Cálculo I

Licenciatura em Química

Integração por partes e por frações parciais

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Relembrando conceitos

Técnicas de integração

Derivação	Integração
✓ Constante vezes função	➢ Constante vezes função
✓ Soma de funções	➢ Soma de integrais,
✓ Regra da cadeia	➢ Por substituição
✓ Regra do produto	➢ Por partes;
✓ Regra do quociente.	➢ Por frações parciais.

Integração por partes

C – Integração por partes

- A integração por partes corresponde a regra do produto para as derivadas;

- O objetivo é resolver integrais do tipo:

$$\int f(x)\,g(x)dx$$

C – Integração por partes

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

C – Integração por partes

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ Integrando:

C – Integração por partes

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ Integrando:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

C – Integração por partes

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$ Integrando:

$$\underbrace{\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx}_{\text{Teorema Fundamental}} = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

C – Integração por partes

Sejam duas funções: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integrando:

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

Rearranjando

$$\Rightarrow \boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx + C}$$

C – Integração por partes

A fórmula conhecida como integral por partes é:

$$\int \boldsymbol{f(x)g'(x)\,dx} = \boldsymbol{f(x)g(x)} - \int \boldsymbol{f'(x)g(x)\,dx + C}$$

Mais facilmente lembrada fazendo: $\boldsymbol{u = f(x)}$ e $\boldsymbol{v = g(x)}$

$$\boxed{\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu + C}}$$

Guia para integração por partes

- Escolher $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{dv}$ para obter uma nova integral mais fácil de ser calculada;
- Escolher como função $\boldsymbol{u}$ a que formais fácil derivar;
- Escolher $\boldsymbol{dv}$ a mais fácil de integrar;

Guia para integração por partes

- Escolher u e dv para obter uma nova integral mais fácil de ser calculada;
- Escolher como função u a que formais fácil derivar;
- Escolher dv a mais fácil de integrar;

- Técnica (**LIATE**)

Quando o produto de funções for distinto, tomar u como função mais a esquerda da lista:

Logarítmica-Trigon. **I**nversa-**A**lgébrica-**T**rigon.-**E**xponencial

Exemplo 1 – Resolver por partes

$$\int x\, cosx\, dx$$

Exemplo 2 – Resolver por partes

$$\int x\, e^x dx$$

Exemplo 3 – Resolver por partes

$$\int lnx\, dx$$

Integração definida por partes

As variáveis são funções de $\boldsymbol{x}$, então:

$\boldsymbol{u = u(x)}$ e $\boldsymbol{v = v(x)}$, a forma se mantém:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Exemplo 4 – Resolver por partes

$$\int_{1}^{e} x^2 lnx$$

Integração por frações parciais

D – Integração por frações parciais

- Corresponde a regra do quociente das derivadas.
- Qualquer função racional (quociente de polinômios) pode ser expressa como a soma de frações mais simples (parciais)

D – Integração por frações parciais

- Corresponde a regra do quociente das derivadas.
- Qualquer função racional (quociente de polinômios) pode ser expressa como a soma de frações mais simples (parciais)

Exemplo 4:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x+5}{x^2+x-2}} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

D – Integração por frações parciais

- Seja $\boldsymbol{R(x)}$ uma função racional, composta pelo quociente de dois polinômios $\boldsymbol{P(x)}$ e $Q(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

D – Integração por frações parciais

- Seja $\boldsymbol{R(x)}$ uma função racional, composta pelo quociente de dois polinômios $\boldsymbol{P(x)}$ e $Q(x)$:

$$\boldsymbol{R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$$

- Se o grau de $\boldsymbol{P(x)}$ for maior do que o grau de $Q(x)$, deve-se **dividir os dois polinômios até** chegar a uma fração onde $degP(x) \leq degQ(x)$.

Onde: *degP(x) é o grau de **maior ordem de P(x).***

D – Integração por frações parciais

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- Se o grau de $P(x)$ é menor do que o grau de $Q(x)$, é possível **expressar $R(x)$ como frações parciais**.

- Antes de estudarmos os três casos principais, iremos revisar a divisão de polinômios pelo método da chave.

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$P(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

$Q(x) = x^2 - 1$

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{P(x) = x^5 + 2x^3 + 4}$

$\boldsymbol{Q(x) = x^2 - 1}$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{P(x) = x^5 + 2x^3 + 4}$

$Q(x) = \boldsymbol{x^2 - 1}$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$P(x) = x^5 + 2x^3 + 4$

$Q(x) = x^2 - 1$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

IV. Repetir os itens de I a III, até que o grau do resto seja menor do que o grau de Q(x);

Divisão de polinômios, método da chave

Exemplo 5: $\boldsymbol{R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$\boldsymbol{P(x) = x^5 + 2x^3 + 4}$

$\boldsymbol{Q(x) = x^2 - 1}$

I. Montar a divisão como se fosse numérica;

II. Dividir o 1º termo de P(x) pelo 1º termo de Q(x);

III. Multiplicar o resultado por todos os termos de Q(x) e subtrair de P(x);

IV. Repetir os itens de I a III, até que o grau do resto seja menor do que o grau de Q(x);

V. Escrever na forma: $\boldsymbol{R(x) = quociente + \dfrac{resto}{divisor}}$

Divisão de polinômios, método da chave

$$\begin{array}{l|l} \boldsymbol{Dividendo} & \boldsymbol{Divisor} \\ \hline \boldsymbol{resto} & \boldsymbol{quociente} \end{array}$$

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{l|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2-1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 \\ \hline 0 + 3x^3 + 4 & \end{array}$$

Divisão de polinômios, método da chave

$$\begin{array}{l|l} \textbf{\textit{Dividendo}} & \textbf{\textit{Divisor}} \\ \hline \textbf{\textit{resto}} & \textbf{\textit{quociente}} \end{array}$$

Solução $R(x) = \dfrac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 + 3x \\ \cline{1-1} 0 + 3x^3 + 4 & \\ -3x^3 + 3x & \\ \cline{1-1} 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Divisão de polinômios, método da chave

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{l|l} \textit{Dividendo} & \textit{Divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 & x^3 + 3x \\ \hline 0 + 3x^3 + 4 & \\ -3x^3 + 3x & \\ \hline 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Então: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}} = x^3 + 3x + \frac{3x+4}{x^2-1}$

Divisão de polinômios, método da chave

$$\begin{array}{l|l} \textit{Dividendo} & \textit{Divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente} \end{array}$$

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-x^5 + x^3 & x^3 + 3x \\ \cline{1-1}
0 + 3x^3 + 4 & \\
-3x^3 + 3x & \\ \cline{1-1}
0 + 3x + 4 &
\end{array}$$

Novos

$degP(x) < degQ(x)$

Então: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}} = x^3 + 3x + \frac{3x+4}{\boldsymbol{x^2-1}}$

Divisão de polinômios, método da chave

Solução $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}}$

$$\begin{array}{l|l} \textbf{\textit{Dividendo}} & \textbf{\textit{Divisor}} \\ \hline \textbf{\textit{resto}} & \textbf{\textit{quociente}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 2x^3 + 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -x^5 + x^3 \quad\quad\; & x^3 + 3x \\ \hline 0 + 3x^3 + 4 & \\ -3x^3 + 3x & \\ \hline 0 + 3x + 4 & \end{array}$$

Novos

degP(x)* < *degQ(x)

Então: $\boldsymbol{R(x) = \frac{x^5+2x^3+4}{x^2-1}} = x^3 + 3x + \frac{3x+4}{\boldsymbol{x^2-1}}$

Expressar em frações parciais

D – Integração por frações parciais

Caso 1:

O denominador $Q(\boldsymbol{x})$ pode ser decomposto em fatores lineares distintos.

$$\frac{\boldsymbol{P(x)}}{\boldsymbol{Q(x)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{x - r_1}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{x - r_2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{x - r_k}}$$

A, B e K: são coeficientes a determinar;

$\boldsymbol{r_1, r_2, r_K}$: são as raízes do polinômio $Q(\boldsymbol{x})$.

Exemplo 6 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx$$

D – Integração por frações parciais

Caso 2:

O denominador $Q(x)$ pode ser decomposto em fatores lineares, mas alguns destes são repetidos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x - r_1} + \frac{B}{(x - r_1)^2} + \cdots + \frac{K}{(x - r_1)^n}$$

A, B e K: são coeficientes a determinar;

r_1 : raiz do polinômio $Q(x)$.

Exemplo 7 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{x+1}{(x-2)^2}\, dx$$

D – Integração por frações parciais

Caso 3:

O denominador $Q(x)$ se decompõe em fatores lineares e quadráticos irredutíveis distintos.

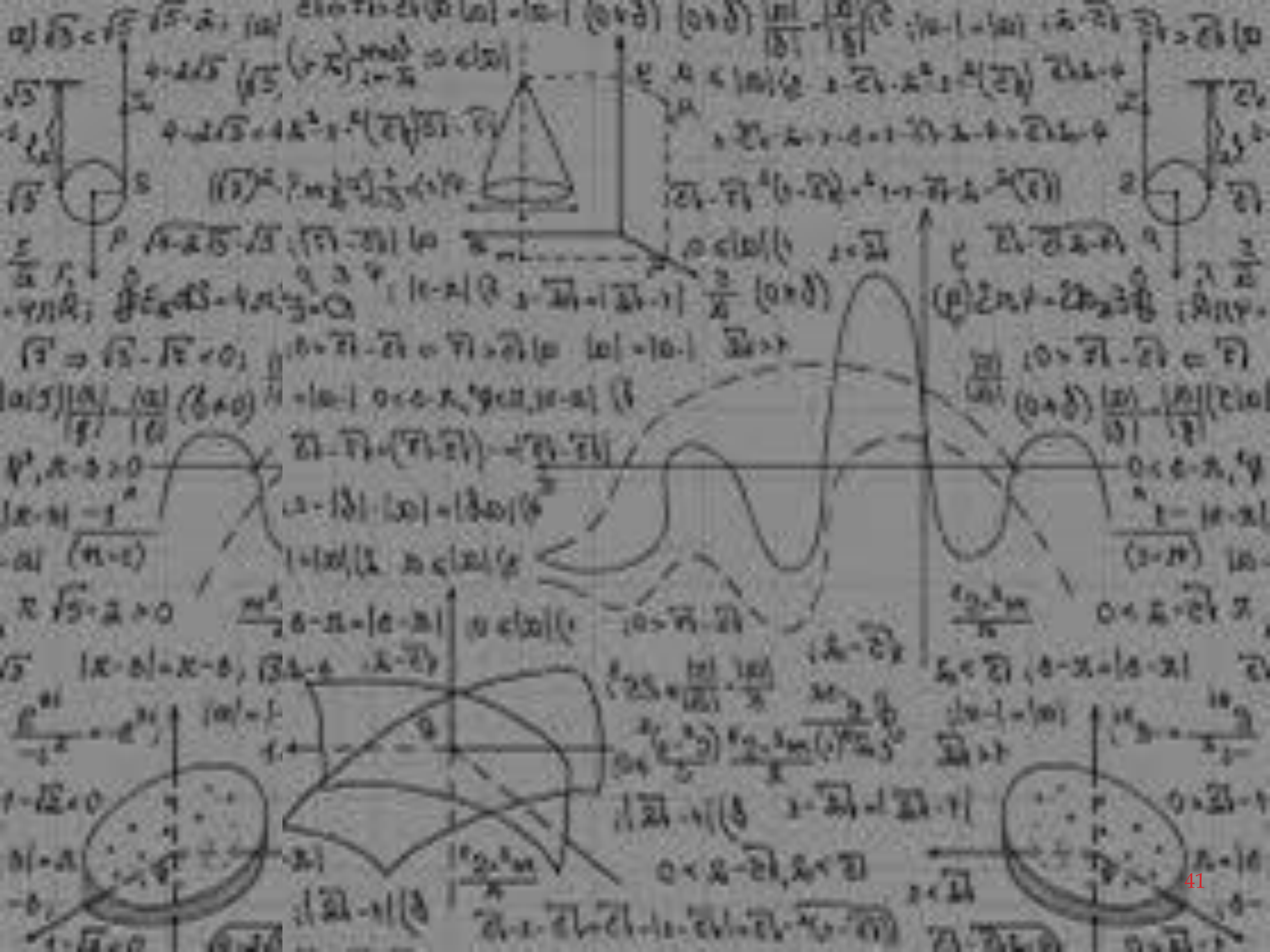
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + a} + \frac{Dx + E}{x^2 + b} + \cdots + \frac{Kx + J}{x^2 + n}$$

A, B, C, D, E e K, J: são coeficientes a determinar;

a, b, c: são números reais.

Exemplo 8 – Resolver por frações parciais

$$\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x}\, dx$$

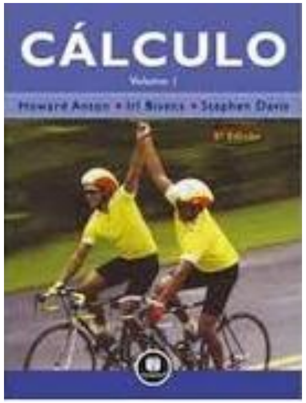


Para depois desta aula:

- Reler o tópico da aula no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Acessar a lista de exercícios no link: site lista.

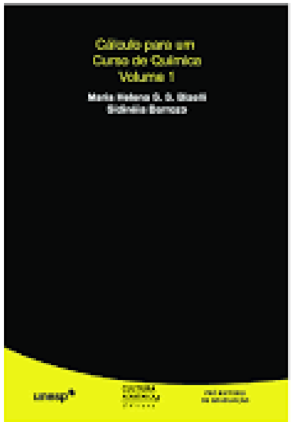
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br