# Geometria Analítica

## Licenciatura em Química

## Aula 08 – O Plano

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

# Parte 1
# Plano

# 5.1 Equação geral do plano

Sejam um plano $\pi$ em que $A(x_1, y_1, z_1) \in \pi$, e um vetor $\vec{n} = (a, b, c)$, normal a esse plano.

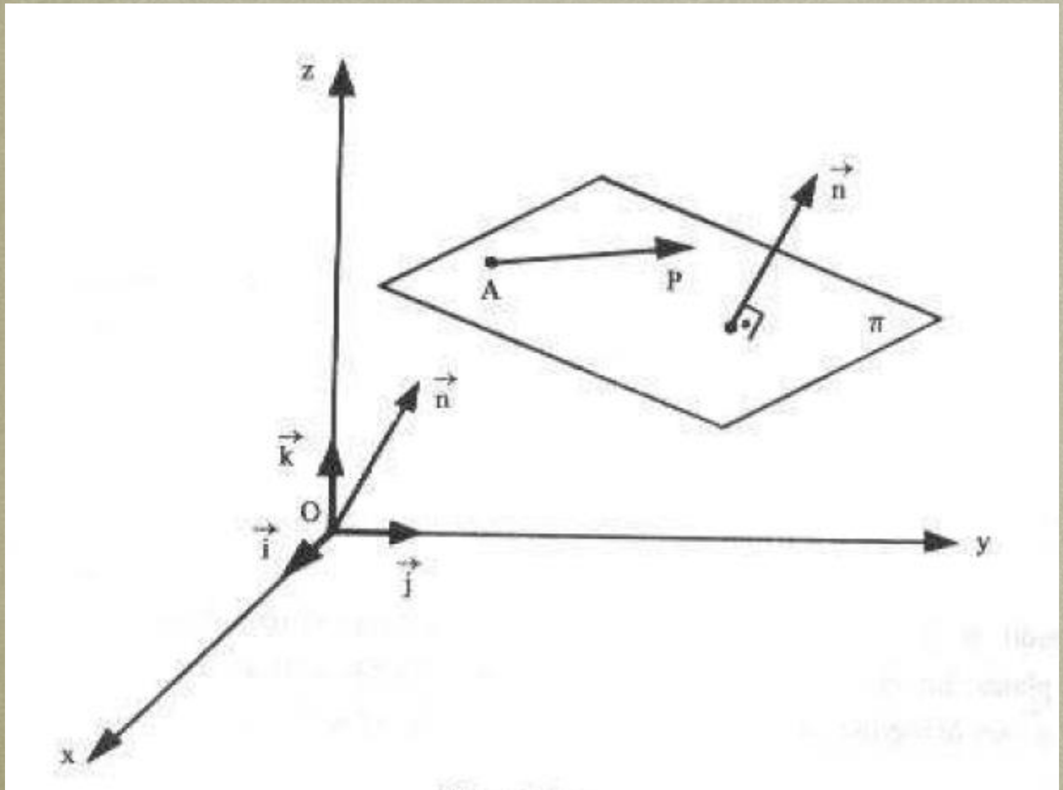



Figura 5.1-a

$$\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = 0$$

# 5.1 Equação geral do plano

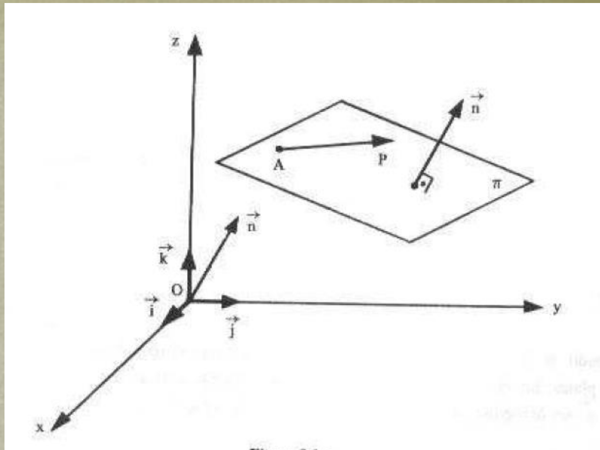


Figura 5.1-a

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \bullet (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$$

Fazendo: $d = (-ax_1 - by_1 - cz_1)$

$$ax + by + cz + \mathrm{d} = 0$$

# 5.1 Equação geral do plano

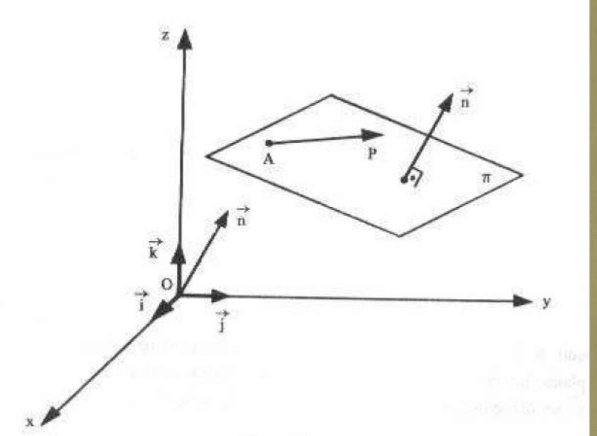


Figura 5.1-a

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) \bullet (a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$ax + by + cz + (-ax_1 - by_1 - cz_1) = 0$$

Fazendo: $d = (-ax_1 - by_1 - cz_1)$

$$ax + by + cz + \mathrm{d} = 0$$

Equação geral do plano

# Exemplo 1

Obter a equação geral do plano $\pi$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{3})$ e tem $\vec{\boldsymbol{n}} = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, -\mathbf{4})$ como vetor normal.

# Exemplo 2

Escrever a equação geral do plano $\pi$ que passa pelo ponto $\boldsymbol{A}(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{3})$ e é paralelo ao plano**:**

$$\boldsymbol{\pi_1}: \mathbf{3}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} - \mathbf{2}\boldsymbol{z} + \mathbf{5} = \mathbf{0}$$

# Exemplo 3

Um plano $\pi$ passa pelo ponto $\boldsymbol{A}(\mathbf{2}, \mathbf{2}, -\mathbf{1})$ e é paralelo aos vetores $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}, -\mathbf{3}, \mathbf{1})$ **e** $\vec{\boldsymbol{v}} = (-\mathbf{1}, \mathbf{5}, -\mathbf{3})$**.** Obter a equação geral desse plano.

# 5.5 Ângulo entre dois planos

Sejam dois planos $\boldsymbol{\pi_1}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\pi_2}$ com vetores normais $\overrightarrow{\boldsymbol{n_1}}$ $\boldsymbol{e}$ $\overrightarrow{\boldsymbol{n_2}}$, respectivamente.

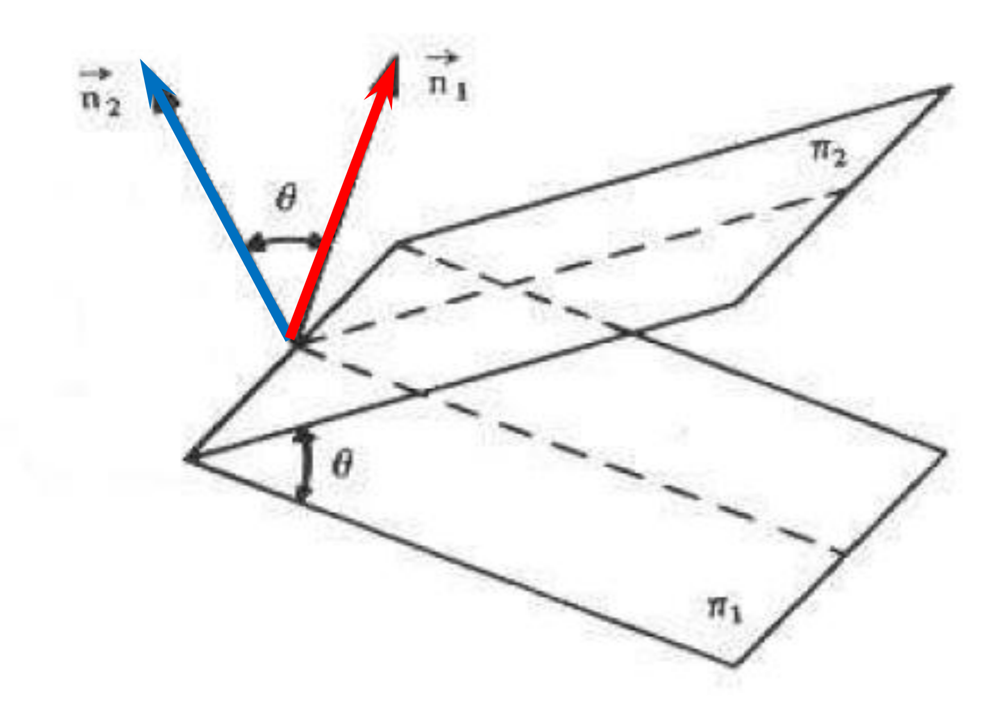


Figura 5.5

# 5.5 Ângulo entre dois planos

O menor ângulo que os vetores $\vec{n_1}$ *e* $\vec{n_2}$ formam entre si é o ângulo entre planos:

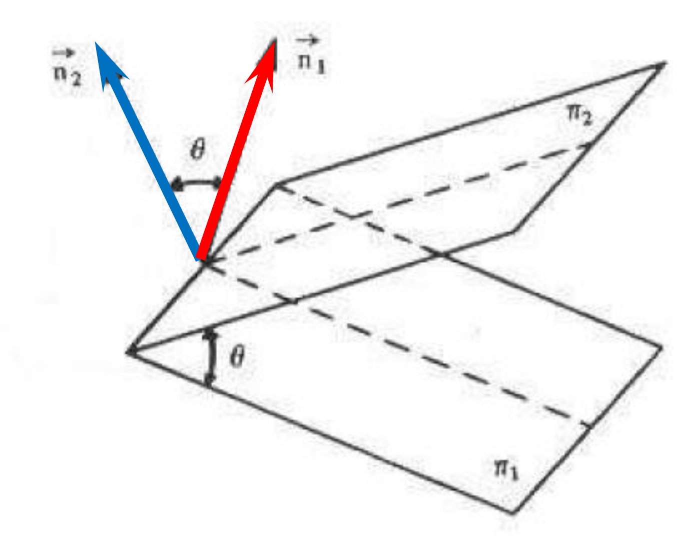


Figura 5.5

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

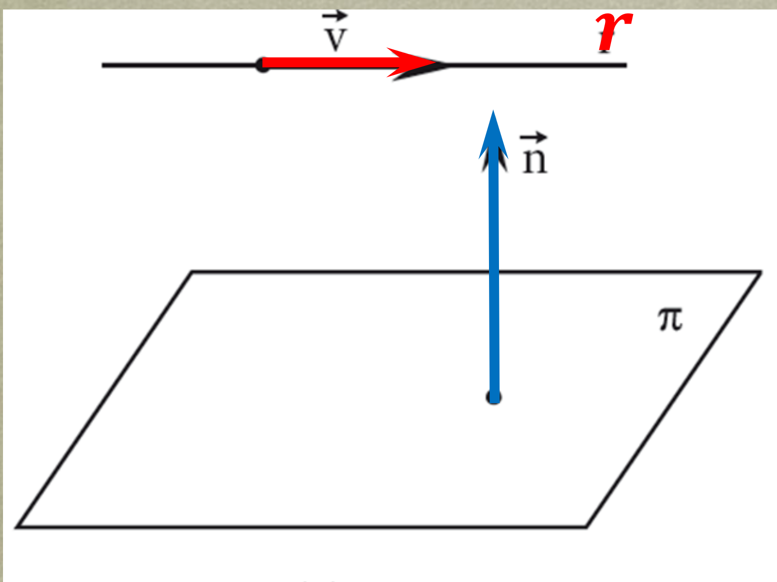
# Exemplo 4

Determine o ângulo entre os planos: *resp.: 30º*

$\boldsymbol{\pi_1}$: $\boldsymbol{2x + y - z + 3 = 0}$ $\boldsymbol{\pi_2}$: $\boldsymbol{x + y - 4 = 0}$.

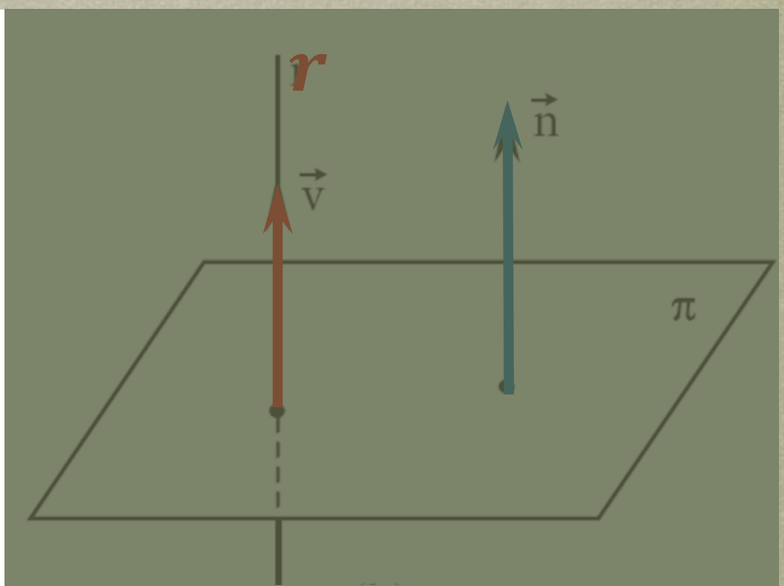
# 5.6 Condições de paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.




$$\textbf{Se}\ \ \boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\pi_2} \ \ \rightarrow \ \ \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

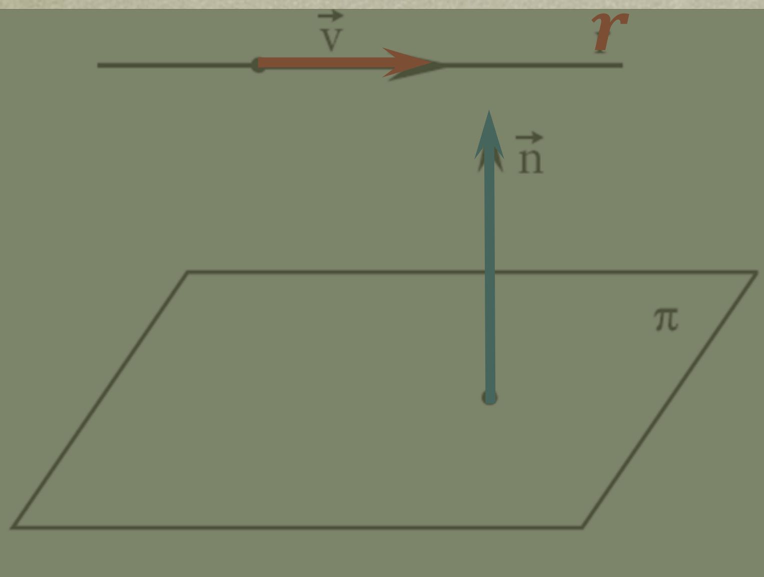



$$\textbf{Se}\ \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi_2} \ \ \rightarrow \ \ \vec{\boldsymbol{v}} \parallel \vec{\boldsymbol{n}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

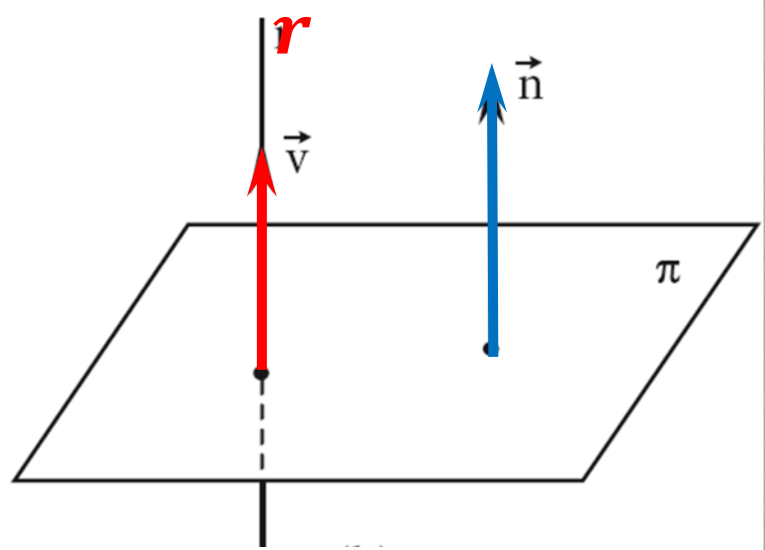
# 5.6 Condições de paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.




Se $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\pi_2} \;\rightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{n}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$$

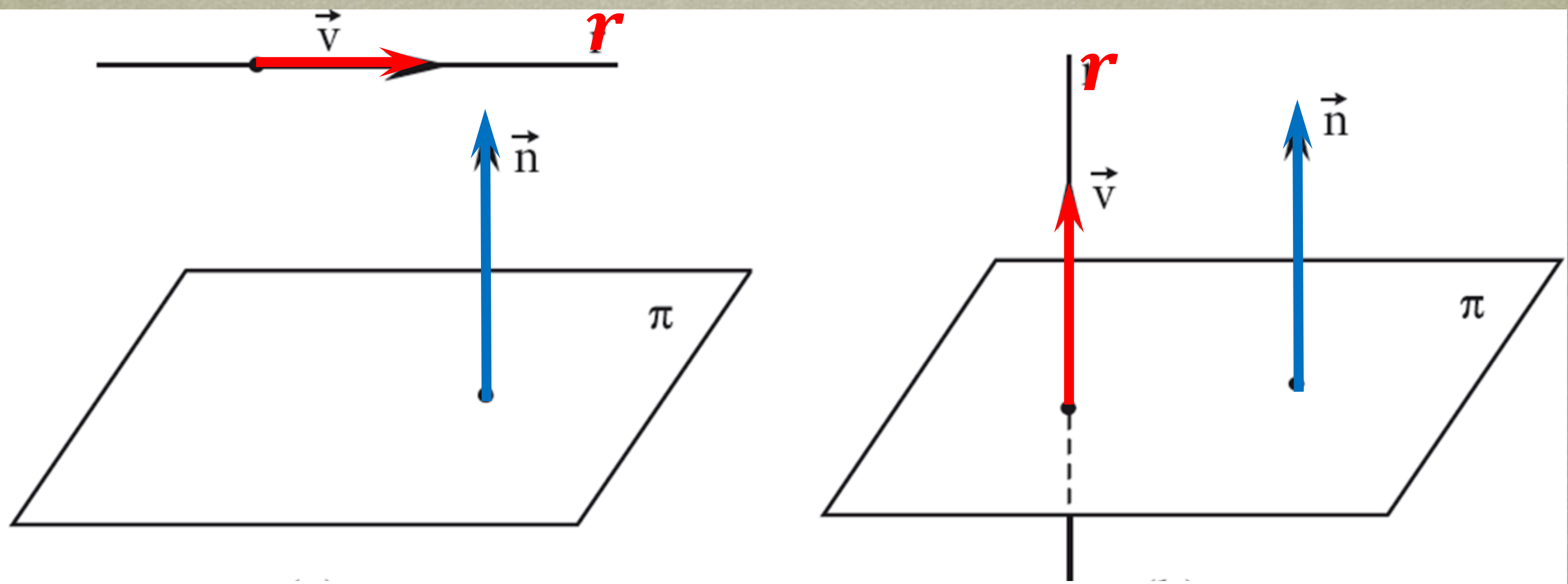



Se $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi_2} \;\rightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}} \parallel \vec{\boldsymbol{n}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

# 5.6 Condições de paralelismo e perpendicularismo entre reta e plano

Seja um reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ e um plano $\boldsymbol{\pi}$ com vetor normal $\vec{\boldsymbol{n}}$.




**Se** $\boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\pi_2} \;\rightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}} \perp \vec{\boldsymbol{n}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$$

**Se** $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\pi_2} \;\rightarrow\; \vec{\boldsymbol{v}} \parallel \vec{\boldsymbol{n}}$

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{k} \in \mathbb{R})$$

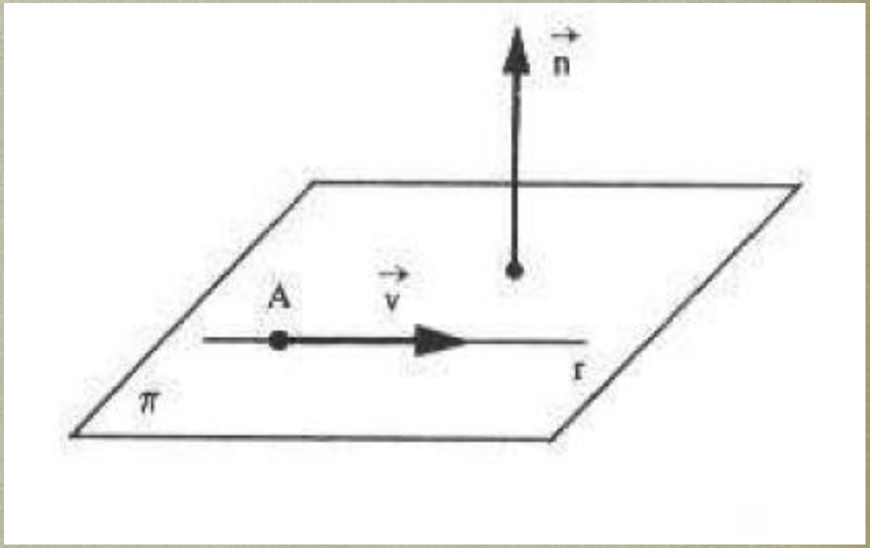
# Parte 2
# Plano

# 5.6.2 Condições para que uma reta esteja contida no plano

A reta $\boldsymbol{r}$ com direção de $\vec{\boldsymbol{v}}$ está contida no plano $\boldsymbol{\pi}$ se uma das duas condições for satisfeita:

**I.** Um ponto pertencer a $\boldsymbol{r}$ $e\ a\ \boldsymbol{\pi}$ e ainda $\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$.

**II.** $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{B}$ pertencerem, simultaneamente, a $\boldsymbol{r}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{\pi}$;



# Exemplo 1

Determinar os valores de ***m e n*** para que a reta ***r*** esteja contida no plano ***π***: *resp*.: *m*=3 e *n*=-1

$$\boldsymbol{\pi}: \ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{my} + \boldsymbol{nz} - \mathbf{5} = \mathbf{0} \qquad \boldsymbol{r}: \ \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{3} + \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1} - \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{z} = -\mathbf{2} - \boldsymbol{t} \end{cases}$$

# Exemplo 2

Determinar a equação geral do plano que contém o ponto $\boldsymbol{A}$ e a reta $\boldsymbol{r}$ : *resp.*: $\mathbf{7x+7y-14=0}$

$\boldsymbol{A(3,-1,2)}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

# 5.7 Intersecção entre dois planos

Sejam dois planos $\pi_1$ e $\pi_2$ não paralelos. A intersecção desses dois planos é uma reta ***r*** cujas equações se deseja determinar.

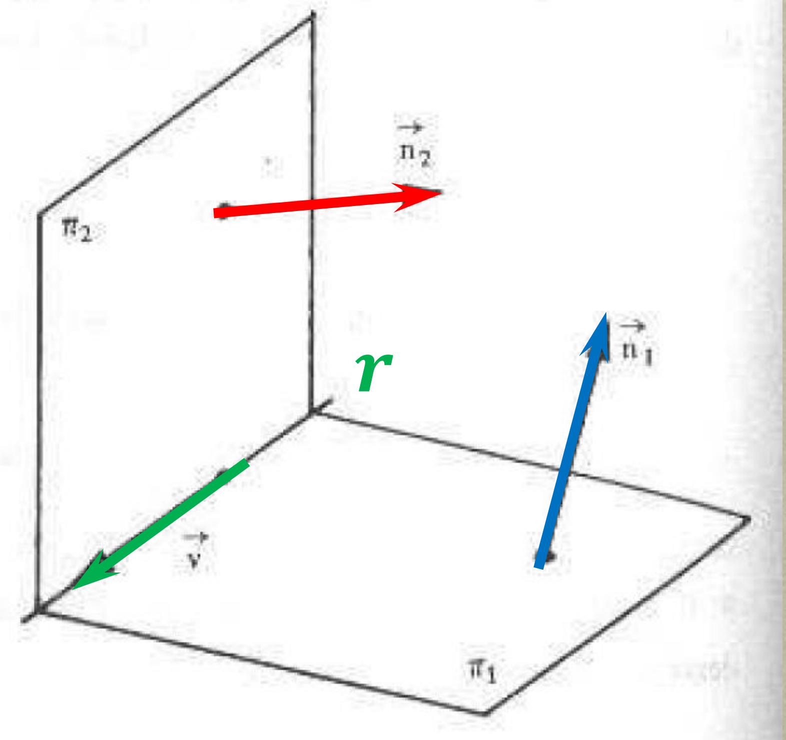



Figura 5.7

# 5.7 Intersecção entre dois planos

**Procedimento para encontrar a reta $r$ :**

- Isolar uma das coordenadas na equação de $\pi_1$ (1);
- Substituir essa nova equação em $\pi_2$ (2);
- Voltar o resultado (2) na equação (1);
- Obtém-se nova equação (3)
- Tem-se, então, duas equações (2/3) de $r$ na forma reduzida;
- Conferir o resultado inserindo um ponto de $r$ em $\pi_1$ e $\pi_2$. Esse ponto deve satisfazer as duas eqs.

# Exemplo 3

Determinar as equações reduzidas da reta $\boldsymbol{r}$, na variável $\boldsymbol{x}$, que é a intersecção dos planos:

$$\boldsymbol{\pi_1}:\ 5x - 2y + z + 7 = 0$$

$$\boldsymbol{\pi_2}: 3x - 3y + z + 4 = 0$$

**Resp.:** $r: \begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -9x - 13 \end{cases}$

# Exercício em classe

Determinar as equações reduzidas da reta $\boldsymbol{r}$, na variável $\boldsymbol{x}$, que é a intersecção dos planos:

$$\boldsymbol{\pi_1: 3x - y + z - 3 = 0}$$
$$\boldsymbol{\pi_2: x + 3y + 2z + 4 = 0}$$

**Resp.:** $\boldsymbol{r}$: $\begin{cases} \boldsymbol{y = x - 2} \\ \boldsymbol{z = -2x + 1} \end{cases}$

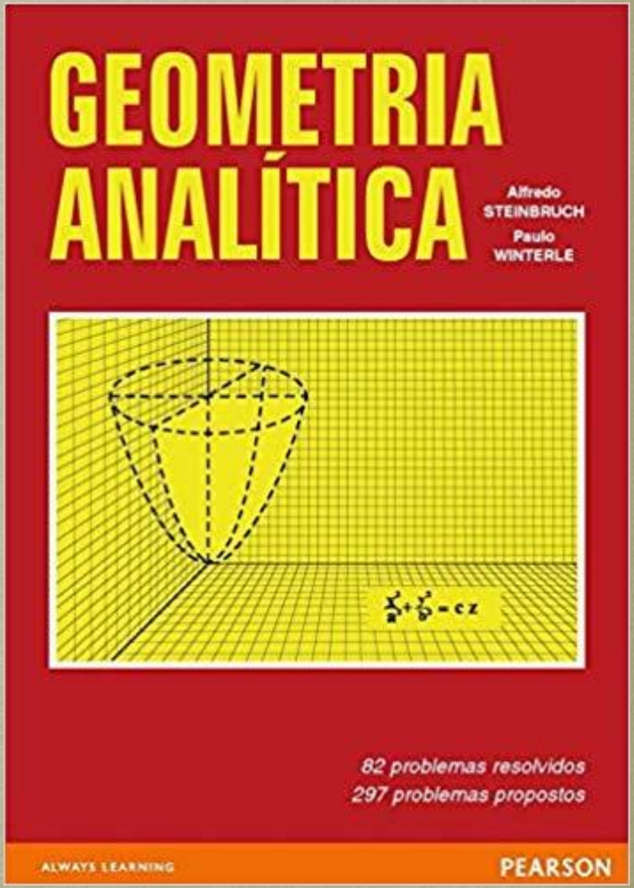
# Resolver os problemas propostos:

**p. 180:** **2, 3, 6, 11, 12, 17, 25, 33a, 33b, 36, 42, 43, 47, 48, 49.**

# Bibliografia - GA

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. Geometria Analítica. 2. Ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed. ----->>



# Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br

Currículo Lattes

http://lattes.cnpq.br/1614784455223743