Geometria Analítica
Engenharias

Semana 09 – Aula 1
Distâncias entre pontos, entre ponto e reta e entre ponto e plano

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1, z_1)}$ e $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2, z_2)}$,

A distância entre eles será o módulo do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$:

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $\boldsymbol{P_1(x_1, y_1, z_1)}$ e $\boldsymbol{P_2(x_2, y_2, z_2)}$,

A distância entre eles será o módulo do vetor $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$:

$$d(P_1, P_2) = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |P_2 - P_1|$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

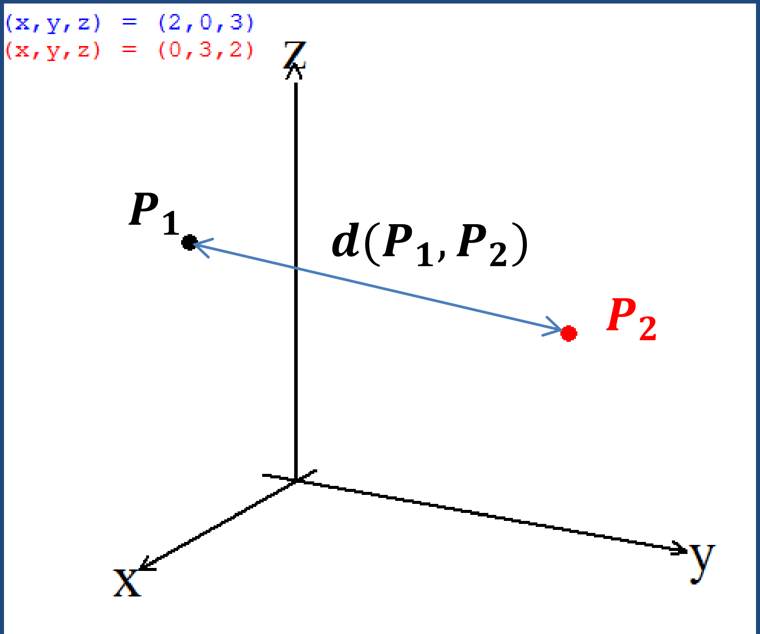
Distância entre pontos

Exemplo 1

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2,0,3)}$ e $\boldsymbol{P_2(0,3,2)}$?

Exemplo 1

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2,0,3)}$ e $\boldsymbol{P_2(0,3,2)}$?



$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(0-2)^2 + (3-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{14}$$

Exercício

Qual a distância entre $\boldsymbol{P_1(2,-1,3)}$ e $\boldsymbol{P_2(1,1,5)}$?

Resp.: $\boldsymbol{d = 3\ u.c.}$

Distância entre ponto e reta

Sejam um ponto P no espaço e uma reta r qualquer. Necessita-se calcular a distância d.

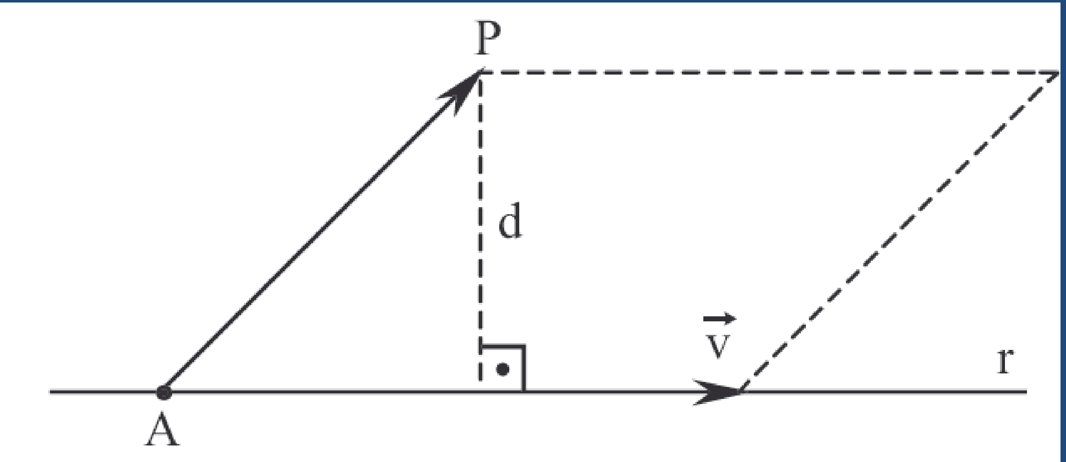


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

Sejam um ponto P no espaço e uma reta r qualquer.
Necessita-se calcular a distância d.

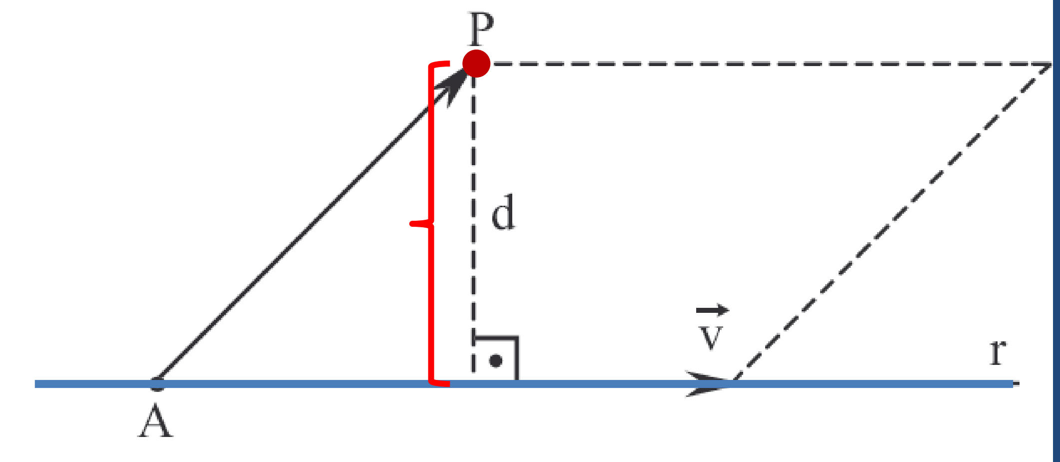


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

Sejam um ponto P no espaço e uma reta r qualquer. Necessita-se calcular a distância d.

O ponto $A \in r$ e $\vec{v}$ é o vetor diretor;

O vetor $\overrightarrow{AP}$ e o vetor $\vec{v}$ formam um paralelogramo.

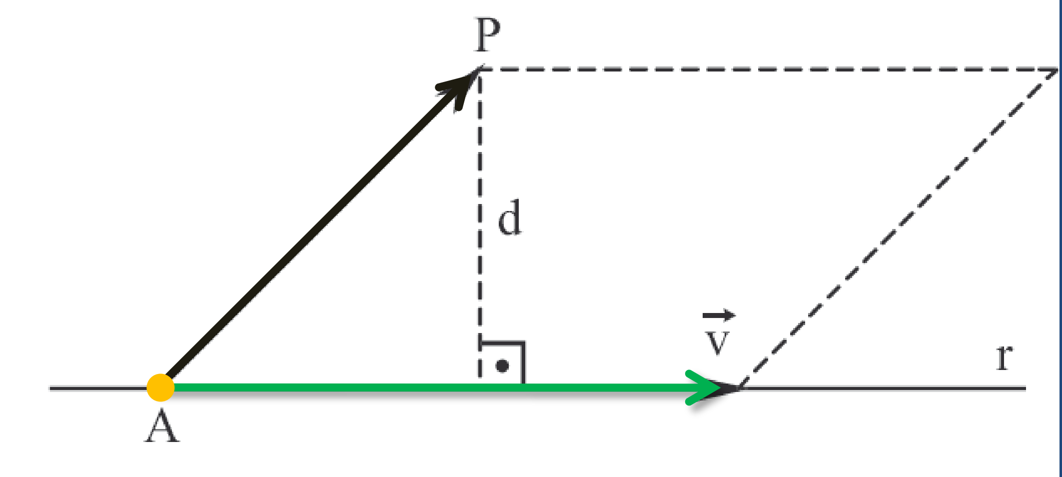


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

A área do paralelogramo pode ser calculada de duas maneiras:

$$A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right| \text{ ou}$$

$$A = \text{base} \times altura$$

$$= |\vec{v}|d$$

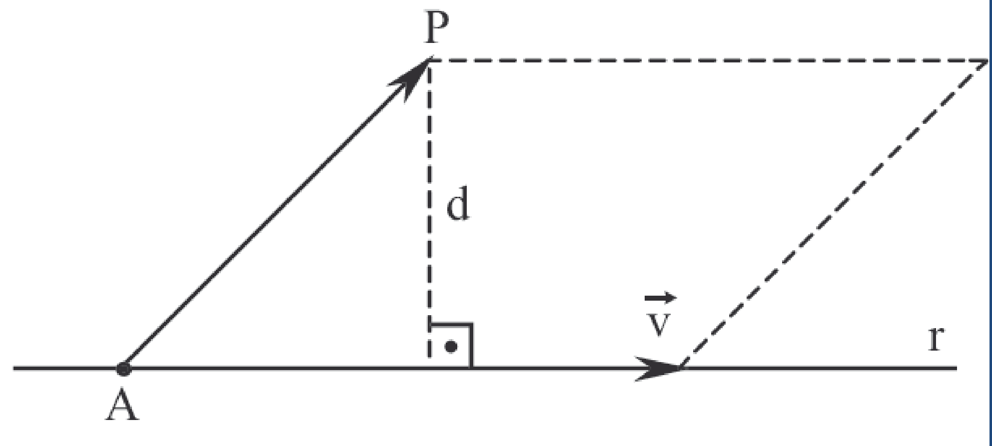


Figura 7.1

Distância entre ponto e reta

A área do paralelogramo pode ser calculada de duas maneiras:

$$A = \left|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}\right|$$ ou

$$A = \text{base} \times altura$$

$$= |\vec{v}|d$$

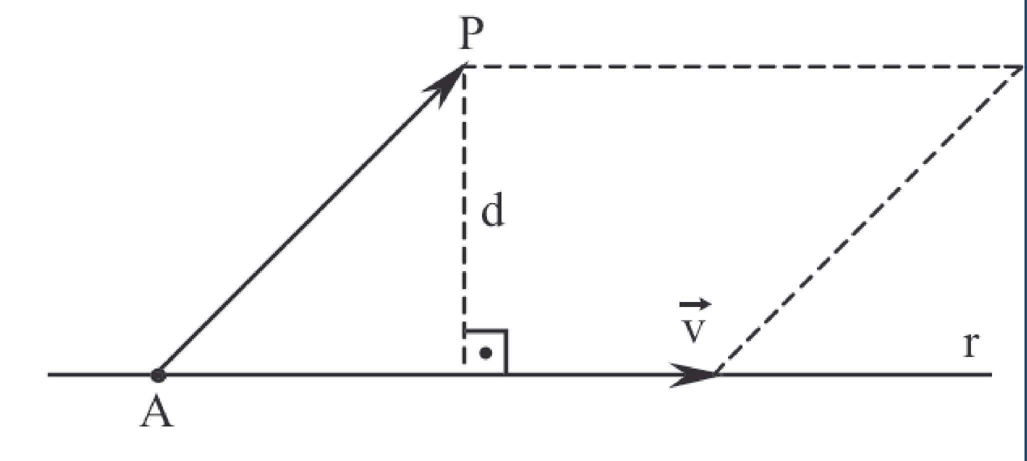


Figura 7.1

Unindo as duas equações:

$$|\boldsymbol{\vec{v}}|\boldsymbol{d} = \left|\boldsymbol{\vec{v}} \times \boldsymbol{\overrightarrow{AP}}\right| \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{d} = \frac{|\boldsymbol{\vec{v}} \times \boldsymbol{\overrightarrow{AP}}|}{|\boldsymbol{\vec{v}}|}$$

Distância entre ponto e reta.

Exemplo 2

Calcular a distância entre o ponto $\boldsymbol{P(2,1,4)}$ e a reta:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = 3 - 2t} \end{cases}$$

Resp.: $\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{74}}{3} \cong 2,86\ u.c.}$

Outra maneira de calcular distância entre ponto e reta

1) Encontrar equação de $\pi \perp r$ e que contém P;

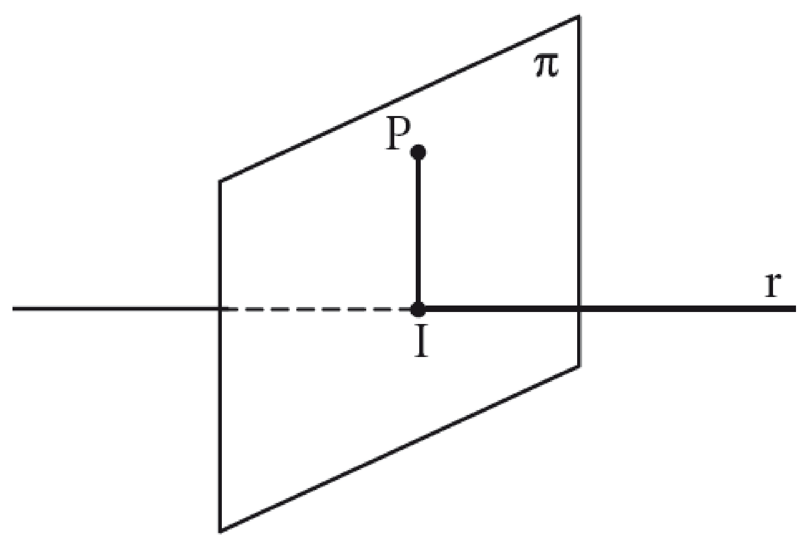


Figura 7.2

Outra maneira de calcular distância entre ponto e reta

1) Encontrar equação de $\pi \perp \boldsymbol{r}$ e que contém $\boldsymbol{P}$;
2) Determinar o ponto de intersecção $\boldsymbol{I}$ de π e $\boldsymbol{r}$;

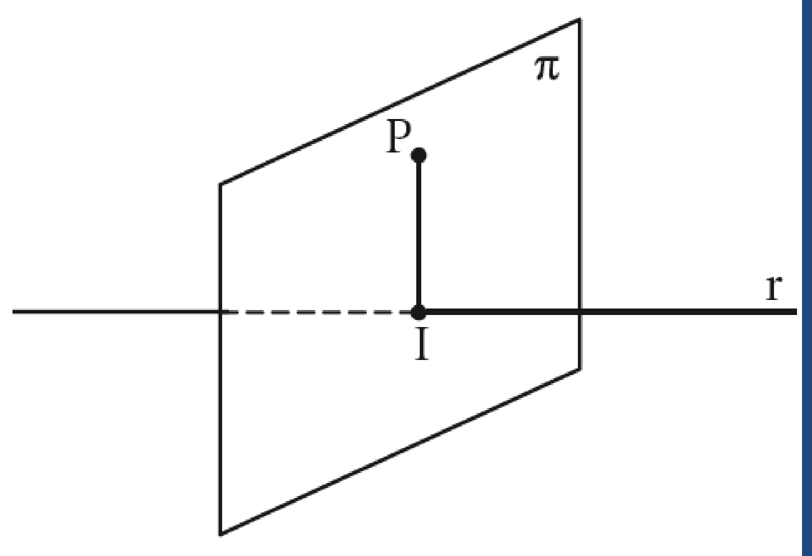


Figura 7.2

Outra maneira de calcular distância entre ponto e reta

1) Encontrar equação de $\pi \perp r$ e que contém P;
2) Determinar o ponto de intersecção I de π e r;
3) Calcular a distância $d(P, r) = |\overrightarrow{PI}|$

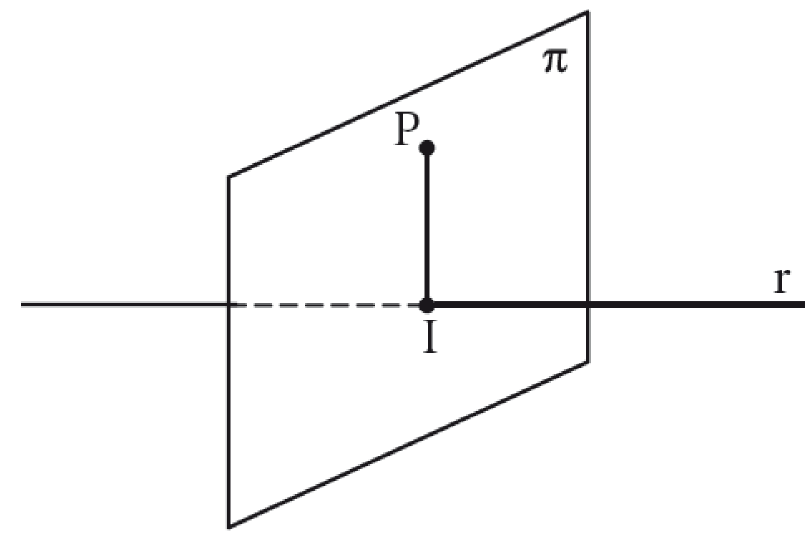


Figura 7.2

Exemplo 3

Calcular a distância entre o ponto $\boldsymbol{P(2,1,4)}$ e a reta,

pelo procedimento do plano: $\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + 2t} \\ \boldsymbol{y = 2 - t} \\ \boldsymbol{z = 3 - 2t} \end{cases}$

Resp.: $\boldsymbol{d = \frac{\sqrt{666}}{9} \cong 2,86\, u.c.}$

Distância entre ponto e plano

Seja P_0 um ponto no espaço cuja distância d ao plano π se quer calcular.

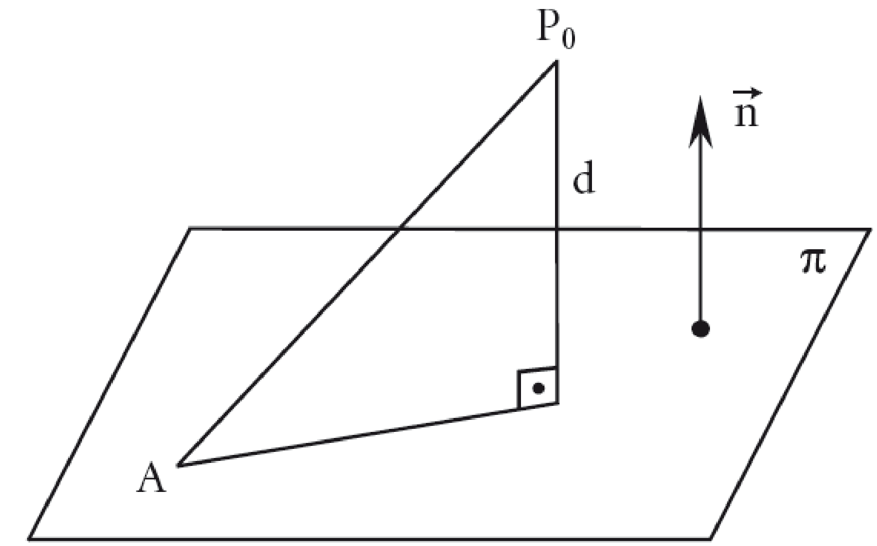


Figura 7.3

Distância entre ponto e plano

Seja P_0 um ponto no espaço cuja distância d ao plano π se quer calcular.

Observa-se que o módulo da projeção de $\overrightarrow{AP_o}$ na direção de $\vec{n}$ é igual a distância d.

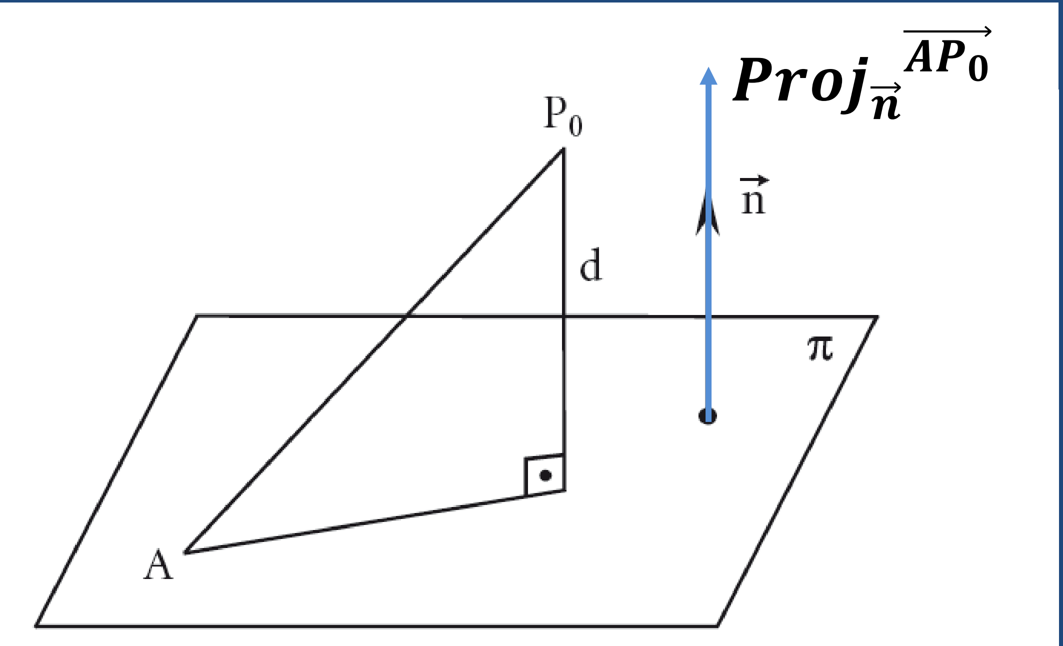


Figura 7.3

Distância entre ponto e plano

$$d(P_o, \pi) = \left| Proj_{\vec{n}}^{\overrightarrow{AP_0}} \right|$$

$$= \left| \frac{\overrightarrow{AP_0} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n} \right|$$

$$= \frac{\left| \overrightarrow{AP_0} \cdot \vec{n} \right|}{|\vec{n}|^2} |\vec{n}|$$

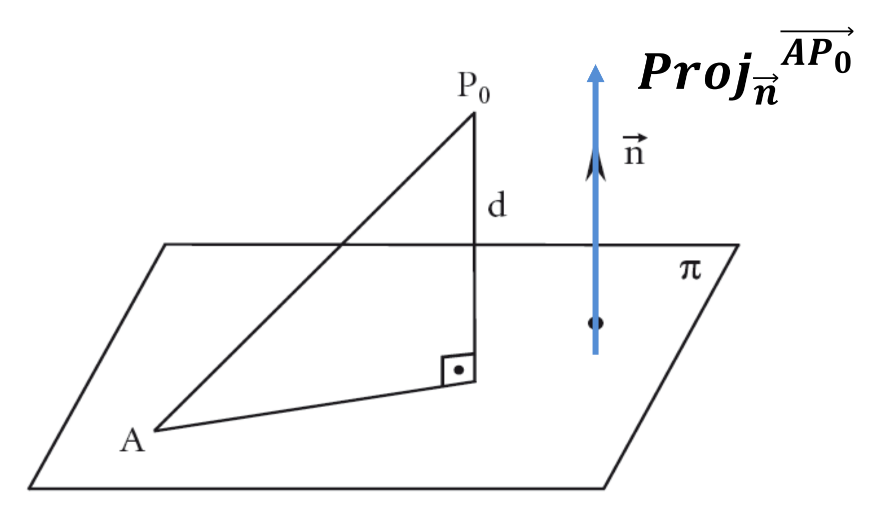


Figura 7.3

$$d(P_o, \pi) = \left| \frac{\overrightarrow{AP_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

Distância entre ponto e plano

Exemplo 4

Calcular a distância entre o ponto $\boldsymbol{P(4, 2, -3)}$ ao plano: $\boldsymbol{\pi}$: $\boldsymbol{2x + 3y - 6z + 3 = 0}$ Resp.: $\boldsymbol{d = 5\, u.c.}$

Outra forma de calcular distância entre ponto e plano

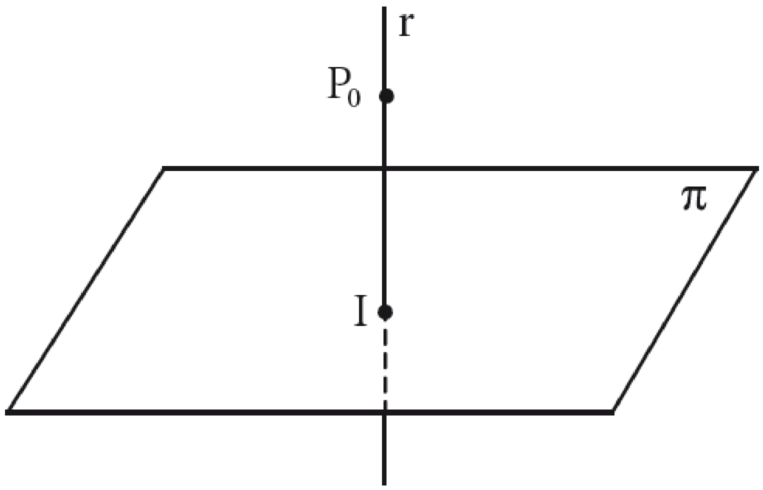


Figura 7.4

a. Encontrar equação de $r \perp \pi$ e que contém P_0;

Outra forma de calcular distância entre ponto e plano

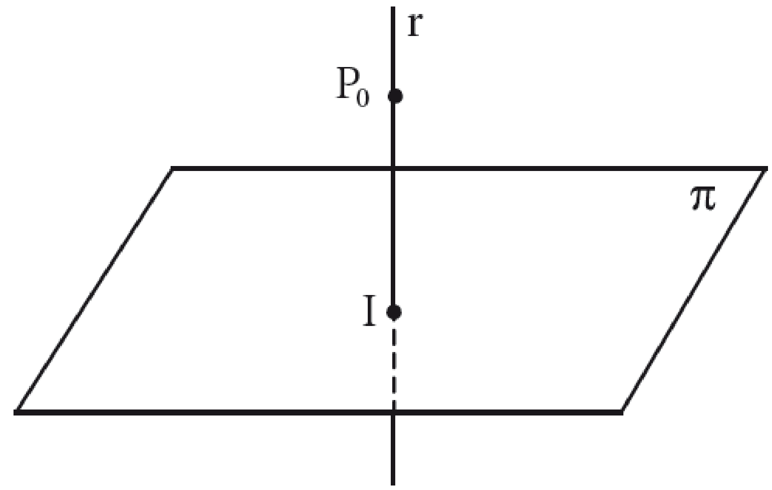


Figura 7.4

a. Encontrar equação de $r \perp \pi$ e que contém P_0;
b. Determinar o ponto de intersecção I de π e r;

Outra forma de calcular distância entre ponto e plano

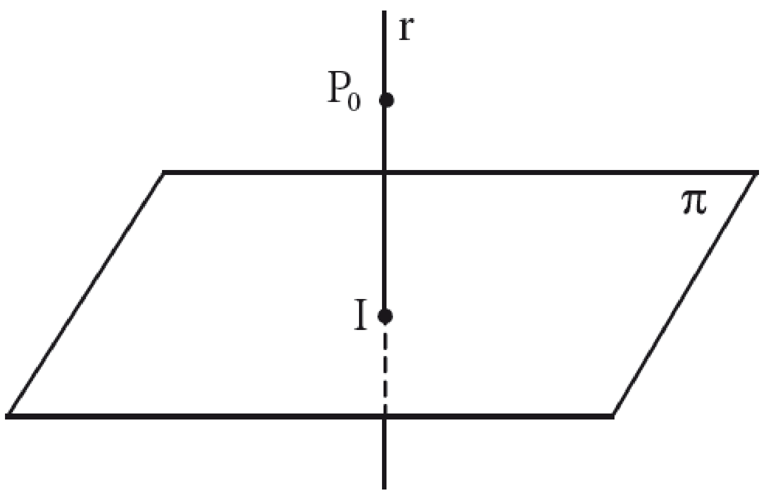


Figura 7.4

a. Encontrar equação de $r \perp \pi$ e que contém P_0;
b. Determinar o ponto de intersecção I de π e r;
c. Calcular a distância $d(P_0, r) = |\overrightarrow{P_0 I}|$

Outra forma de calcular distância entre ponto e plano

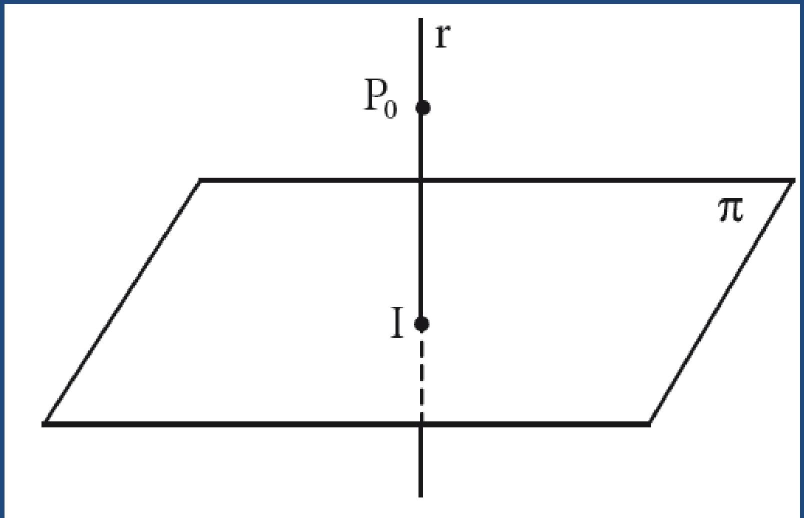


Figura 7.4

a. Encontrar equação de $r \perp \pi$ e que contém P_0;
b. Determinar o ponto de intersecção I de π e r;
c. Calcular a distância $d(P_0, \pi) = \left|\overrightarrow{P_0 I}\right|$

O mesmo procedimento aplica-se para calcular:

- Distância entre planos paralelos em que $P_0 \in \pi_1\ ou\ \pi_2$;
- Uma reta r e um plano π paralelos.

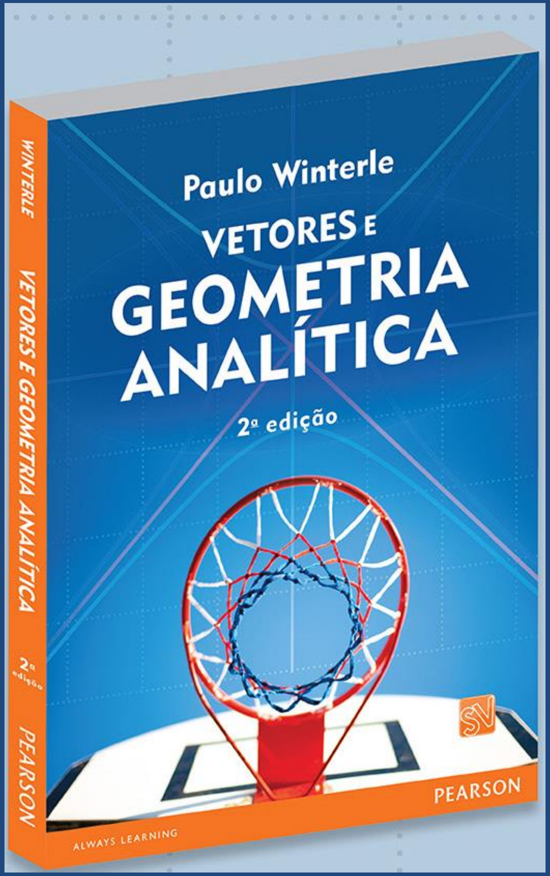
Exercício

Calcular a distância entre o plano: $\boldsymbol{\pi: 4x - 4y + 2z - 7 = 0}$

E a reta $\boldsymbol{r}$: $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 3 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{z} = 2\mathrm{x} + 1$

Resp.: $\boldsymbol{d = 17/6\ u.c.}$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br