Cálculo I

Engenharia

Aula 10
Continuidade

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Continuidade

- Imaginemos a trajetória de um objeto;

Continuidade

- Imaginemos a trajetória de um objeto;
- Observa-se um movimento ininterrupto;

Continuidade

- Imaginemos a trajetória de um objeto;
- Observa-se um movimento ininterrupto;
- Continuidade de funções, do ponto de vista matemático, indica curvas sem interrupção ou saltos.

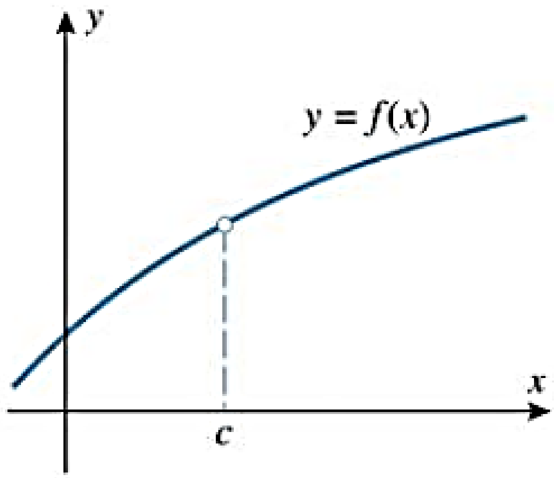
Definição de continuidade

- Primeira ideia: considerar o gráfico de funções que não apresentem quebras ou buracos;

- Mas o que vem a ser buracos ou quebras?

- Observemos alguns gráficos.

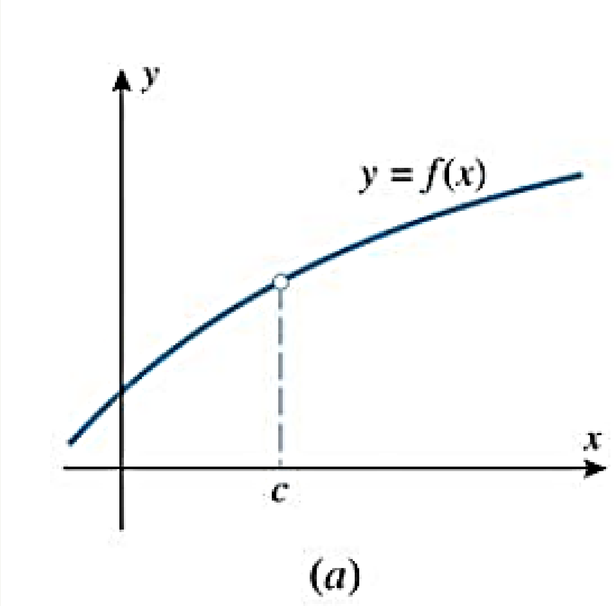
Por que a função não é contínua em $x = c$?



(a)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

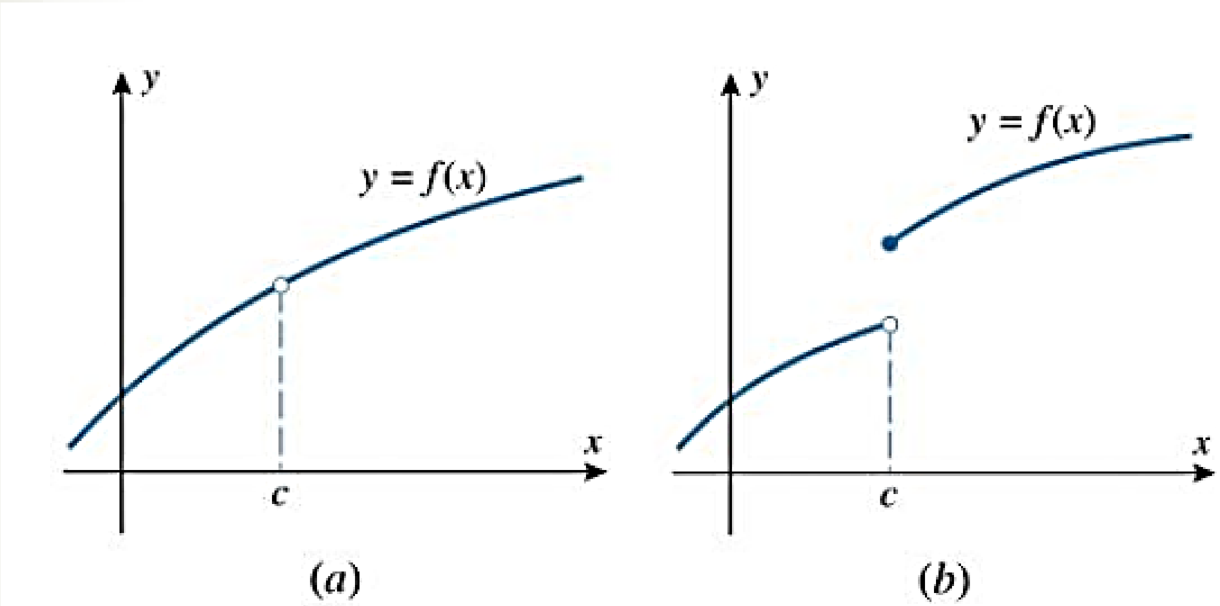
Por que a função não é contínua em $x = c$?



f não está definida em $x = c$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

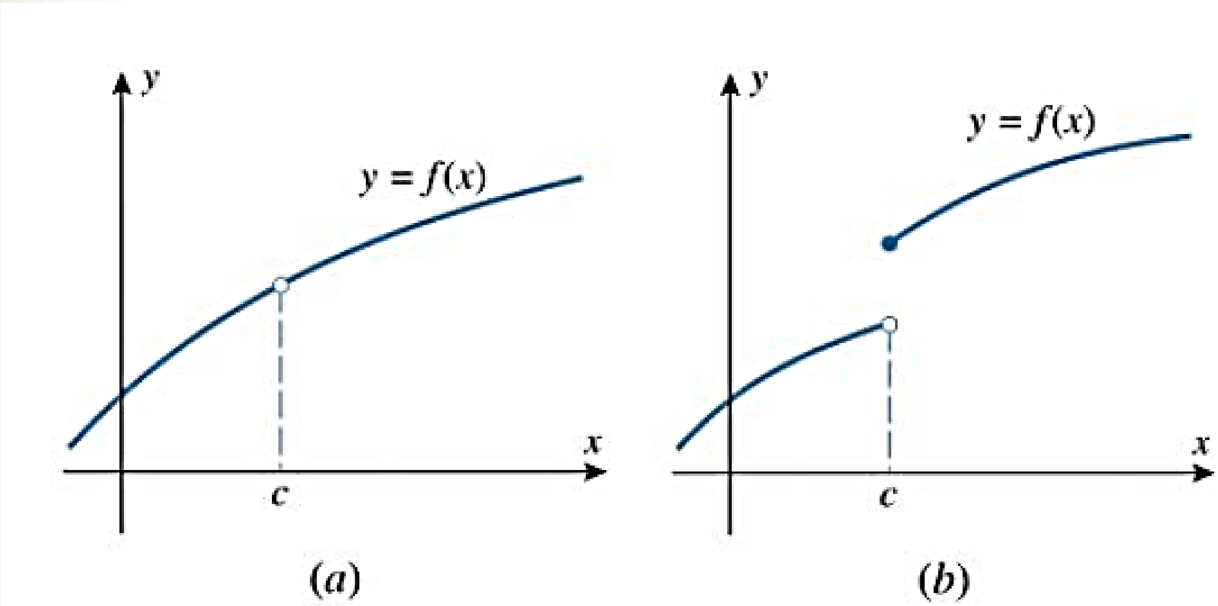
Por que a função não é contínua em $x = c$?



f não está definida em $x = c$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Por que a função não é contínua em $x = c$?

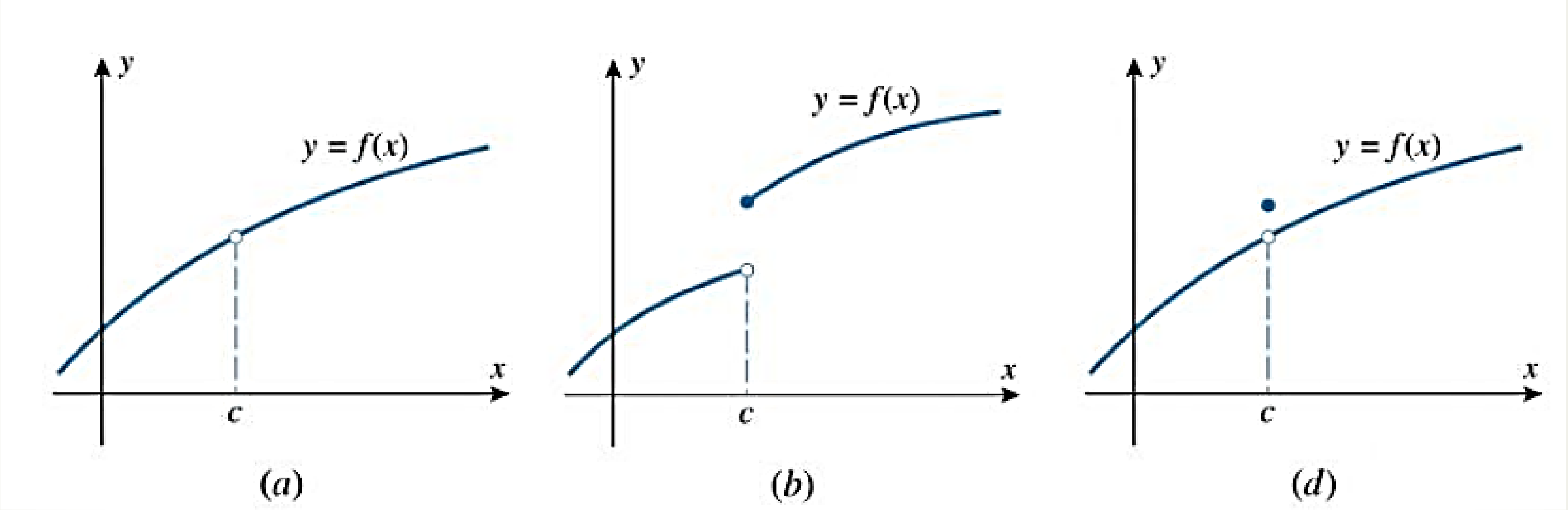


f não está definida em $x = c$

O limite de f não existe quando $x \to c$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Por que a função não é contínua em $x = c$?

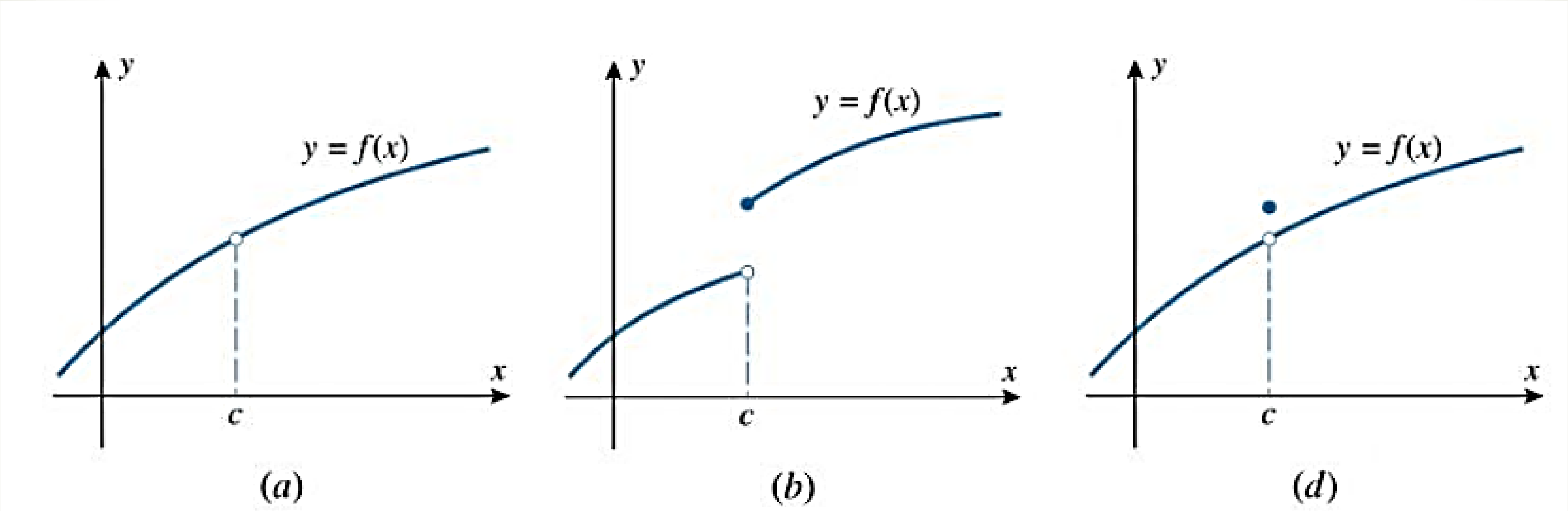


f não está definida em $x = c$

O limite de f não existe quando $x \to c$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Por que a função não é contínua em $x = c$?



f não está definida em $x = c$

O limite de f não existe quando $x \to c$

$\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$

prof. Henrique A M Faria

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição 2.5.1

Dizemos que uma função f é contínua em $x = c$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $f(c)$ está definida;
2. $\lim_{x \to c} f(x) = existe$;
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definição 2.5.1

Dizemos que uma função f é contínua em $x = c$ se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $f(c)$ está definida;
2. $\lim_{x \to c} f(x) = existe$;
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Se uma ou mais condições falharem então f será descontínua em $x = c$.

Exemplo 1 – Verifique se as funções são contínuas no ponto $x = 2$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

Continuidade em um intervalo

"Se uma função for contínua em cada ponto do intervalo (a, b) então f é contínua em (a, b)."

- Esta definição envolve o limite bilateral;

- Assim, não se aplica aos extremos do intervalo fechado $[a, b]$;

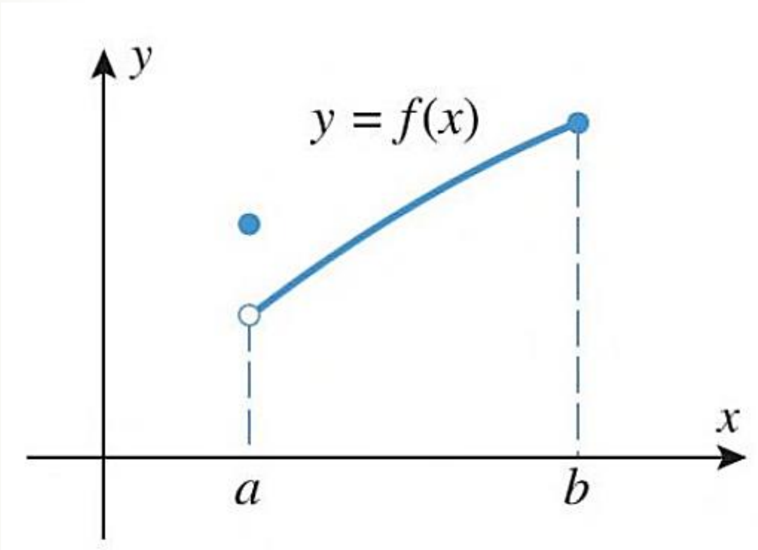
Continuidade em um intervalo

"Se uma função for contínua em cada ponto do intervalo (a, b) então f é contínua em (a, b)."

- Para contornar esse problema:
- Considera-se uma função contínua nos pontos extremos de um intervalo, se o valor ao ponto extremo for igual ao limite lateral adequado nesse ponto;

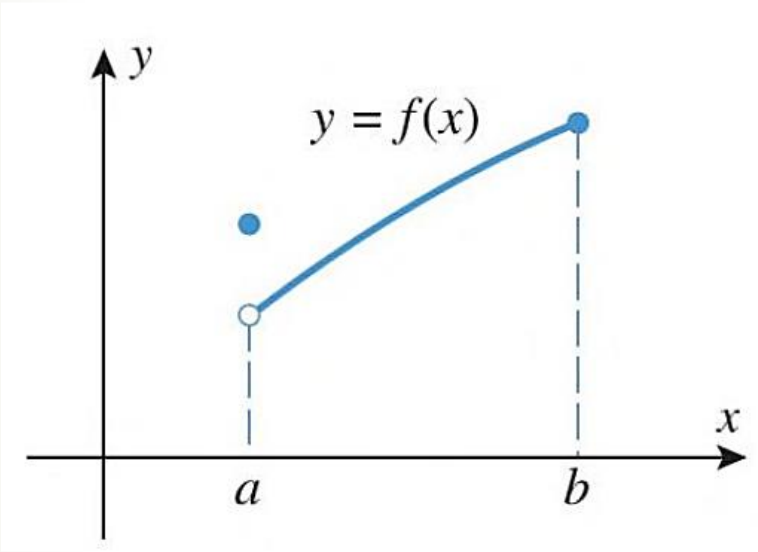
prof. Henrique A M Faria

Exemplo



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

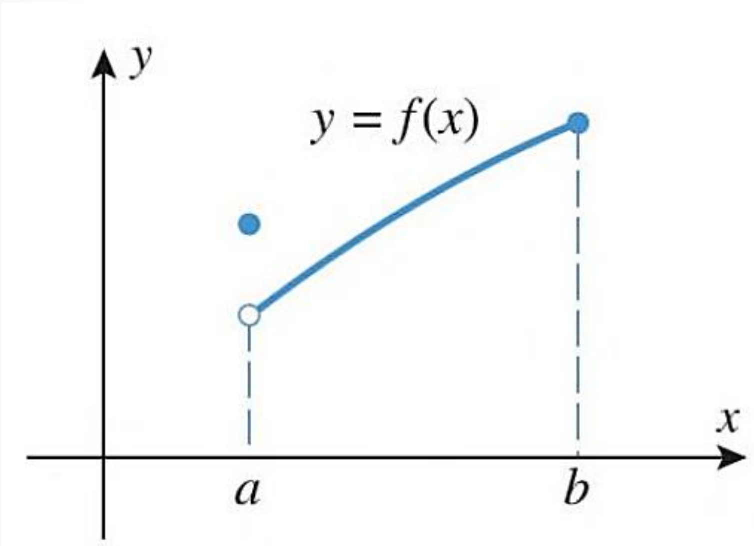


Essa função é contínua no ponto extremo a direita, pois:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo



Essa função é contínua no ponto extremo a direita, pois:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Mas, não é contínua a esquerda, porque:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Continuidade em um intervalo

Dizemos então:

- Uma função é contínua à esquerda no ponto c:

  Se $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

- E é contínua à direita no ponto c:

  Se $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

Definição 2.5.2

Uma função f é dita contínua em um intervalo fechado $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

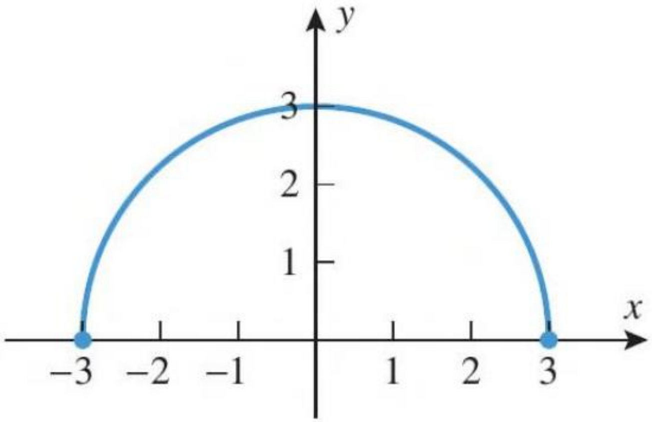
1. f é contínua em $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$;
2. f é contínua à direita de $\boldsymbol{a}$;
3. f é contínua à esquerda de $\boldsymbol{b}$.

Exemplo 2 – Mostre que a função f é continua em todo seu domínio

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Exemplo 2 – Mostre que a função f é continua em todo seu domínio

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$



Teorema 2.5.3 - Propriedades

Se as funções f e g forem contínuas em c então:

a) $f + g$ é contínua em $\boldsymbol{c}$;

b) $f - g$ é contínua em $\boldsymbol{c}$;

c) fg é contínua em $\boldsymbol{c}$;

d) $\frac{f}{g}$ é contínua em $\boldsymbol{c}$ se $\boldsymbol{g(c) \neq 0}$ e tem uma descontinuidade em $\boldsymbol{c}$ se $\boldsymbol{g(c) = 0}$.

Continuidade de polinômios e funções racionais

Mostramos no estudo de limites que

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a) \quad \forall\, a \in \mathbb{R};$$

- Portanto, os polinômios são contínuos em toda parte;
- Como as funções racionais são quocientes de polinômios são contínuas nos pontos em que o denominador não se anula.

Exemplo 3 – Para que valores f não é contínua?

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

Exercícios – verificar a continuidade

a) $f(x) = \frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

Parte B

Teorema 2.5.5 - Composições

Se $\lim_{x \to c} g(x) = L$ e se f é contínuas em L então:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

Ou seja: $$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(\lim_{x \to c} g(x))$$

A igualdade é válida para os limites:

$$\lim_{x \to c^-}, \quad \lim_{x \to c^+}, \quad \lim_{x \to -\infty}, \quad \lim_{x \to +\infty}$$

Teorema 2.5.6 - Composições

a) Se a função g for contínua em um ponto c e a função f for contínua no ponto $g(c)$, então a composição $f \circ g$ é contínua em c;

b) Se a função g for contínua em toda parte e a função f for contínua em toda parte, então a composição $f \circ g$ é contínua em toda parte.

Exemplo 3 – Mostrar que a função é contínua em toda parte.

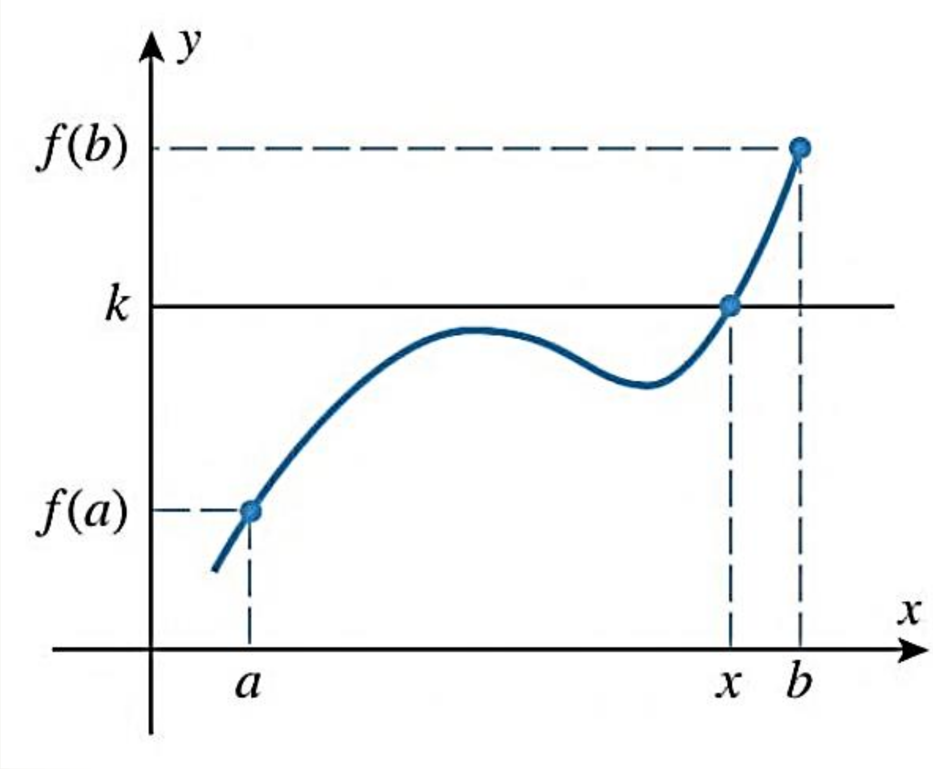
$$f(x) = |4 - x^2|$$

Teorema do valor intermediário

Se f for uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e k um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então:

Existe no mínimo um número x no intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) = k$.

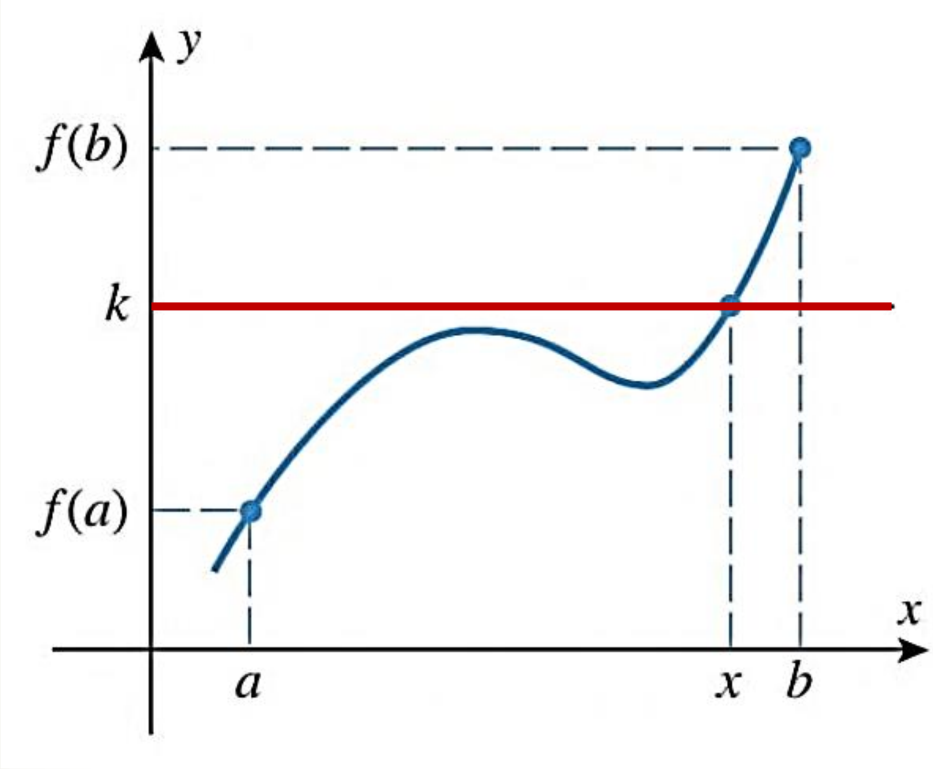
Exemplo



- A função f é contínua em $[a, b]$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

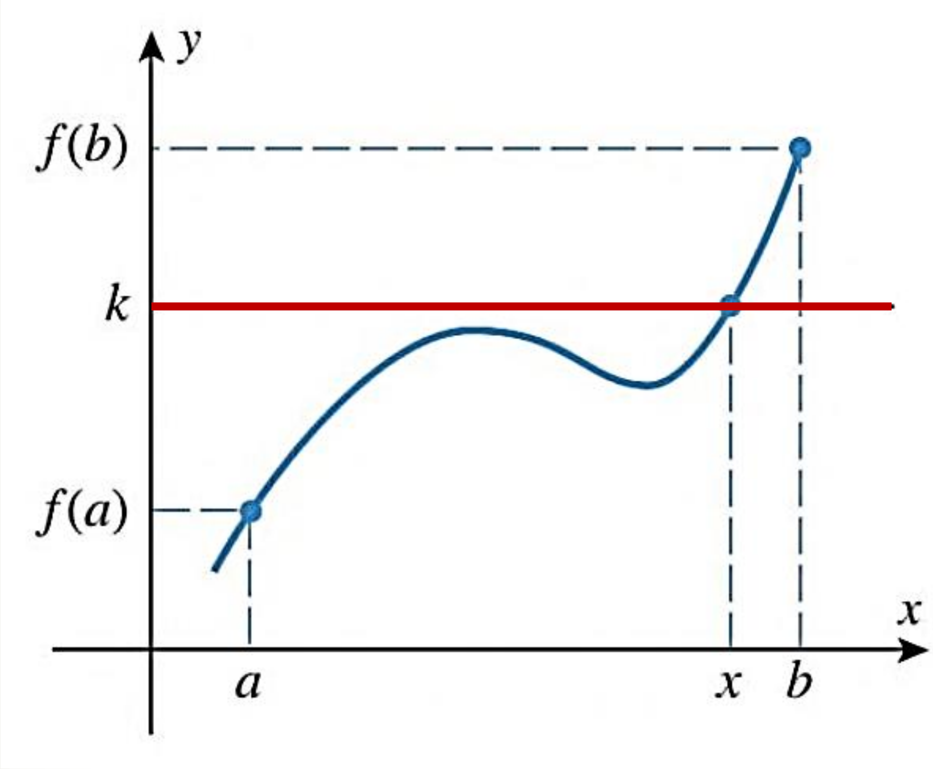
Exemplo



- A função f é contínua em $[a, b]$
- Seja a reta $x = k$ em que $k \in [a, b]$;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo



- A função f é contínua em $[a, b]$
- Seja a reta $x = k$ em que $k \in [a, b]$;
- Então a reta cruzará a curva pelo menos uma vez.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

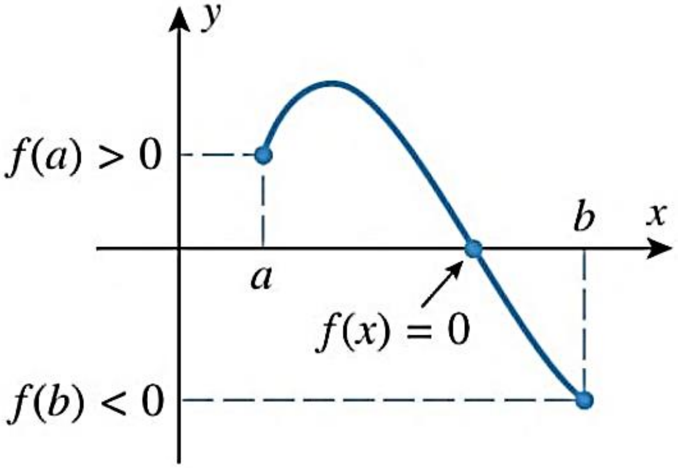
Teorema 2.5.8

Se f for uma função contínua em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes de zero, com sinais opostos, então existe, no mínimo uma solução para a equação $f(x) = 0$ no intervalo (a, b).

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema 2.5.8

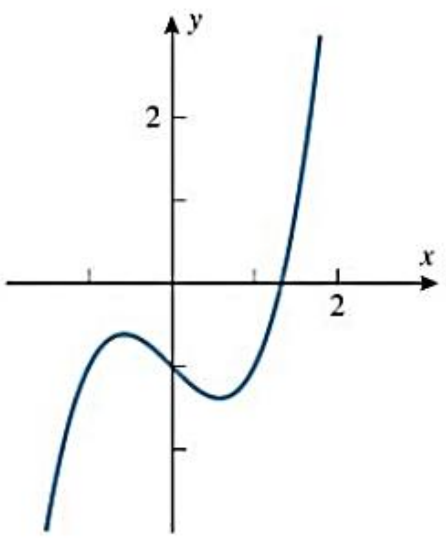
Se f for uma função contínua em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ forem diferentes de zero, com sinais opostos, então existe, no mínimo uma solução para a equação $f(x) = 0$ no intervalo (a, b).



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

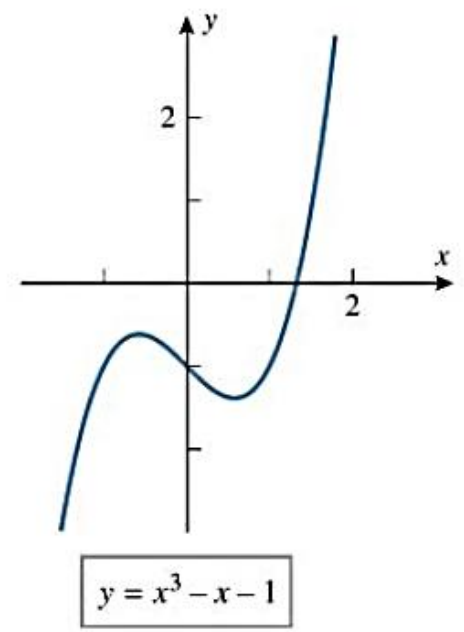
Exemplo 5 – Encontrar o valor aproximada para raiz da função com erro de , no máximo 0,005.

$$f(x) = x^3 - x - 1$$

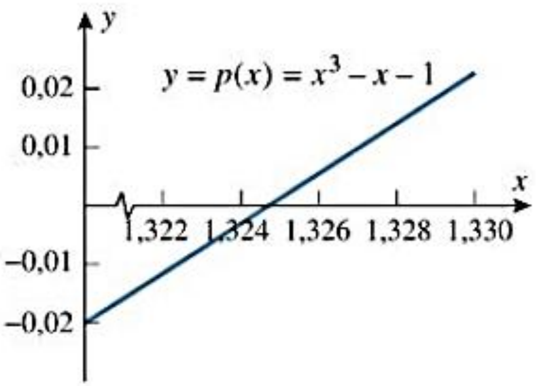


$y = x^3 - x - 1$

Exemplo 5 – Encontrar o valor aproximada para raiz da função com erro de , no máximo 0,005.

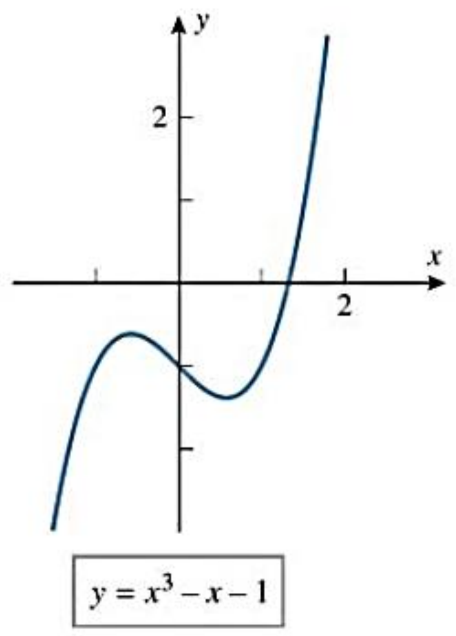


$$f(x) = x^3 - x - 1$$



Exemplo 5 – Encontrar o valor aproximada para raiz da função com erro de , no máximo 0,005.

$$f(x) = x^3 - x - 1$$



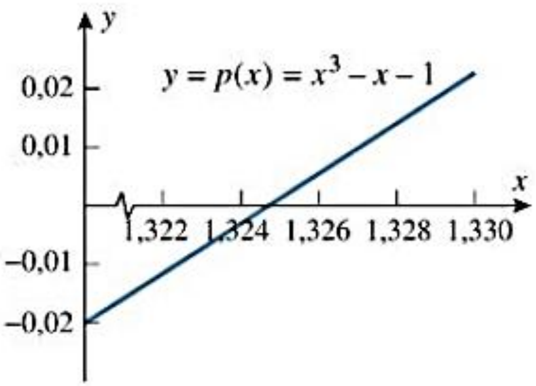
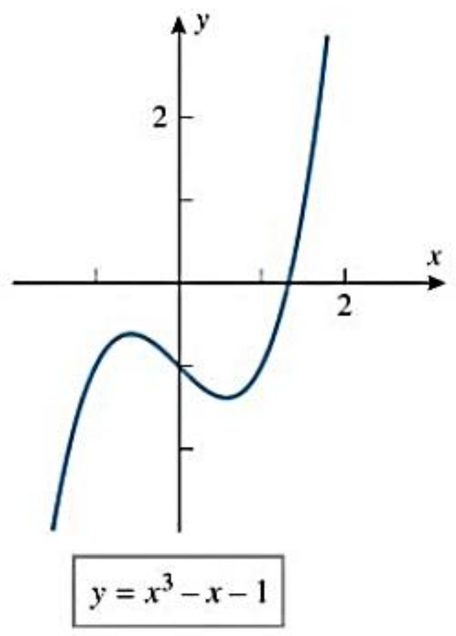


Tabela 1.5.2

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$p(x)$	−1	−0,77	−0,47	−0,10	0,34	0,88	1,50	2,21	3,03	3,96	5

Exemplo 5 – Encontrar o valor aproximada para raiz da função com erro de , no máximo 0,005.

$$f(x) = x^3 - x - 1$$



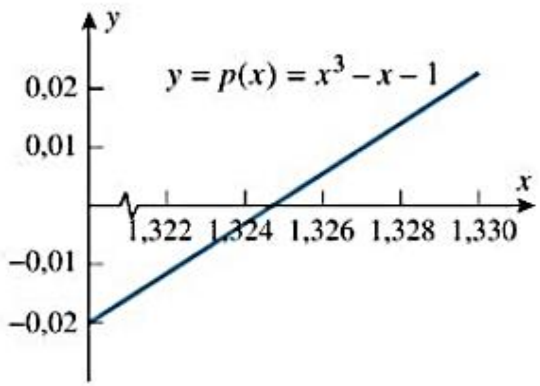


Tabela 1.5.2

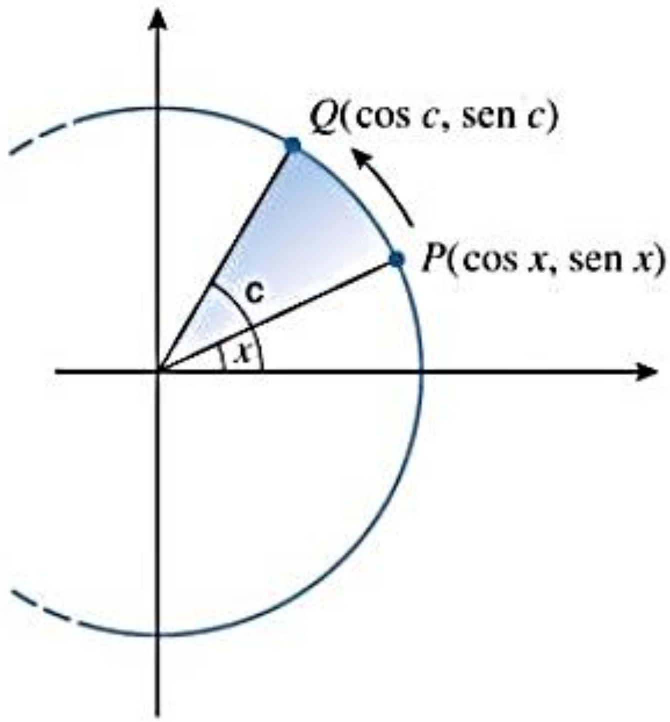
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$p(x)$	–1	–0,77	–0,47	–0,10	0,34	0,88	1,50	2,21	3,03	3,96	5

Tabela 1.5.3

x	1,3	1,31	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,4
$p(x)$	–0,103	–0,062	–0,020	0,023	0,066	0,110	0,155	0,201	0,248	0,296	0,344

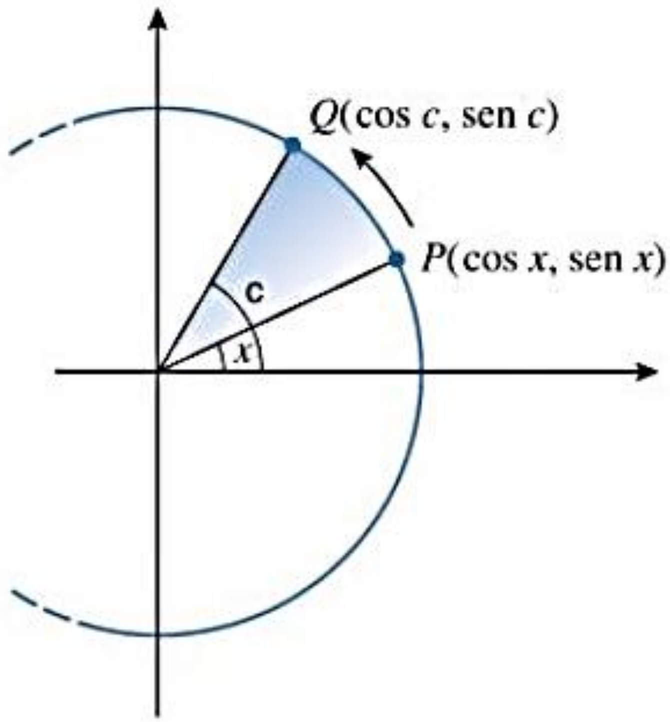
Continuidade de funções trigonométricas

Seja um círculo trigonométrico de raio unitário



Continuidade de funções trigonométricas

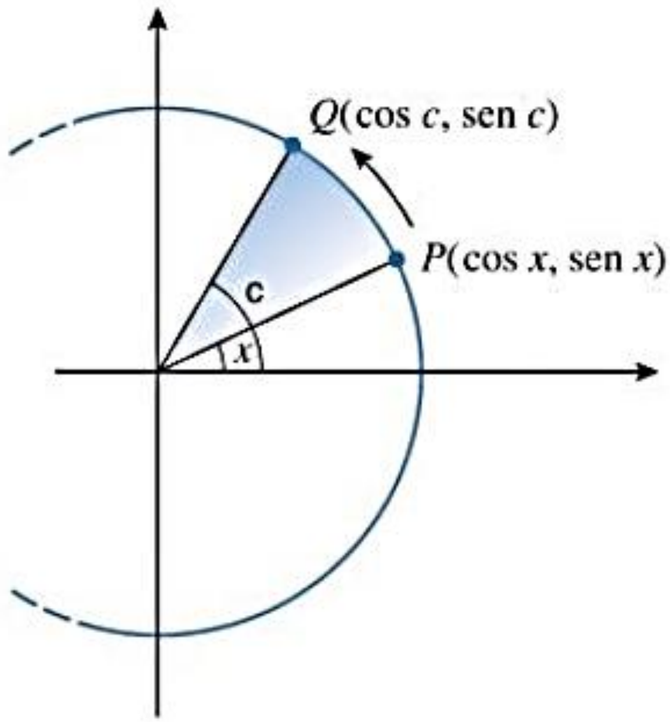
Seja um círculo trigonométrico de raio unitário



- O ângulo c é fixo;
- O ângulo x pode variar;
- Ambos são medidos em radianos;

Continuidade de funções trigonométricas

Seja um círculo trigonométrico de raio unitário

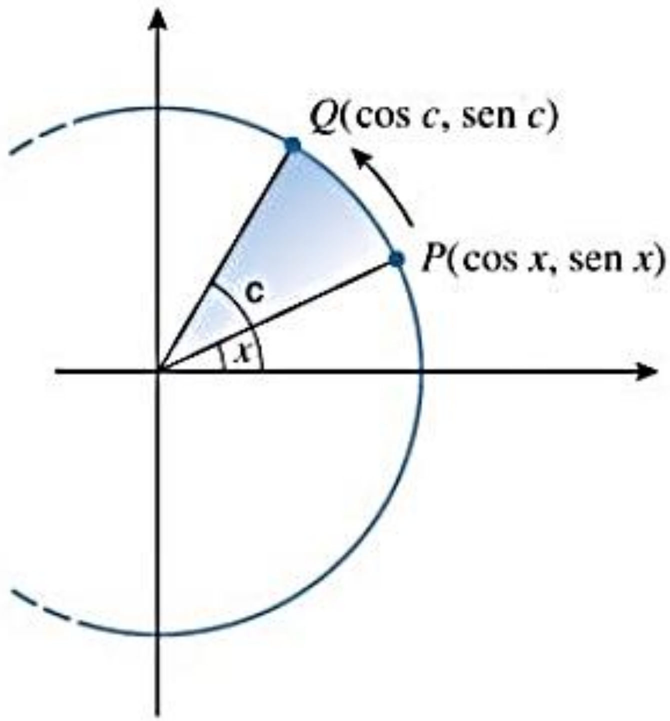


- O ângulo c é fixo;
- O ângulo x pode variar;
- Ambos são medidos em radianos;
- Quando $x \to c$ $P(cosx, senx) \to Q$:

$$\lim_{x \to c} senx = senc$$
$$\lim_{x \to c} cosx = cosc$$

Continuidade de funções trigonométricas

Seja um círculo trigonométrico de raio unitário



- O ângulo c é fixo;
- O ângulo x pode variar;
- Ambos são medidos em radianos;
- Quando $x \to c$ $P(cos x, sen x) \to Q$:

$$\lim_{x \to c} sen x = sen c$$

$$\lim_{x \to c} cos x = cos c$$

Assim, $sen x$ e $cos x$ são contínuos em toda parte.

Teorema 2.6.1

Se c é um número no domínio natural da função trigonométrica, então:

$$\lim_{x \to c} senx = senc$$

$$\lim_{x \to c} cosx = cosc$$

$$\lim_{x \to c} tgx = tgc$$

Exemplo 1 – Encontrar o limite

$$\lim_{x \to 1} \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$$

Continuidade das funções inversas

Teorema 2.6.2

Se f é uma função injetora, contínua em cada ponto do seu domínio, então f^{-1} é contínua em cada ponto do seu domínio.

"A inversa de uma função contínua é contínua."

Exemplo – mostrar que a função é contínua

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Teorema do Confronto

Se f, g e h são funções tais que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo x no intervalo aberto que contenha c.

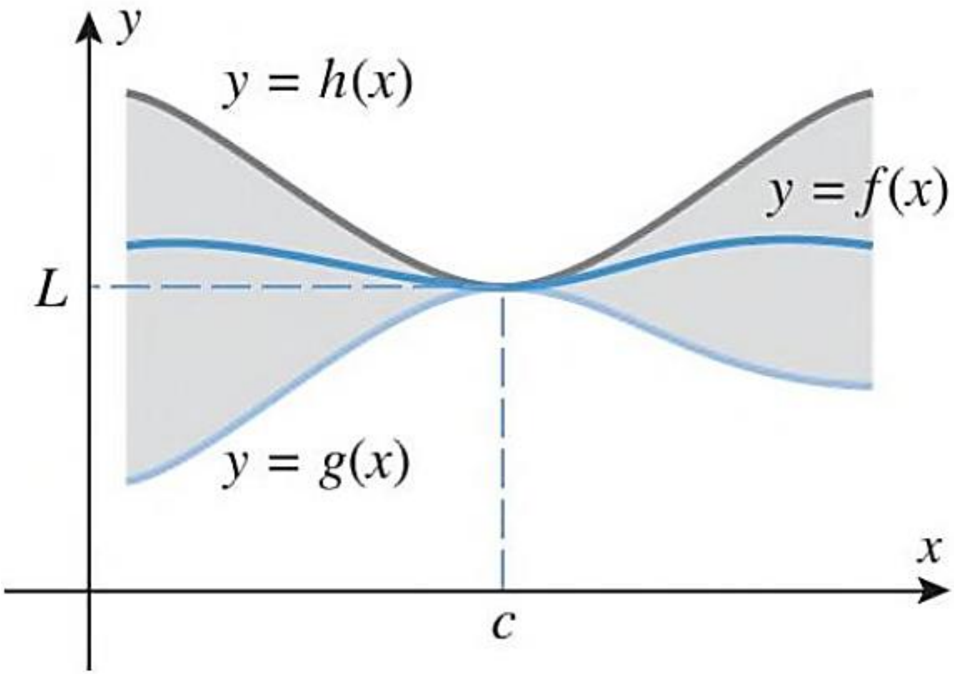
Se g e h tiverem o mesmo limite quando $x \to c$:

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Então f também tem esse mesmo limite, isto é:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

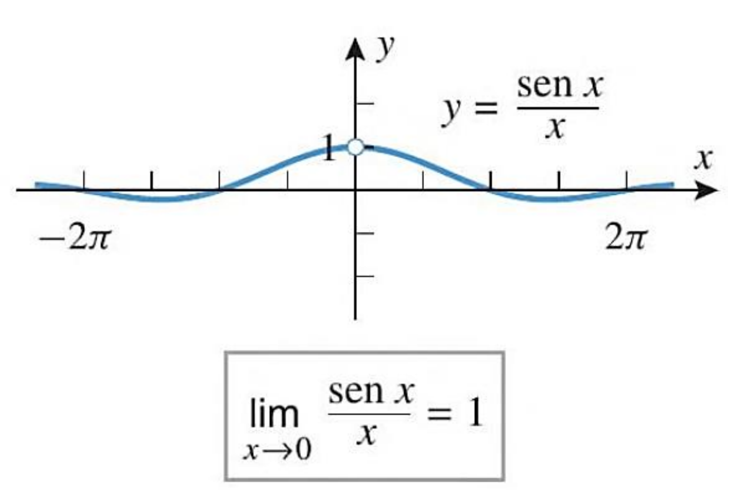
Teorema do Confronto

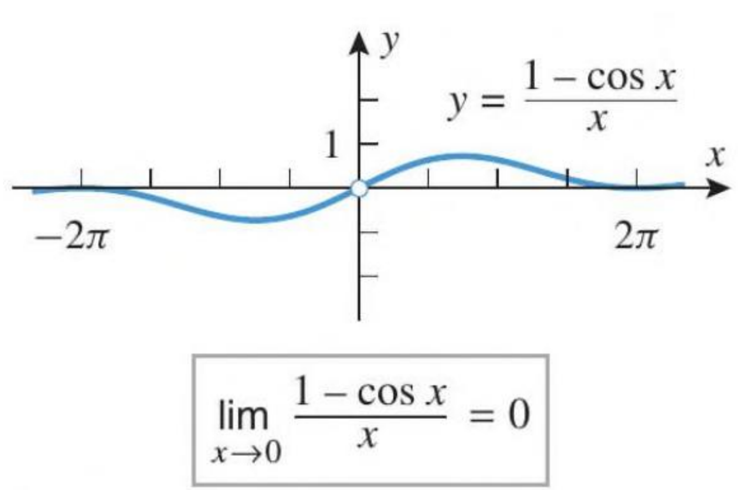


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema 2.6.4

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x} = 0$





Exemplo 4 – Calcular os limites utilizando o teorema 2.6.4

(a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$

(b) $\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{sen2\theta}{\theta}\right)$

Para depois desta aula:

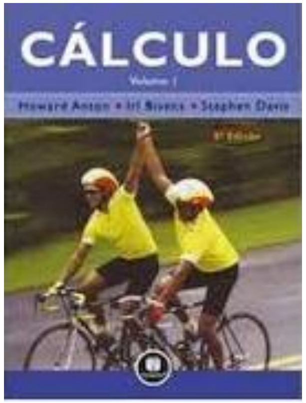
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

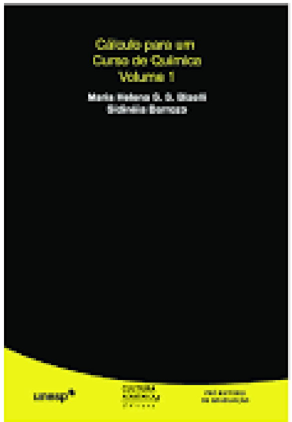
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br