

Matemática Aplicada



Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Conteúdos para avaliação 2

Aula 10 Introdução às equações diferenciais

Aula 11 Equações diferenciais 1ª ordem

Aula 12 Modelos de 1ª ordem

Aula 13 Teoremas da existência e unicidade

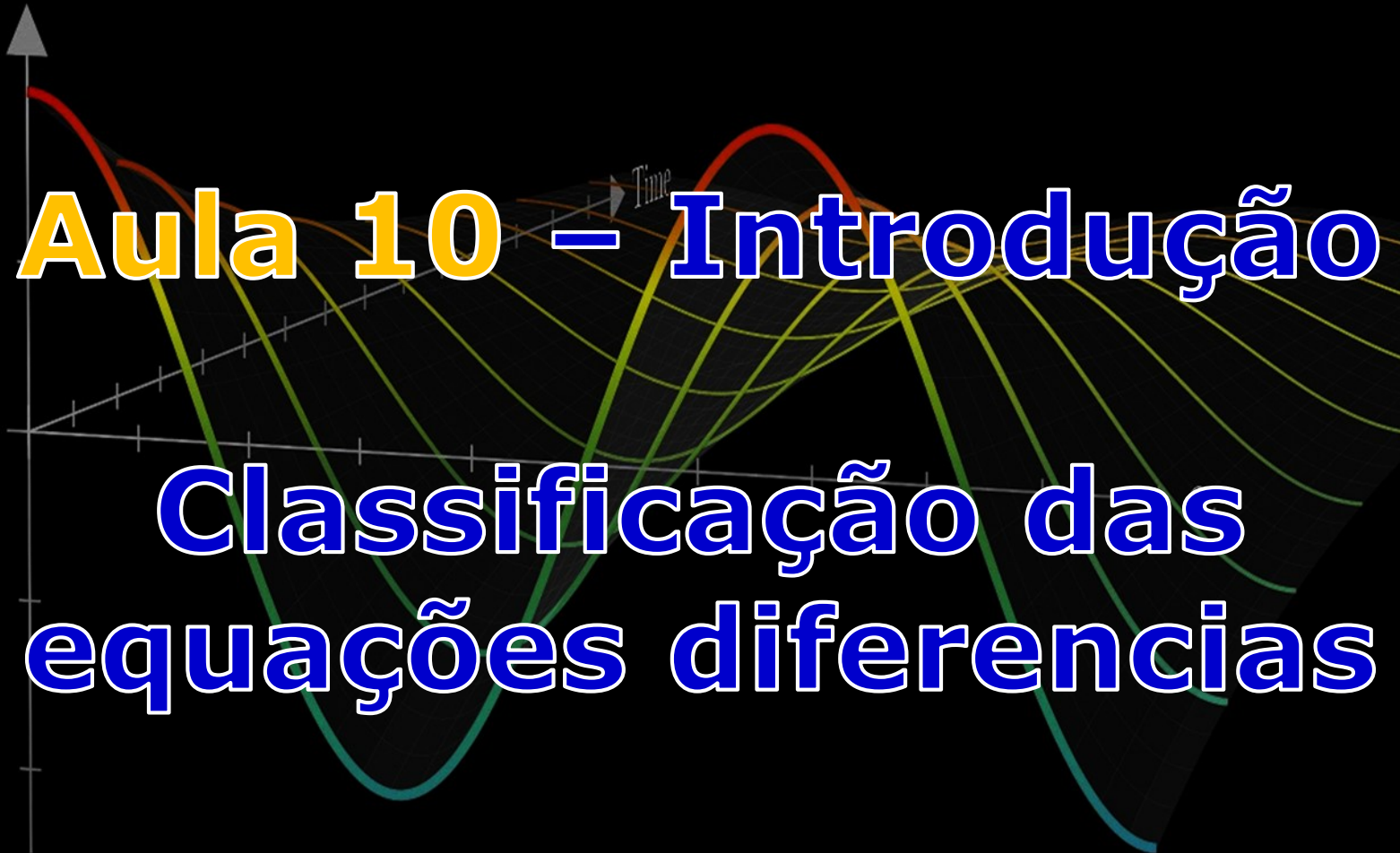
Aula 14 Equações diferenciais 2ª ordem

Aula 15 Raízes complexas e repetidas 2ª ordem

Aula 16 Método dos coeficientes a determinar

Aula 17 Transformada de Laplace

Aula 18 Solução de PVI por Laplace



Aula 10 – Introdução

Classificação das equações diferenciais

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária:** a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t),$$

- **Equação diferencial parcial:** as derivadas são parciais, ou seja, a função depende de duas ou mais variáveis.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$$

equação de calor

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}.$$

equação de onda

B – Quanto à ordem

- A ordem da E.D. é definida pela derivada de ordem mais alta.

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right) \quad (\text{Orden } n)$$

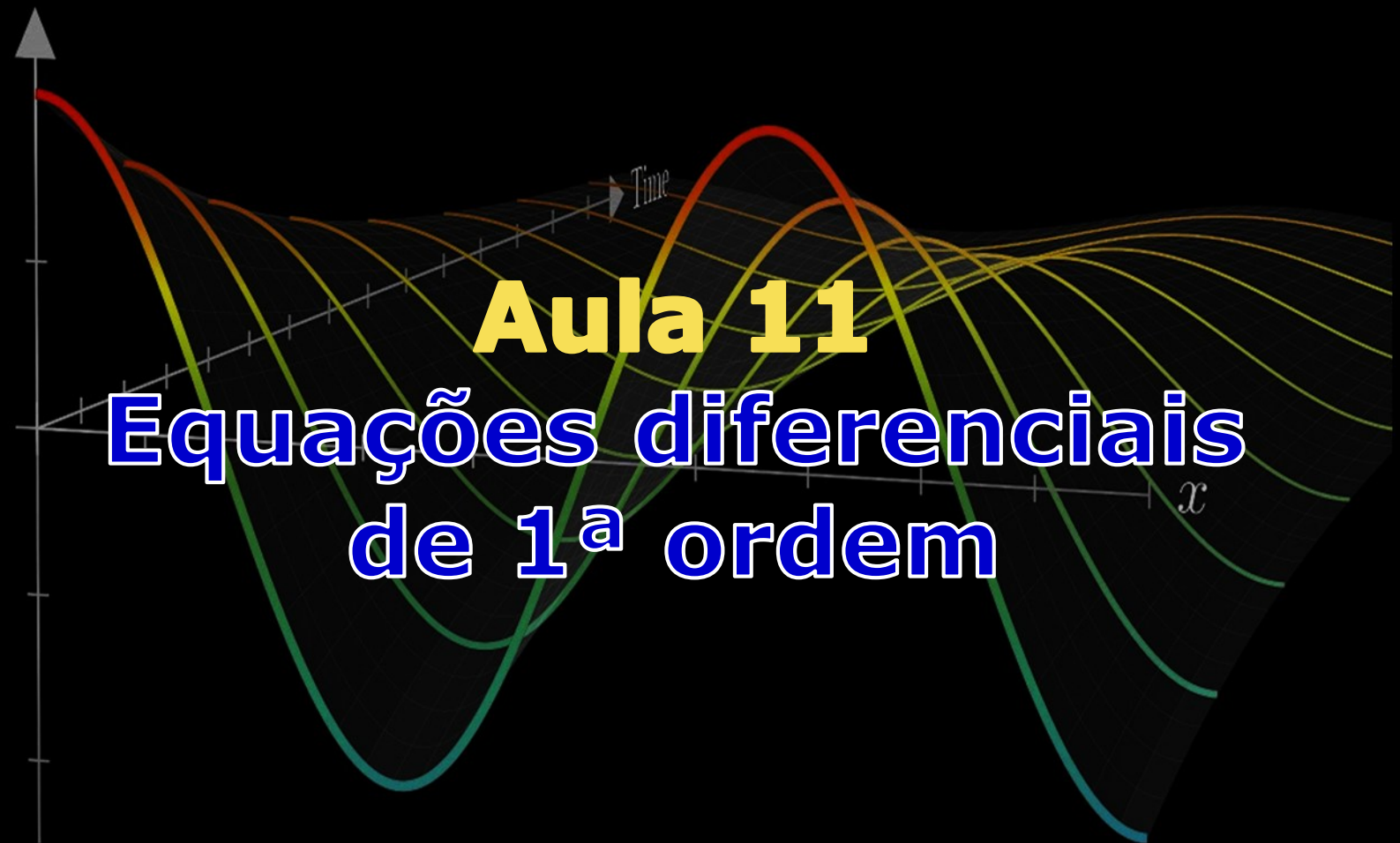
$$ty' - y = t^2 \quad (\text{Primeira orden})$$

$$y'' - y = 0 \quad (\text{Segunda orden})$$

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \quad (\text{Terceira orden})$$

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.:** qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.:** qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.
- **Existência de solução:** nem sempre uma E.D. tem solução analítica.



Aula 11

Equações diferenciais de 1ª ordem

Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a **forma geral**:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável **$y = \phi(t)$** que satisfaça a equação.
- Não existe método geral, mas **métodos** que se aplicam a alguma **subclasse** das eq. dif. de 1ª ordem.



Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Esta equação é separável, pois os termos podem ser colocados em lados opostos na forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

Integrando ambos os lados tem-se a solução.

Ex. 3 resolver a equação: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{(1 - y^2)}$

✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$3y - y^3 - x^3 = c$$

A constante c é determinada da condição inicial.



Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que **p** e **g** são **funções** da variável **t** .
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.
- A **alternativa** é encontrar um **fator multiplicativo** que torna possível a integração.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\mu(t)y$, então a derivada de $\mu(t)$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \exp \int p(t)dt$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$\mu(t) = \exp \int p(t)dt$$

Ex. 1 Resolver o PVI: $y' + \frac{2}{t}y = 4t; \quad y(1) = 2$

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

- ✓ Multiplicar a eq. pelo fator integrante e integrar:

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3 \Rightarrow \int \frac{d}{dt} (t^2 y) dt = \int 4t^3 dt$$

$$t^2 y = t^4 + c \Rightarrow y = t^2 + \frac{c}{t^2} \xrightarrow{y(1)=2} y = t^2 + \frac{1}{t^2} \quad y > 0$$



Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.
- Independentemente do campo de aplicação, existem três etapas na modelagem matemática.

Etapas de construção de um modelo

1

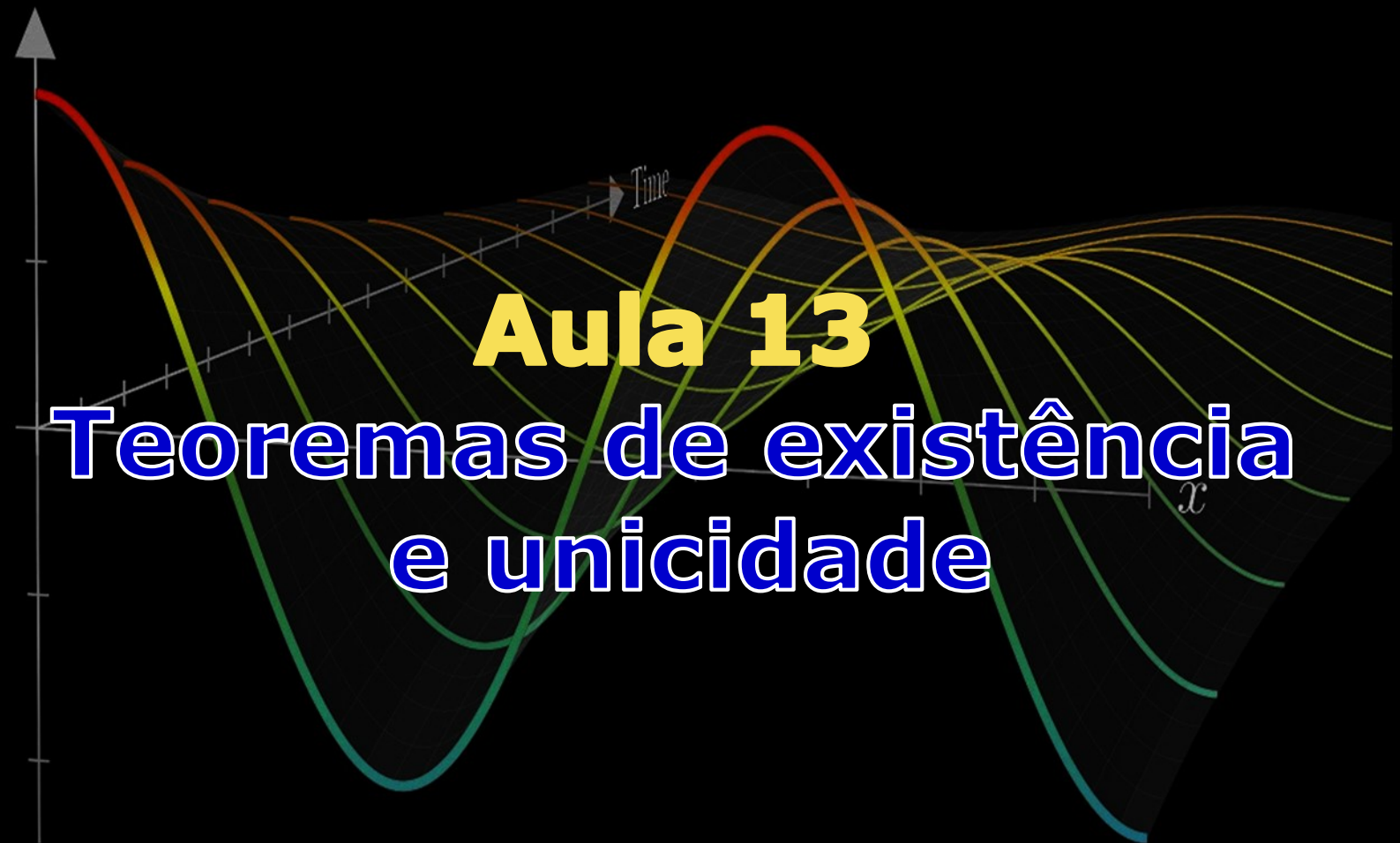
- **Construção do modelo inicial**

2

- **Análise do modelo**

3

- **Comparação com a experimentação ou observação**



Aula 13

Teoremas de existência e unicidade

Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- O teorema seguinte responde estas duas perguntas.

Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I , contendo o ponto $t = t_o$,

Então, existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial $y(t_o) = y_o$ para cada t em I .

O teorema diz que:

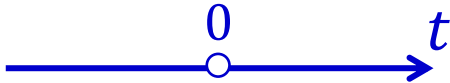
- *O PVI tem solução única se $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo I , contendo a condição inicial e no qual $p(t)$ e $g(t)$ são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que $p(t)$ e $g(t)$ forem descontínuas.*

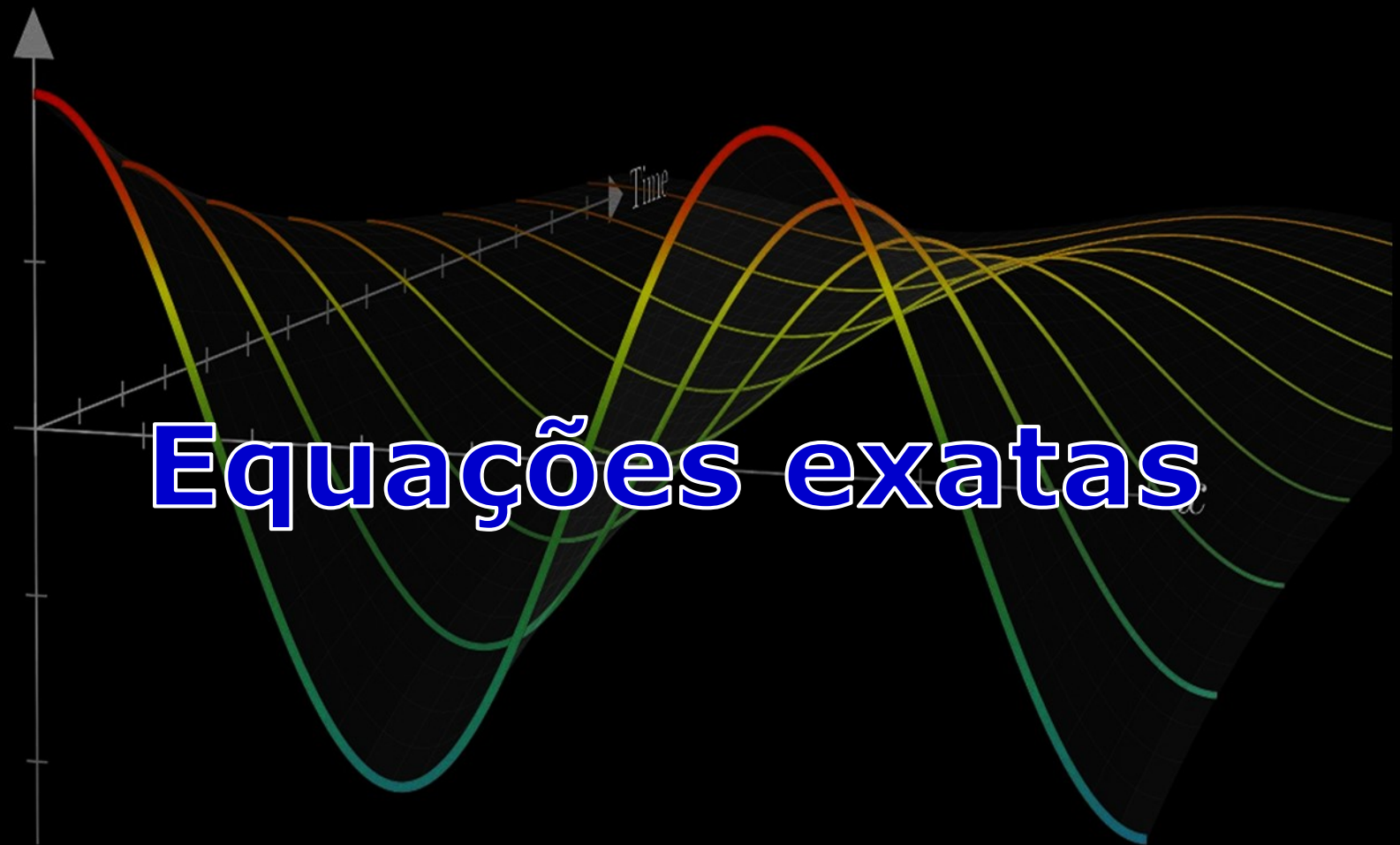
Exemplo 1: Qual o intervalo o PVI tem solução única?

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

- ✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

- ✓ A eq. dif. é linear, g é contínua em $\mathbb{R}$ e p é contínua para todo $t \neq 0$ ($t < 0$ ou $t > 0$). 
- ✓ O intervalo $t > 0$ contém a condição $y(1) = 2$
- ✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma solução única no intervalo $(0, +\infty)$ para t .



Equações exatas

Teorema 2.6.1 (Eq. dif. exatas)

Sejam as funções M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em uma região retangular $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$.

A equação $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ (1)

É uma equação exata se, e somente se:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Isto é, existe uma função ψ tal que:

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

Se, e somente se, M e N satisfazem a eq. dif. (1).

Exemplo 3: Resolver a eq. dif. exata.

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\sen x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

✓ Identificar as funções de duas variáveis M e N :

$$M(x, y) = (y\cos x + 2xe^y), \quad N(x, y) = (\sen x + x^2e^y - 1)$$

✓ Calcular as derivadas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^y \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^y$$

✓ Como as derivadas parciais são iguais, haverá uma função ψ tal que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y\cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \sen x + x^2e^y - 1 \quad (2)$$

Exemplo 3

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x, y) = y \cos x + 2xe^y \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = N(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 \quad (2)$$

- ✓ Integrar a eq. (1) em x :

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = \int (y \cos x + 2xe^y) dx$$

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Derivar a eq. (3) em relação a y :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) \quad (4)$$

- ✓ Igualar eq. (4) com eq. (2):

$$\operatorname{sen} x + x^2 e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1$$

$$g'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad g(y) = -y + C$$

Exemplo 3

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + g(y) \quad (3)$$

- ✓ Substituir $g(y) = -y + C$ na eq. (3)

$$\psi = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y + C$$

- ✓ Conferência das derivadas parciais de ψ :

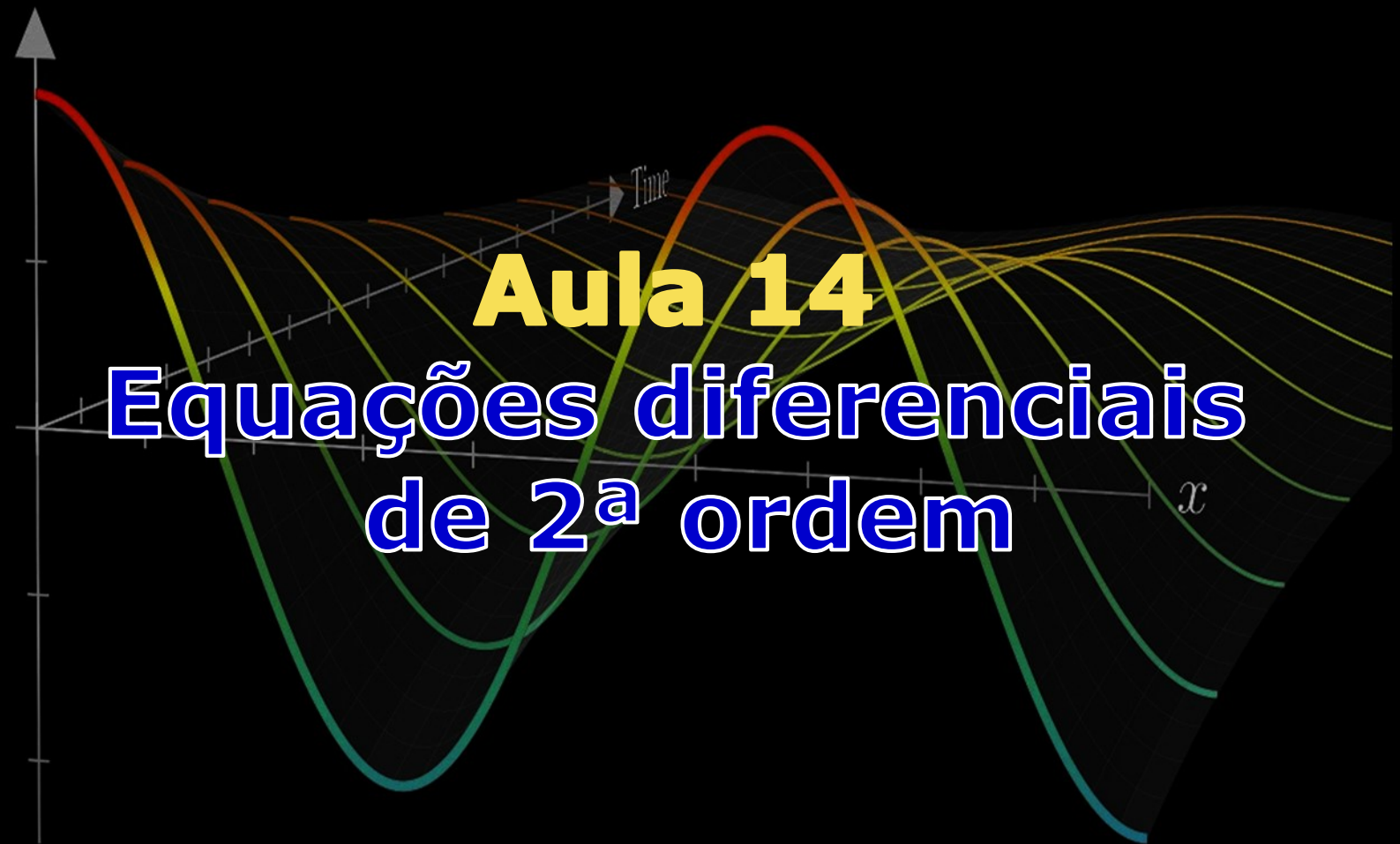
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \cos x + 2x e^y = M(x, y)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1 = N(x, y)$$

- ✓ Portanto, a solução geral para eq. dif. original é:

$$y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y = C$$

C : constante



Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.
- A função f inclui essas duas variáveis e uma possível derivada de primeira ordem de y .
- A equação (1) será linear se apresentar a forma:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (2)$$

- $p, q, e g$ são funções somente da variável t .

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.
- Essas duas condições iniciais indicam um ponto particular (t_0, y_0) e a derivada neste ponto.
- A eq. dif. de 2ª ordem é homogênea quando $g = 0$:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (3)$$

Equações homogêneas a coeficientes constantes

- Raízes reais distintas r_1 e r_2 da eq. característica.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes } a, b \text{ e } c.)$$

$$y = e^{rt} \quad (\text{solução proposta})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

$$y_1 = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{r_2 t} \quad (\text{soluções para eq. dif.})$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Solução geral
da eq. dif. de
2ª ordem.

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Solução geral

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Independentemente das condições iniciais é sempre possível determinar as constantes C_1 e C_2 .
- Além disso, existe apenas uma escolha possível para cada par de condições iniciais.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5r e^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad \text{e} \quad r_2 = -3 \Rightarrow y_1 = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-3t}$$

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

Solução geral
da eq. dif.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow$$

Inserindo:

$$y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

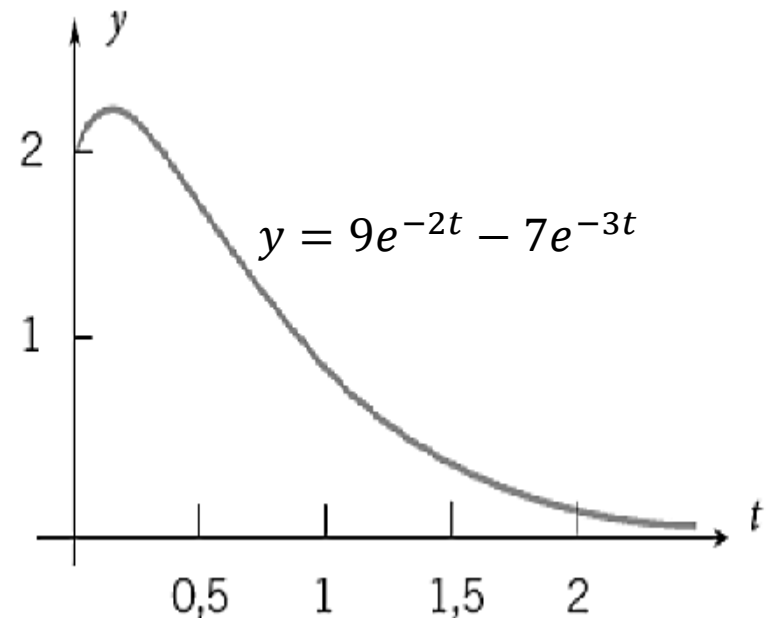
$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

Solução do PVI

Gráfico da
solução do PVI



Aula 15
Raízes complexas e repetidas da Eq. 2ª ordem

Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

- Se o discriminante $b^2 - 4ac < 0$, então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ e } r_2 = \lambda - i\mu, \quad \begin{cases} \lambda \text{ e } \mu: \text{ números reais} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

$$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)t} \text{ e } y_2 = e^{(\lambda-i\mu)t} \quad (\text{soluções da eq. dif.})$$

Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

- As soluções y_1 e y_2 podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos\mu t \pm i\sin\mu t)$$

- A parte **real** e **imaginária** da solução está representada pelas funções reais $e^{\lambda t} \cos\mu t$ e $e^{\lambda t} \sin\mu t$, respectivamente.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i \quad \text{Onde: } \sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + 3i \quad r_2 = -\frac{1}{2} - 3i$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \sin 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \sin 3t)$$

- ✓ Logo o conjunto solução da eq. dif. pode ser escrito como combinação linear das soluções.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \sin 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \sin 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \sin 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes C_1 e C_2 e a combinação com a notação complexa $i = \sqrt{-1}$ podem ser substituídas pelas constantes k_1 e k_2 .

Se $(C_1 + C_2) = k_1$ e $(iC_1 - iC_2) = k_2$, então:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \sin 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

Conjunto solução
da eq. dif.

Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \sin 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \sin 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \sin 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \sin 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \sin 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \sin 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 3$$

$$y = e^{-\frac{t}{2}} (2 \cos 3t + 3 \sin 3t)$$

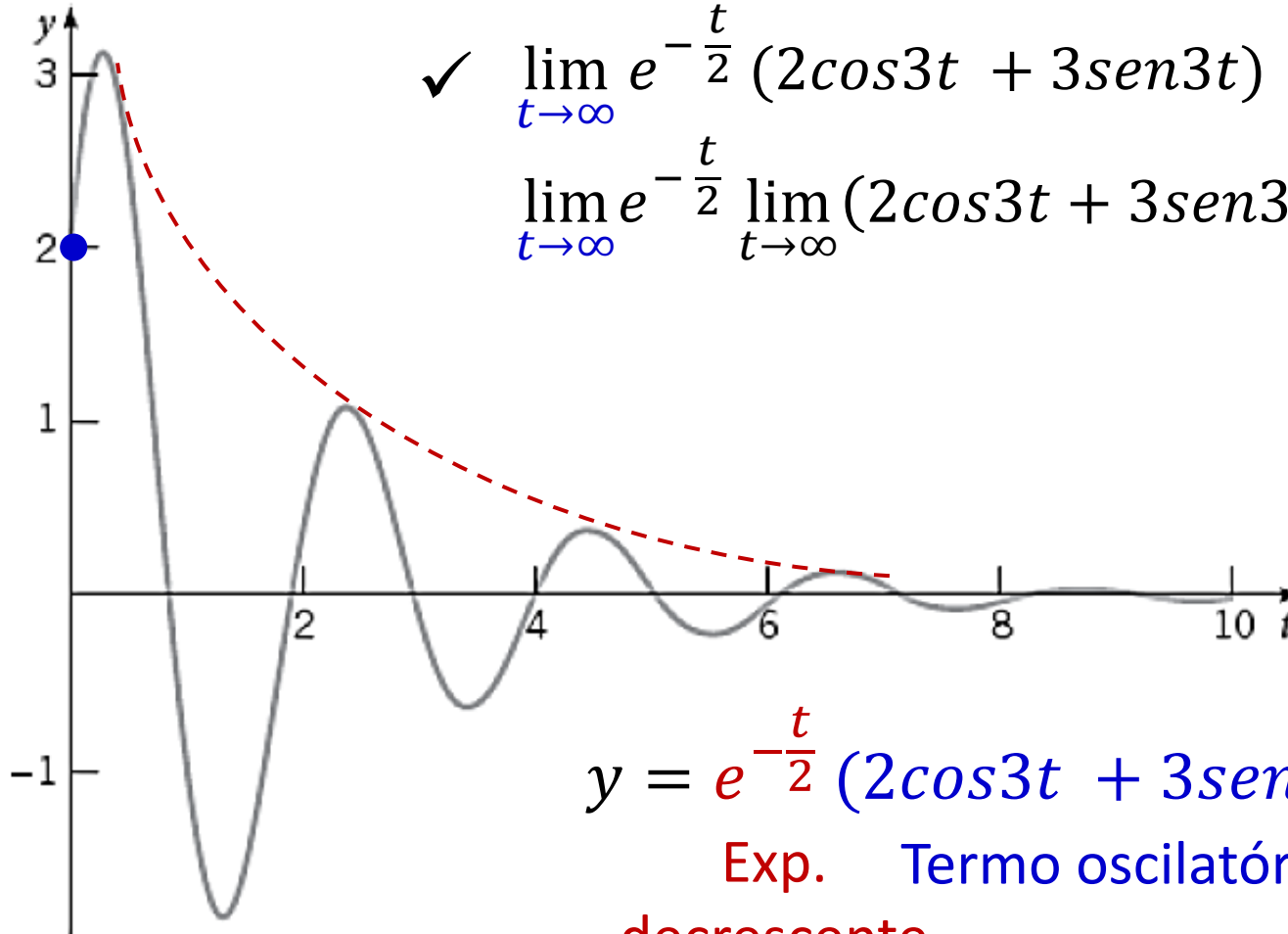
Solução do PVI

Exemplo 1: Gráfico da solução:

✓ P/ $t = 0$: $y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$

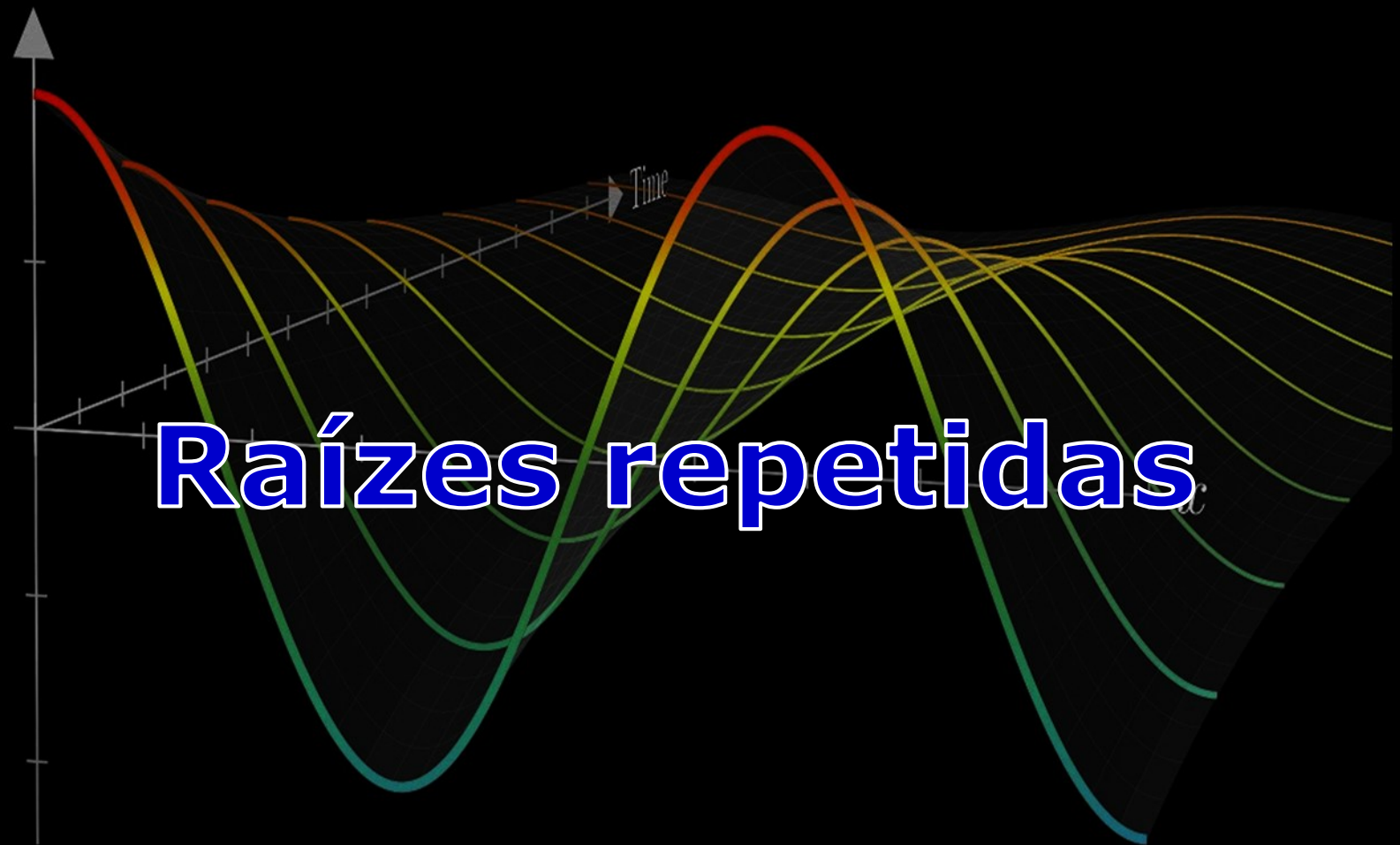
✓ $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} (2\cos 3t + 3\sin 3t) = 0$



$y = e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t)$

Exp. Termo oscilatório
decrecente



Raízes repetidas

- Seja a **equação característica** da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se $b^2 - 4ac = 0$, então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{\frac{-b}{2a}t}$$

- O conjunto solução pode ser encontrado pelo produto de uma função de t pela primeira solução.

$$y = v(t)y_1(t) = (1 + t)e^{\frac{-b}{2a}t}$$

Exemplo 2: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

✓ Inserindo a primeira condição inicial tem-se:

$$y(0) = 2 = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 0 e^{\frac{0}{2}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left(\frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2/3$$

- ✓ Assim, a solução do PVI é:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3} t e^{\frac{t}{2}}$$



Aula 16

Método dos coeficientes indeterminados

Método dos coeficientes indeterminados

➤ Seja um PVI, não homogêneo da forma:

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = g(t) & a, b, c: \text{constantes} \\ y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

Etapas do método:

1. Encontrar a **solução da eq. homogênea** associada;
2. Identificar **$g(t)$** : *e*, *sen*, *cos*, *polinômio*, etc;
3. Se **$g(t)$** é uma soma de **n parcelas** formar **n problemas** da forma: $ay'' + by' + cy = g_i(t)$;
4. Para o *i*-ésimo problema supor uma solução particular y_{pi} apropriada. * **Se houver duplicação da proposta com alguma sol. da homogênea**, multiplicá-la por t, t^2, t^n até eliminar a linearidade.

Método dos coeficientes indeterminados

Etapas do método (continuação)

5. Encontrar a solução particular y_{pi} para cada problema. A soma destas soluções é a solução particular da eq. não homogênea;
6. Somar o conjunto solução da homogênea com a solução particular final;
7. Utilizar as condições iniciais para determinar as constantes do conjunto solução da homogênea.

Exemplo 1: Encontrar a **solução particular** da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

✓ Proposta: $y_p = Ae^{2t}$, $y_p' = 2Ae^{2t}$, $y_p'' = 4Ae^{2t}$

✓ Substituindo a proposta na eq. dif.:

$$4Ae^{2t} - 3(2Ae^{2t}) - 4Ae^{2t} = 3e^{2t}$$

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}$$

$$-6A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = -1/2$$

✓ Logo a solução particular é:

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{2t},$$

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

- ✓ Proposta: $y_p = Ae^{-t}$, $y_p' = -Ae^{-t}$, $y_p'' = +Ae^{-t}$
- ✓ Esta proposta não satisfaz a e. dif. porque zera todos os termos e não é possível determinar A .
- ✓ Ao verificar a solução da homogênea, constata-se que a proposta é igual a uma das soluções:

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 4) = 0$$

$$r_1 = -1 \text{ e } r_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = C_1 e^{-t}, y_2 = C_2 e^{4t}$$

- ✓ Para remover a linearidade entre soluções, multiplica-se a proposta por t .

Exemplo 2: Encontrar a solução particular da eq. dif.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

✓ Nova proposta: $y_p = Ate^{-t}$, $y_p' = Ae^{-t} - Ate^{-t}$,
 $y_p'' = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}$

✓ Substituindo a nova proposta na eq. dif.:

$$(-2A + At)e^{-t} - 3(A - At)e^{-t} - (4At)e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$-5A + (A + 3A - 4A)t = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -2/5$$

✓ Logo a solução particular é:

$$y_p = -\frac{2}{5}te^{-t},$$



Transformada de Laplace ($\mathcal{L}$)

- Definição da Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$\mathcal{L}$: símbolo da transformada de Laplace.

$F(s)$: função transformada de $f(t)$.

e^{-st} : núcleo da transformada de Laplace.

- Sempre que a integral imprópria convergir existirá a transformada $F(s)$ da função $f(t)$.

Exemplo 3: Calcule a Transformada de Laplace.

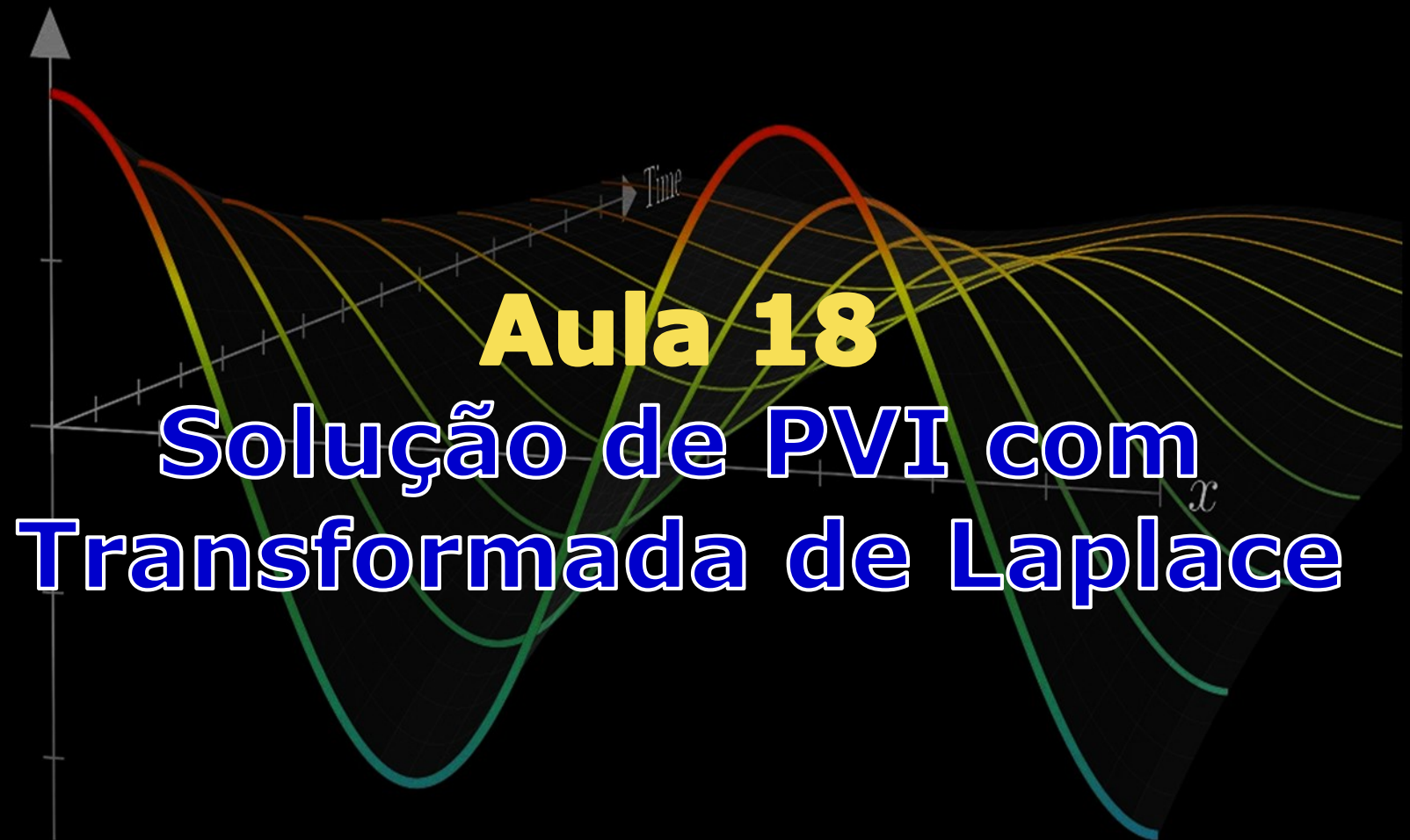
$$f(t) = 5e^{-2t} - 3\text{sen}4t \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\}$$

✓ Consultar a tabela de transformadas:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} & \begin{array}{l} a = -2 \\ \Rightarrow \end{array} & 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \frac{5}{s+2} \\ \mathcal{L}\{\text{sen}at\} = \frac{a}{s^2+a^2} & \begin{array}{l} a = 4 \\ \Rightarrow \end{array} & 3\mathcal{L}\{\text{sen}4t\} = \frac{12}{s^2+4^2} \end{array}$$

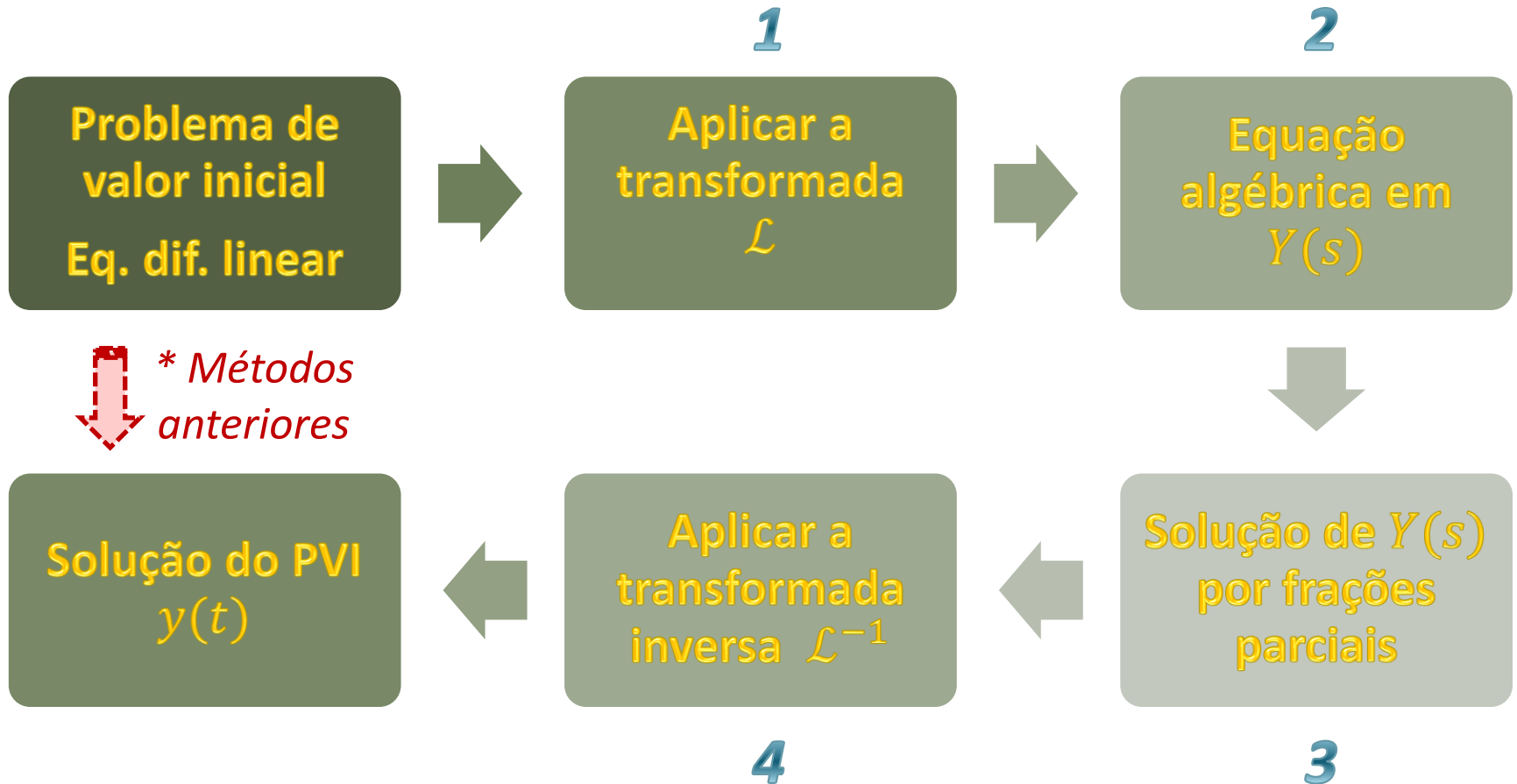
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+4^2}$$



Aula 18

Solução de PVI com Transformada de Laplace

Transformada de Laplace



* Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Então,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Corolário 6.2.2

Com as mesmas condições do teorema tem-se que:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Tabela de transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sY(s) - f(0) \quad | \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2Y(s) - sf(0) - f'(0)$$

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
$t^n \quad (n: \text{inteiro positivo})$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
$e^{at}t^n \quad (n: \text{inteiro positivo})$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s} \quad s > 0$
$\text{sen } at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
$\text{cos } at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} + (2s + 1)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)} \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{3ª eq. } -1ª \\ \text{4ª eq. } -2ª \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3A = 6 \\ 3B = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A = 2} \\ \boxed{B = 5/3} \end{array} \begin{array}{l} \text{Na 1ª} \\ \text{Na 2ª} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{C = 0} \\ \boxed{D = -2/3} \end{array} \end{array}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$$

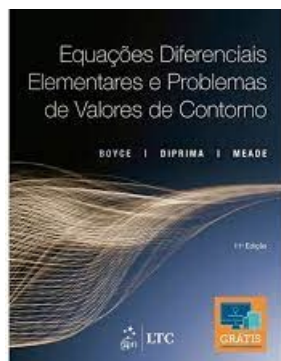
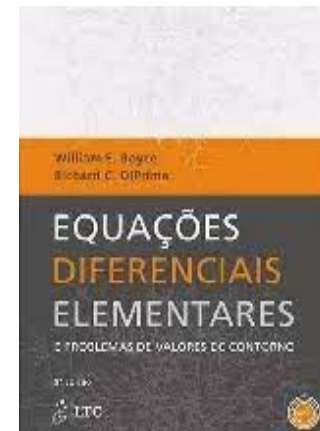
✓ Consultar tabela de transformada para obter a solução do PVI.

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.