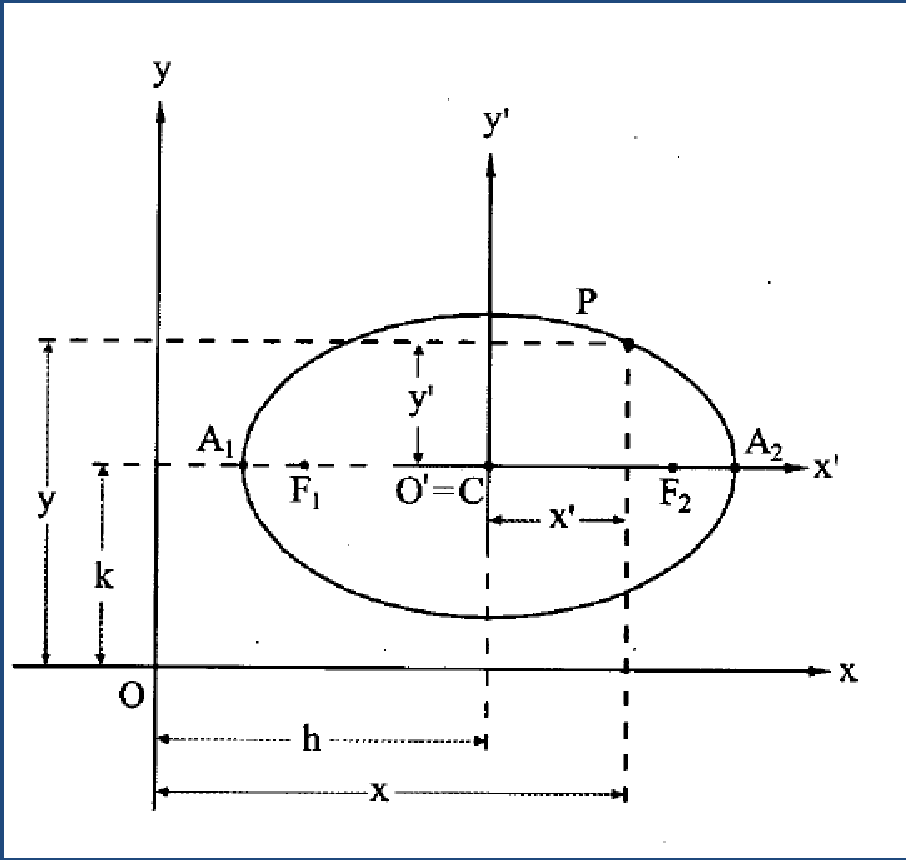
$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Relações de transformação

Equação da elipse deslocada

Caso 1: Eixo maior é paralelo ao eixo x.

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$



No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

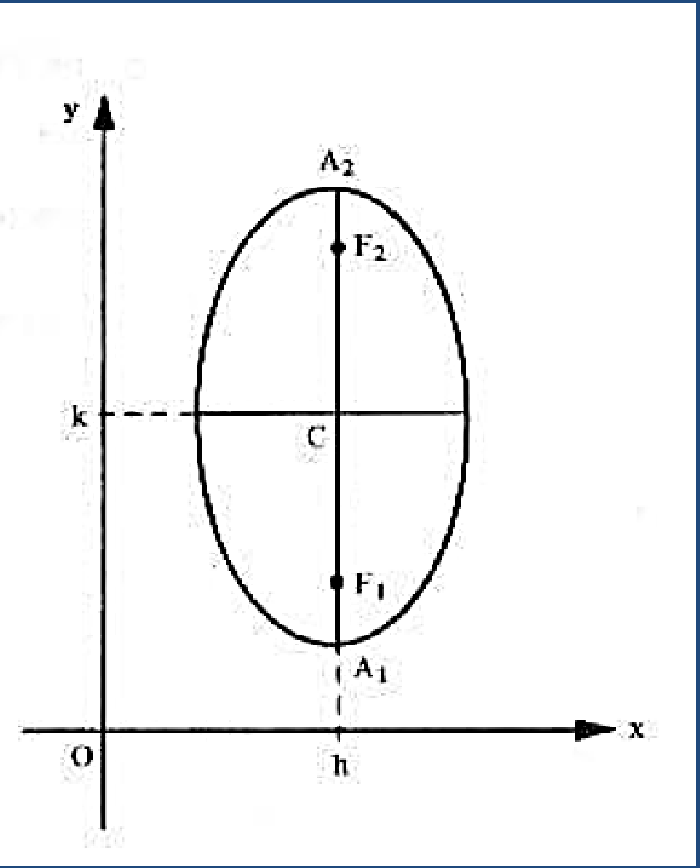
Então:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Equação da elipse deslocada

Caso 2: Eixo maior é paralelo ao eixo y.

$$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$



No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Então:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Troca de a por b no caso anterior

Exemplo 2

Obter a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo $\boldsymbol{y}$ com centro $\mathbf{C(4,-2)}$, eixo menor com medida $\mathbf{6}$ e excentricidade $\boldsymbol{e = 1/2}$.

Resp.: $4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$

Exercício

A equação da elipse é: $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Determinar: a) a equação reduzida; b) o centro; c) os focos; d) a excentricidade.

Resp.: $F_1\left(1 - \sqrt{5}, 2\right)$ $\boldsymbol{e} = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{3}}$

Círculo

Círculo

- Elipse degenerada;
- O plano π que secciona a superfície cônica é paralelo ao eixo vertical desse cone;
- O que resulta na equação da elipse em $a = b = r$ e define o raio r do círculo;
- Os focos coincidem com o centro.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equação da circunferência centrada na origem

Círculo

- Se o centro do círculo estiver deslocado: $C(h,k)$;
- A equação geral ficará, então:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Equação da circunferência de centro $C(h,k)$

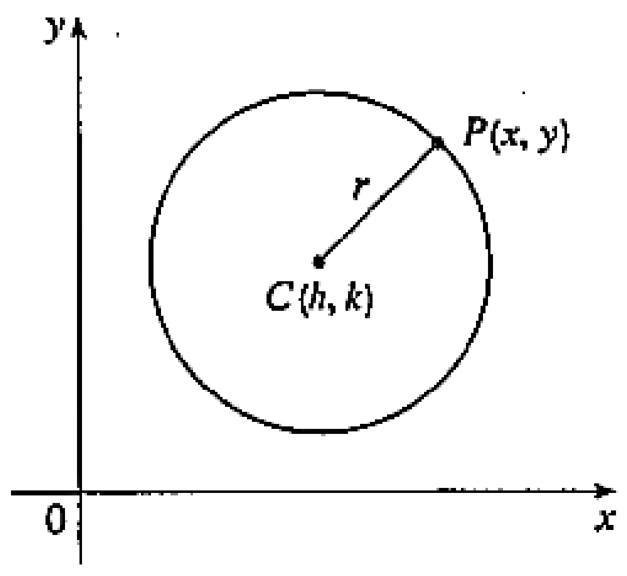


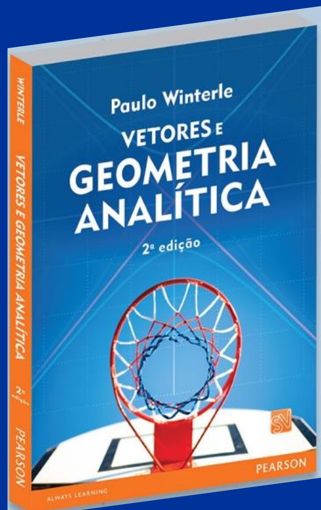
FIGURA 1 **Stewart, v. 1**

Exemplo 3

Esboce o gráfico da equação $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ mostrando, primeiro, que ela é um círculo. Determine o seu raio e seu centro.

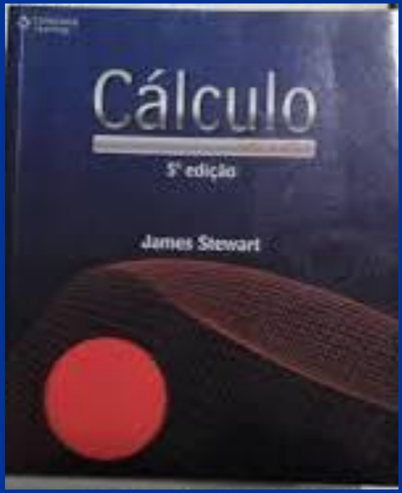
Resp.: $r = \sqrt{3}$ e $C(-1, 3)$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.



Stewart, James. Cálculo volume 1, 5ª ed. São Paulo: Cencage, 2008.