Capítulo 9
Superfícies Quádricas

Geometria Analítica

Prof. Henrique A. M. Faria

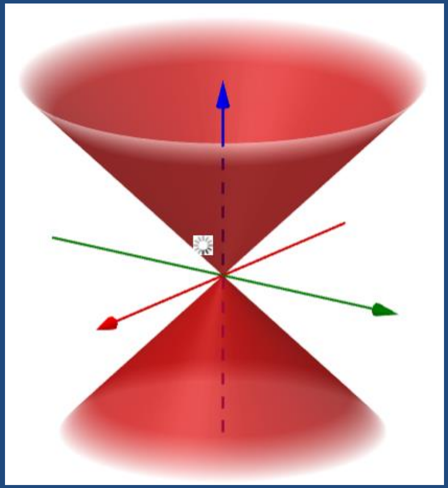
Aula 1

Superfície quádrica

- São superfícies tridimensionais, nas variáveis x, y e z;
- É definida por uma equação do segundo grau nessas três variáveis;
- A intersecção de um plano coordenado, ou paralelo a este, com uma superfície quádrica resulta em uma cônica, chamada traço;
- Estudaremos as quádricas canônicas, isto é, relacionadas às formas reduzidas das cônicas.

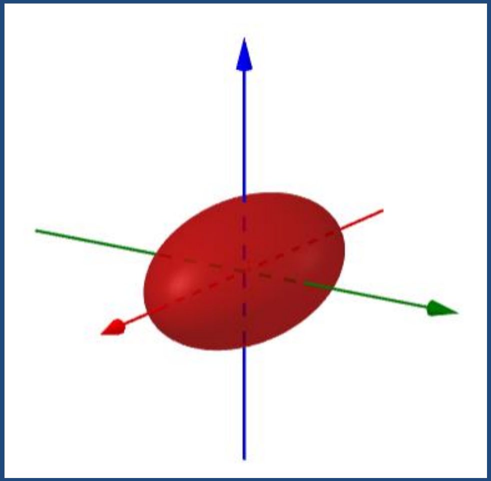
Superfícies quádricas

Cone



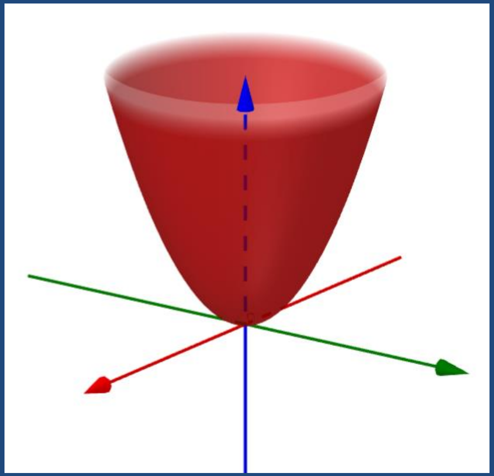
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Elipsoide



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide Elíptico

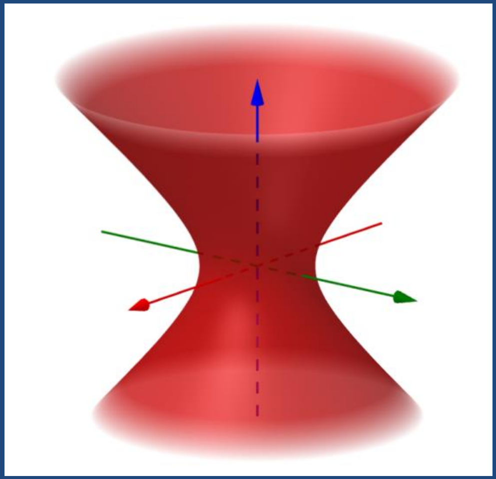


$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Fonte: Geogebra, autor Ricardo Misturini

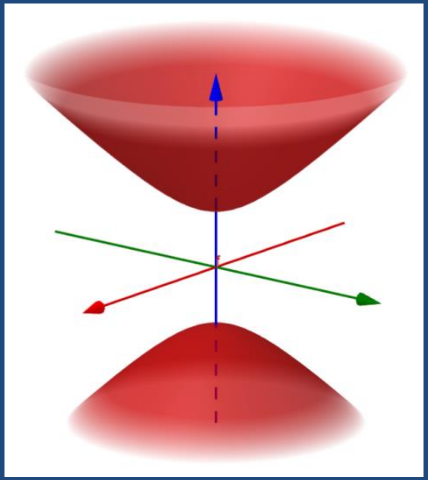
Superfícies quádricas

Hiperboloide de uma folha



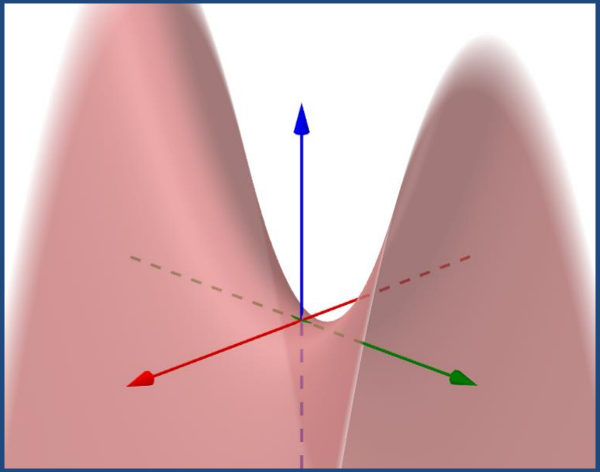
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperboloide de duas folhas



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide hiperbólico



$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

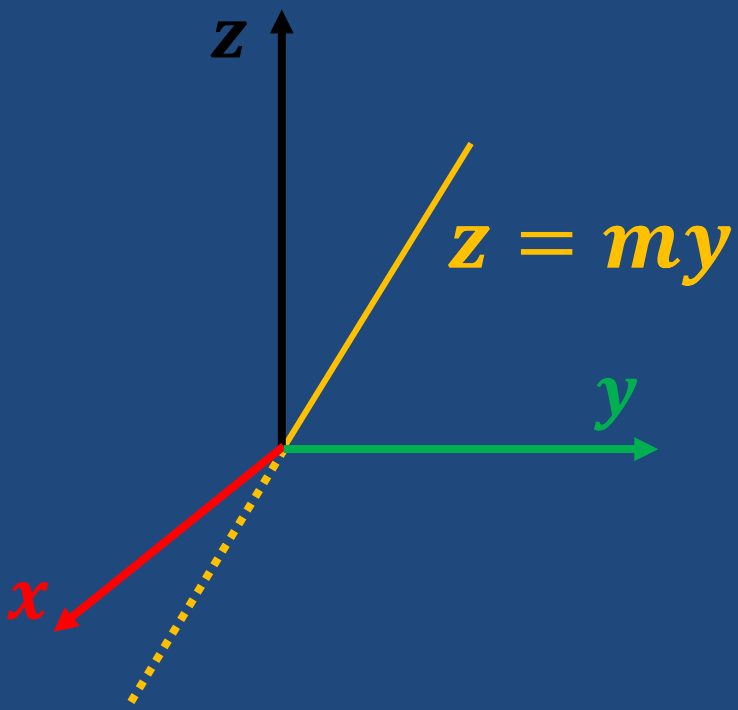
Fonte: Geogebra, autor Ricardo Misturini

Superfície quádrica de revolução

- Gerada por uma curva plana, chamada geratriz;
- Essa geratriz gira $\mathbf{360°}$ em torno de um eixo;
- As superfícies quádricas assim formada são conhecidas como superfícies de revolução;
- Observar que se trata de uma superfície (casca), o que é diferente de um sólido de revolução obtido por integração.

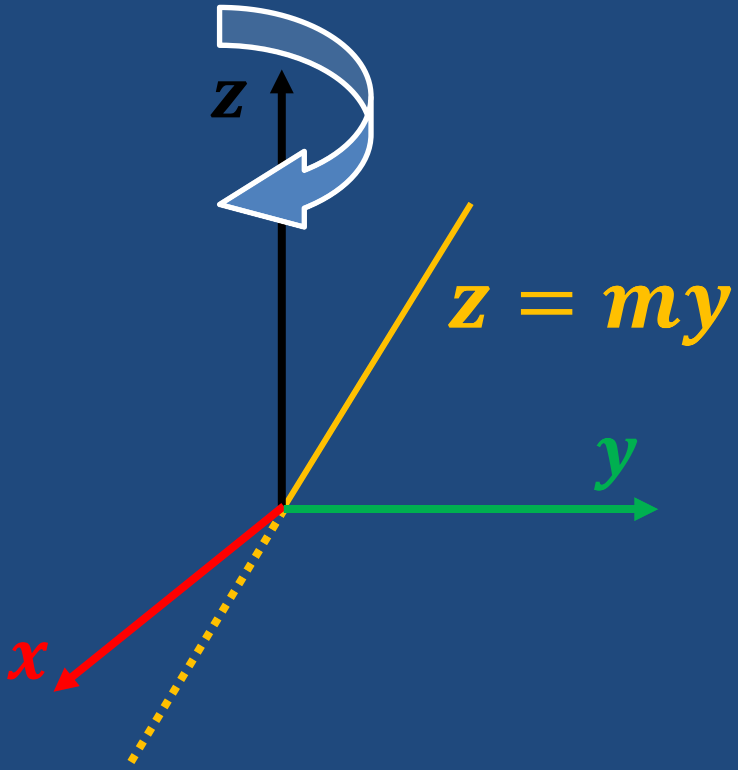
1 – Superfície cônica

- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;



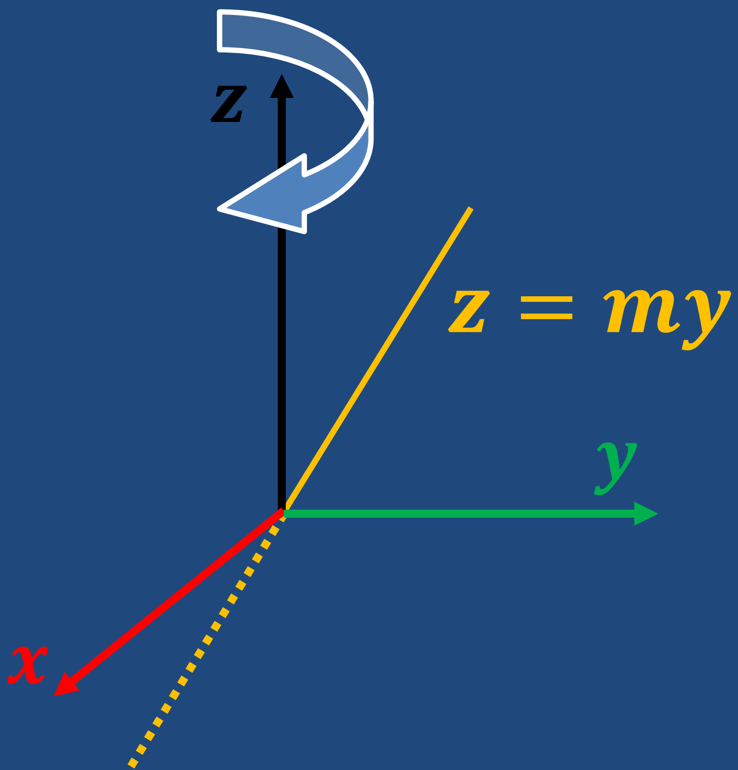
1 – Superfície cônica

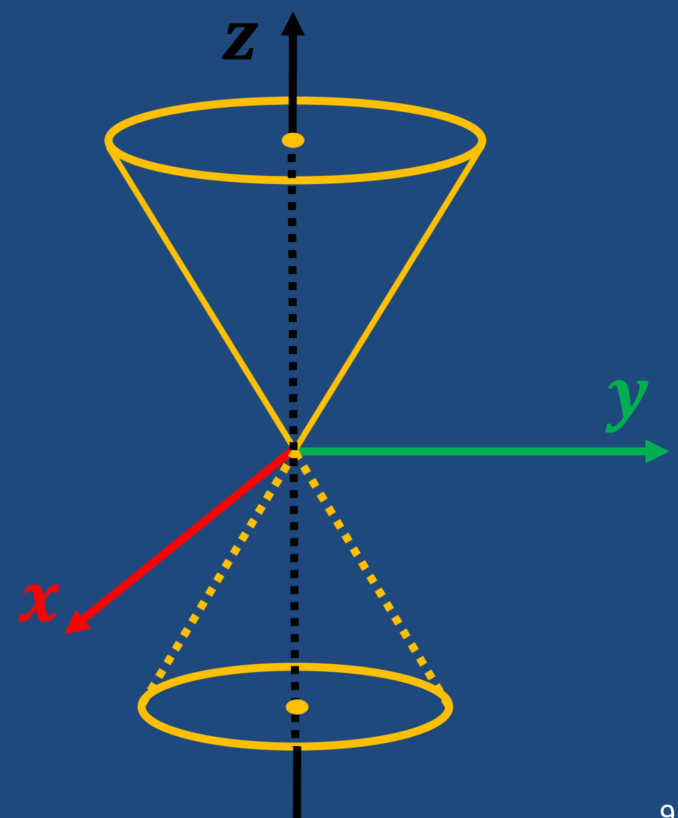
- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;
- A rotação em torno do eixo oz resulta na superfície cônica.



1 – Superfície cônica

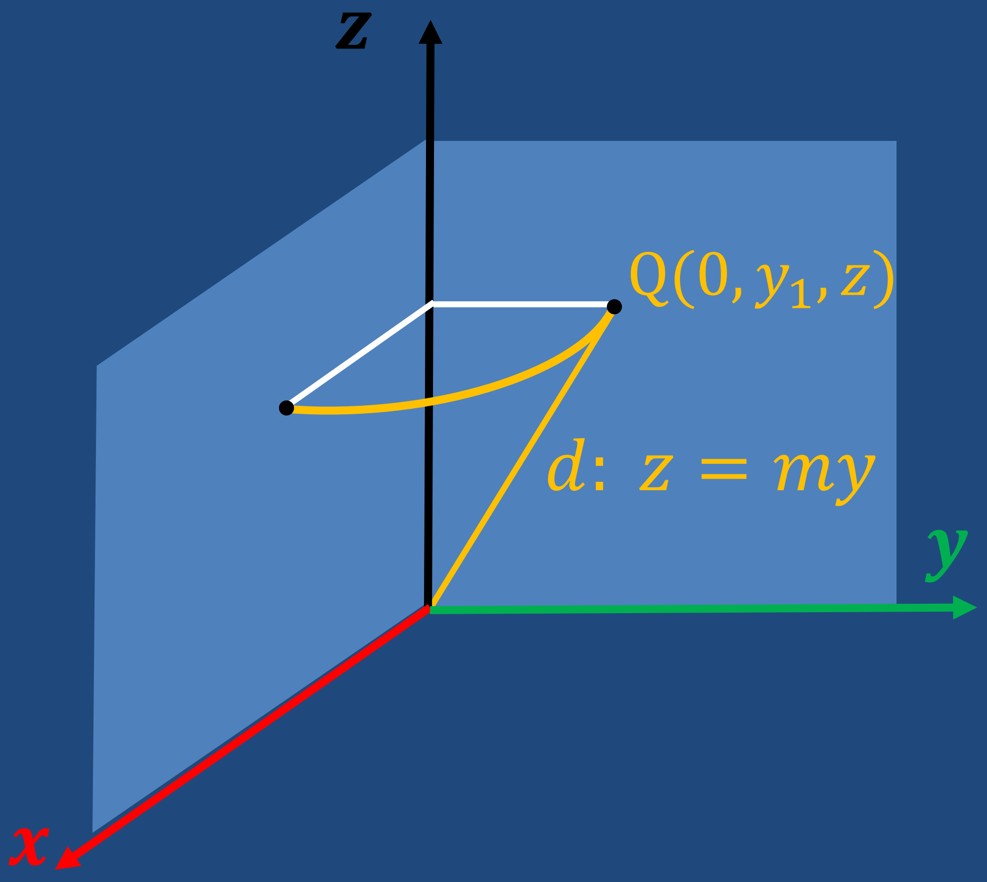
- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;
- A rotação em torno do eixo oz resulta na superfície cônica.





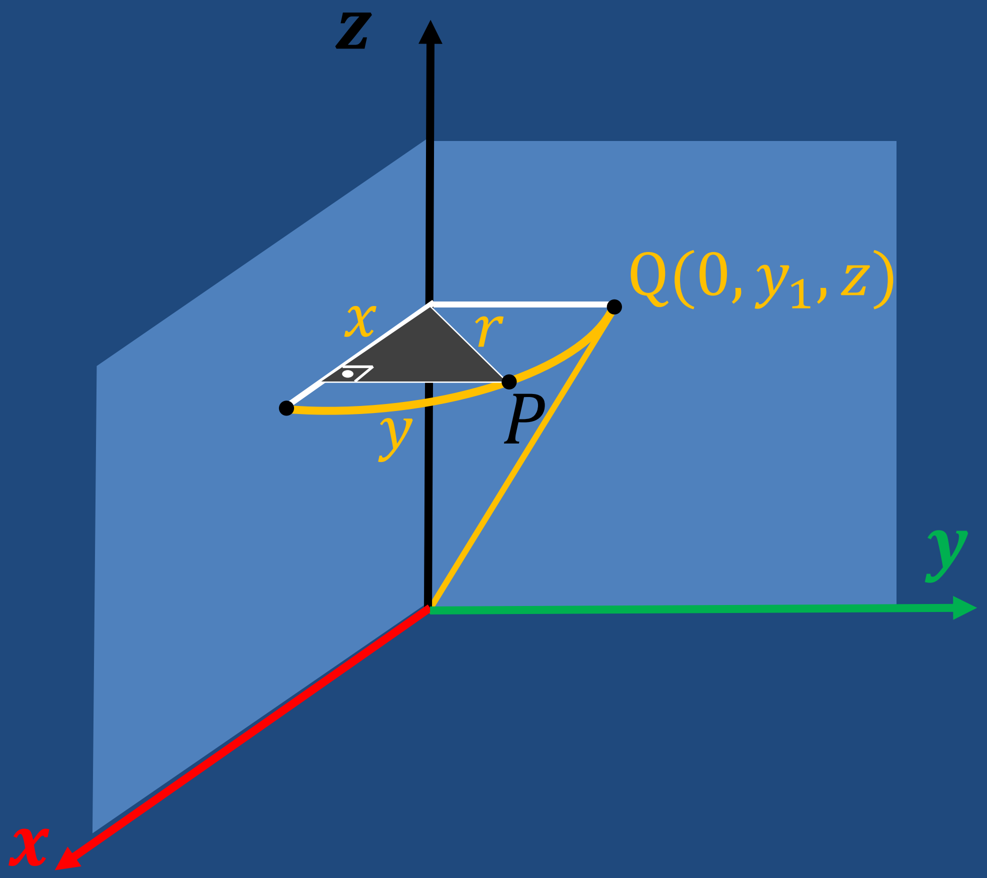
Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



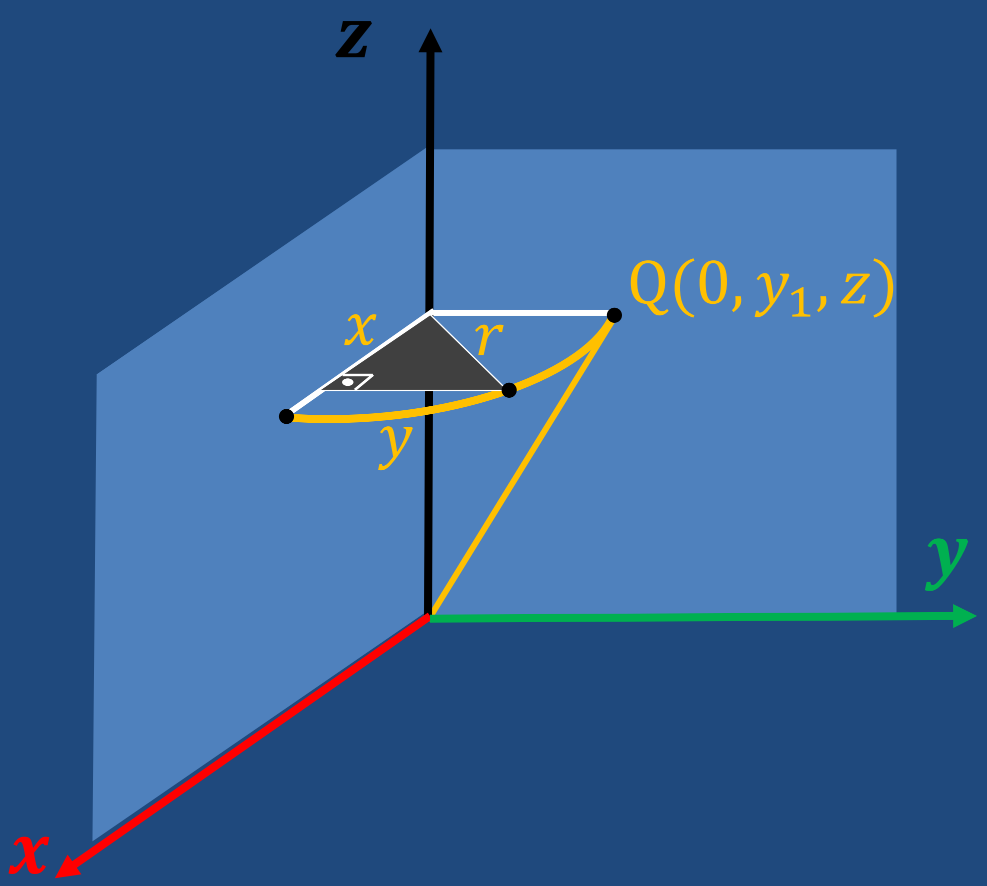
Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

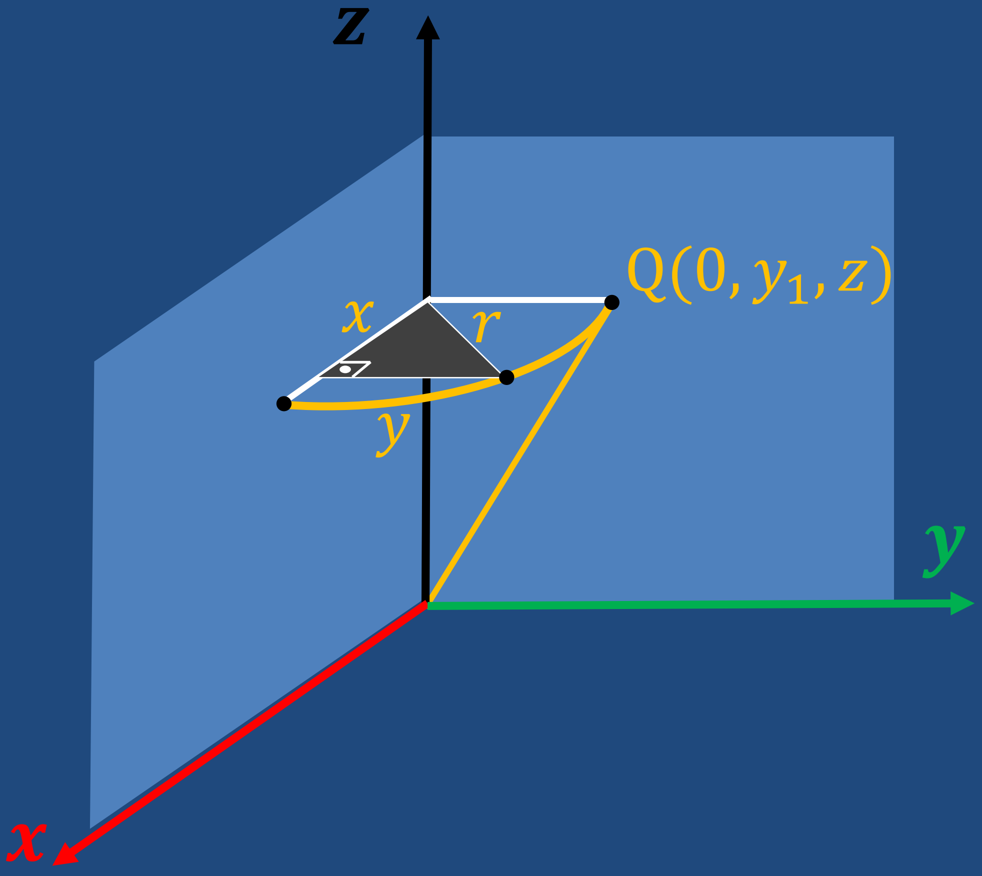


Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

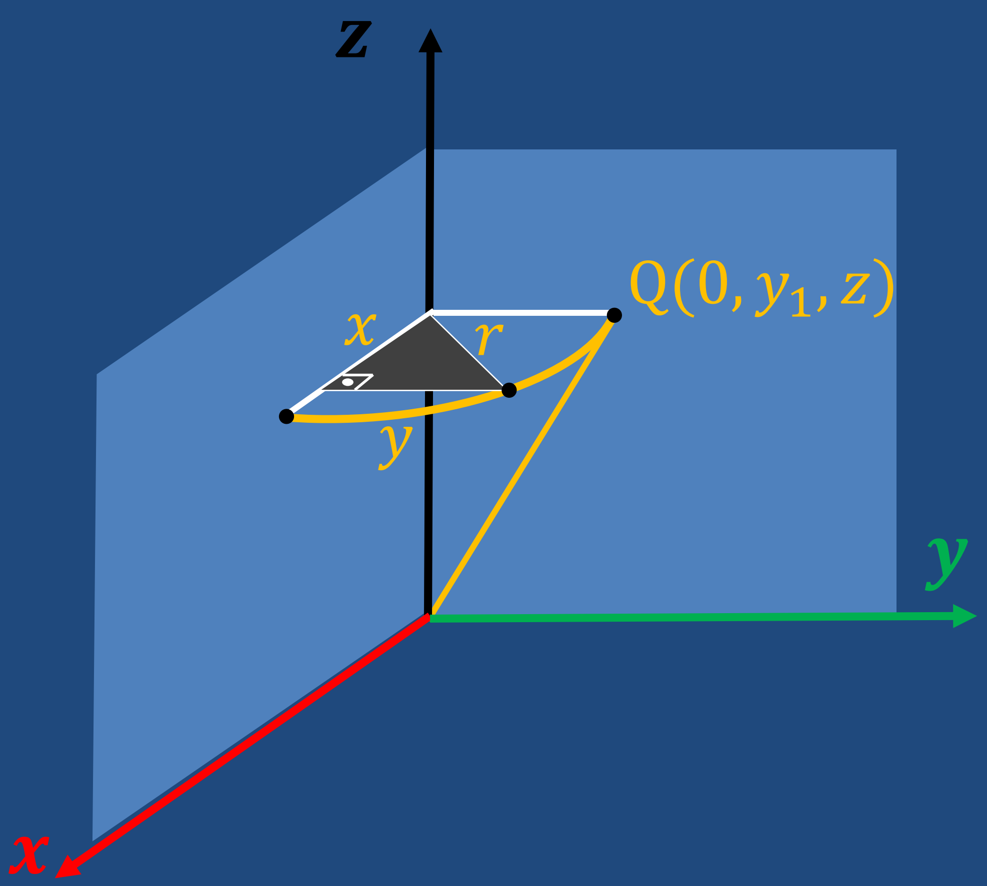


Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

Equação do cone



$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

Do triângulo retângulo:

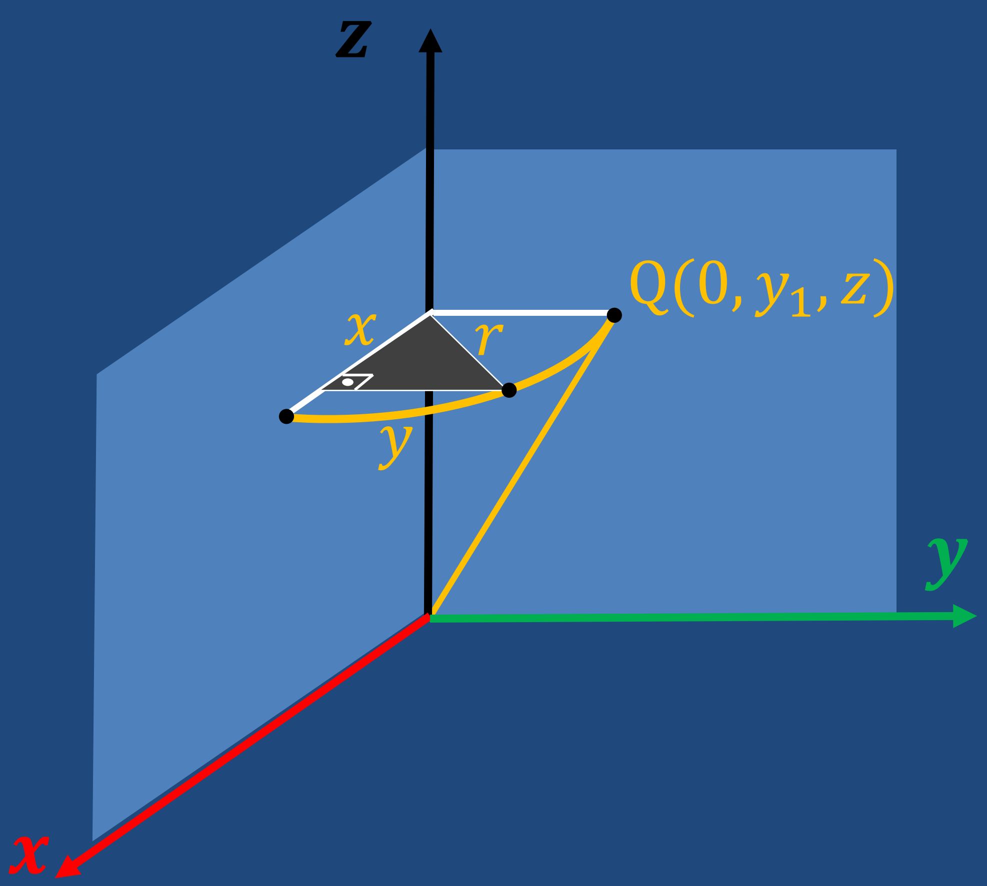
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Equação do cone



$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

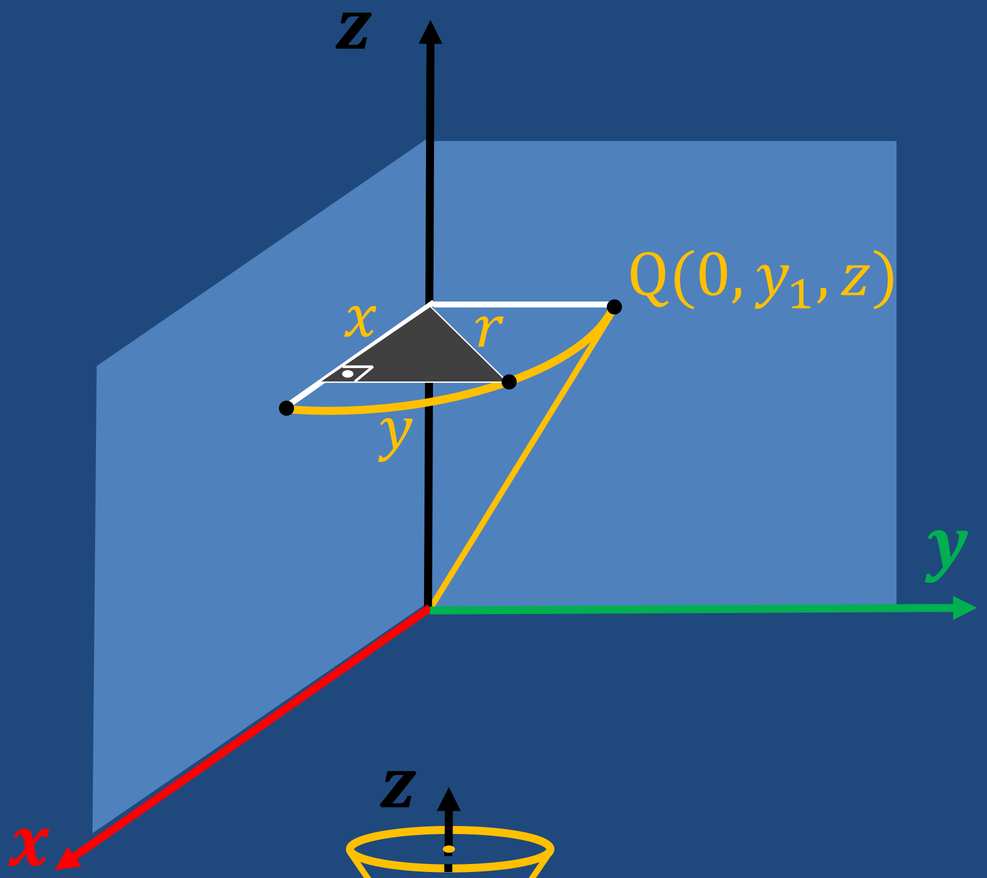
$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Fazendo: $m^2 = {}^1/_{a^2}$

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Do triângulo retângulo:

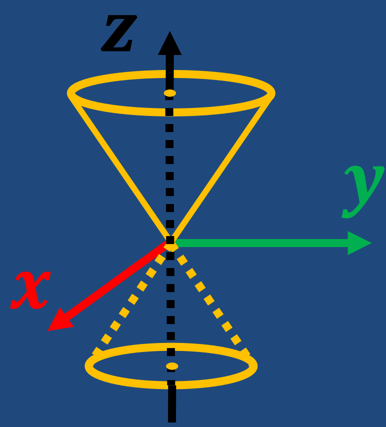
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Fazendo: $m^2 = {}^1/_{a^2}$



Equação do cone

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}}$$

Equações de outra cônicas

Se a superfície geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

Equações de outra cônicas

Se a superfície geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;
2. Identifica-se o plano coordenado em que está contida;
3. Escolhe-se o eixo ao qual será rotacionada de $360°$;
4. Substitui-se a outra coordenada do plano em que está contida pela raiz que contenha esta coordenada e uma terceira;
5. Obtêm-se a equação da quádrica correspondente.

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;
2. Plano coordenado em que está contida;
3. Eixo ao qual será rotacionada;
4. Substitui-se a outra coordenada pela raiz;
5. Quádrica correspondente.

1. $z = \frac{1}{a^2} y$
2. zy
3. oz
4. $y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$
5. $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

Equações de outra cônicas

Plano em que está contida a cônica	Eixo de giro da cônica	Substituição da coordenada
xy	ox	$y = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$
xy	oy	$x = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$
xz	ox	$z = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$
xz	oz	$x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$
yz	oy	$z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$
yz	oz	$y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano yoz;

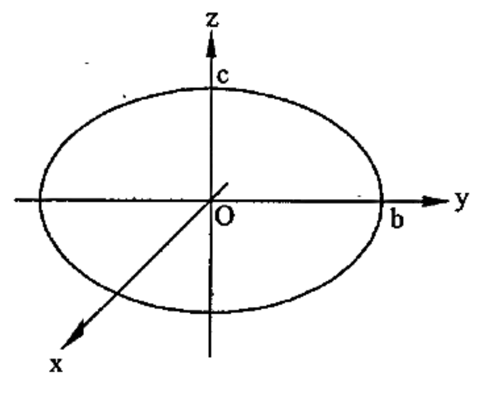


Figura 9.2

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano yoz;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de oy.

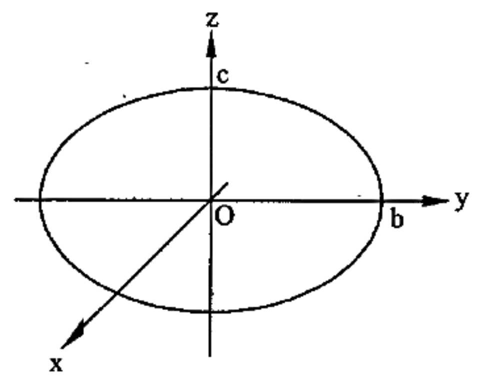


Figura 9.2

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano $\boldsymbol{yoz}$;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de $\boldsymbol{oy}$.

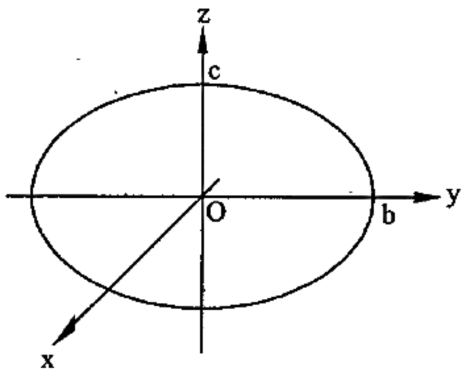


Figura 9.2

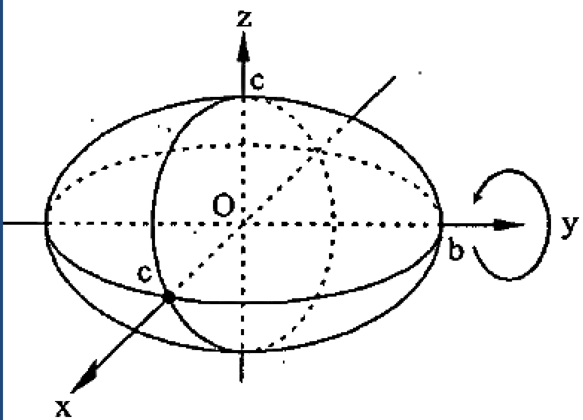


Figura 9.3

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano yoz;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de oy.

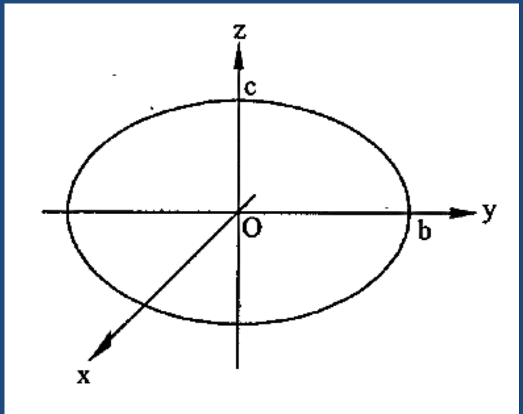


Figura 9.2

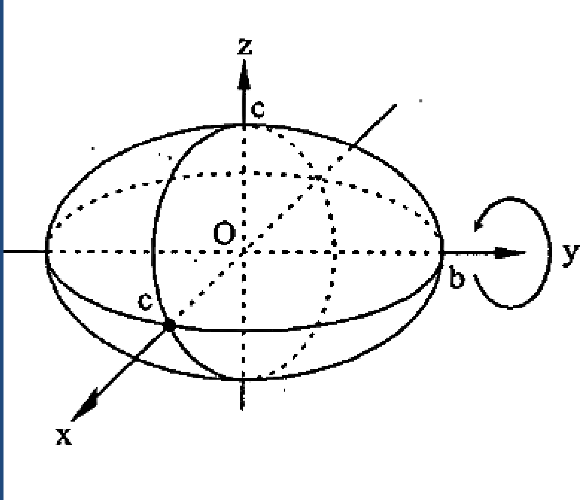


Figura 9.3

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

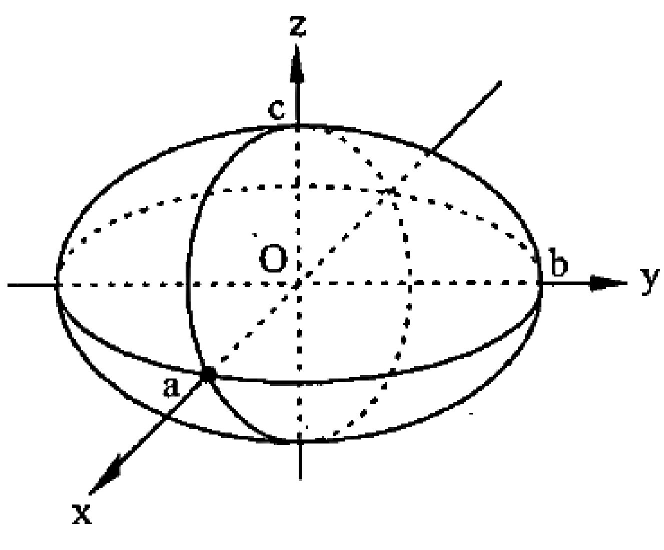


Figura 9.4

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

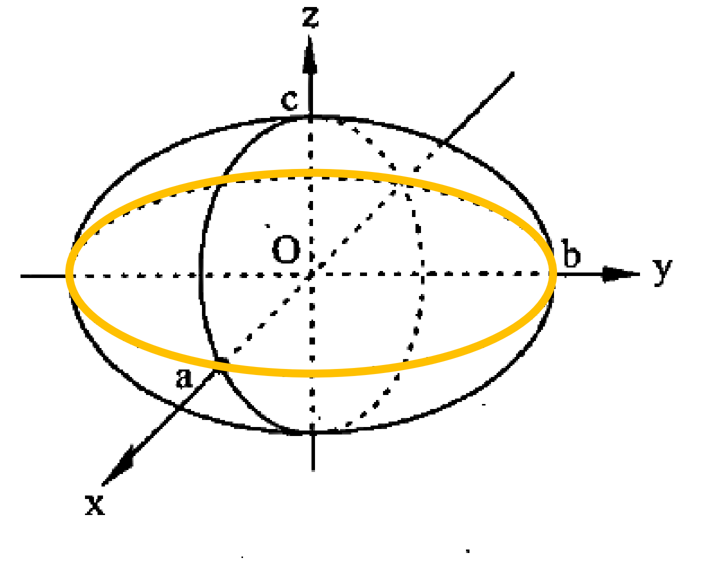


Figura 9.4

- O traço no plano xoy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

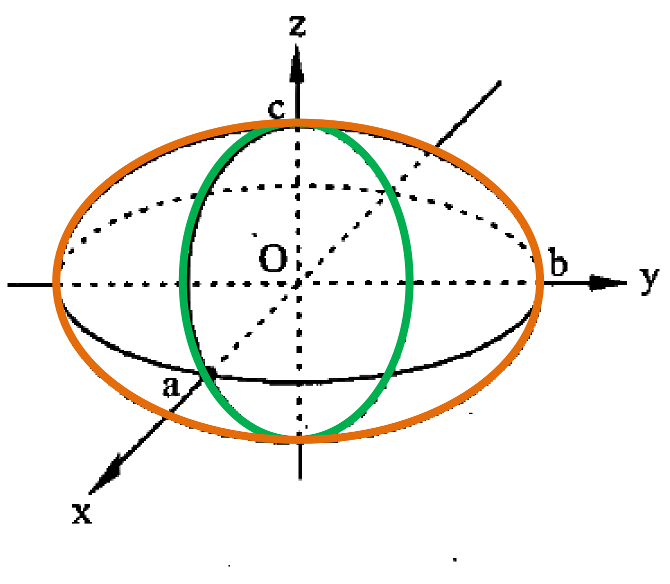


Figura 9.4

- O traço no plano xoy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- O traço no plano xoz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- O traço no plano yoz:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2 – Elipsoides -> Esfera

- Na equação geral do elipsoide, se $\boldsymbol{a = b = c}$,

Tem-se a equação de uma esfera de raio $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$$

Exemplo 1

Determinar a equação da esfera de centro $C(0, 0, 0)$ e raio $r = 4$

Exercício 1

Obter a superfície de revolução ao girar a reta $z = 2y$ e $x = 0$ em torno do eixo oz.

Resp.: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$

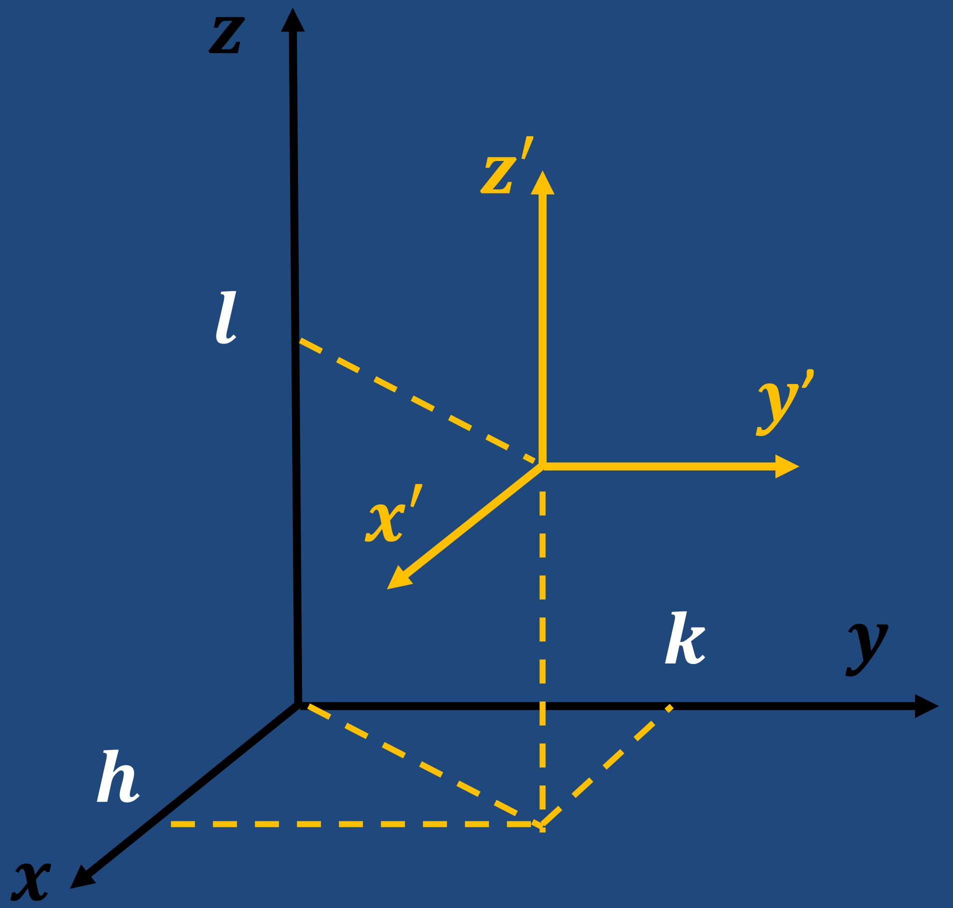
Exercício 2

Obter a superfície de revolução ao girar a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ em torno do eixo maior.

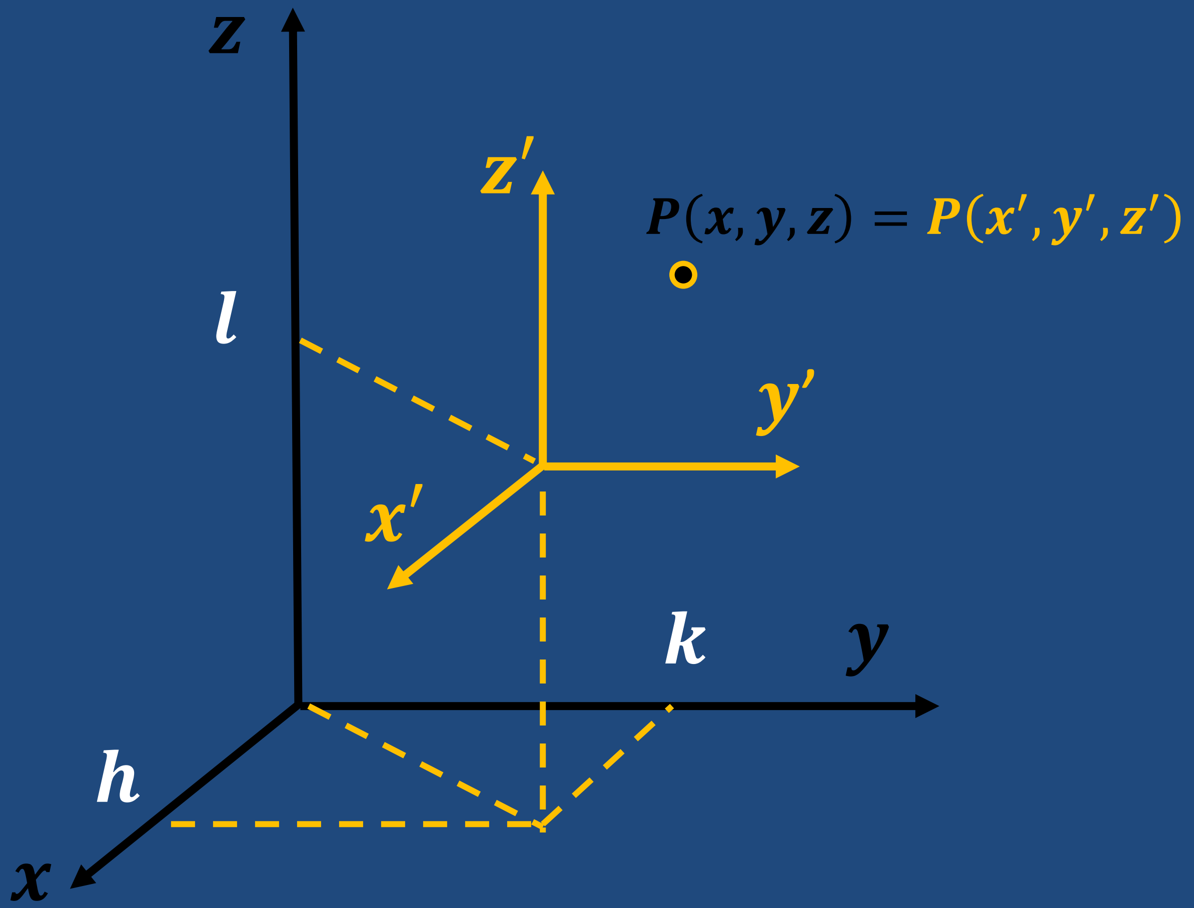
Resp.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$

Aula 2

Translação de eixos no espaço

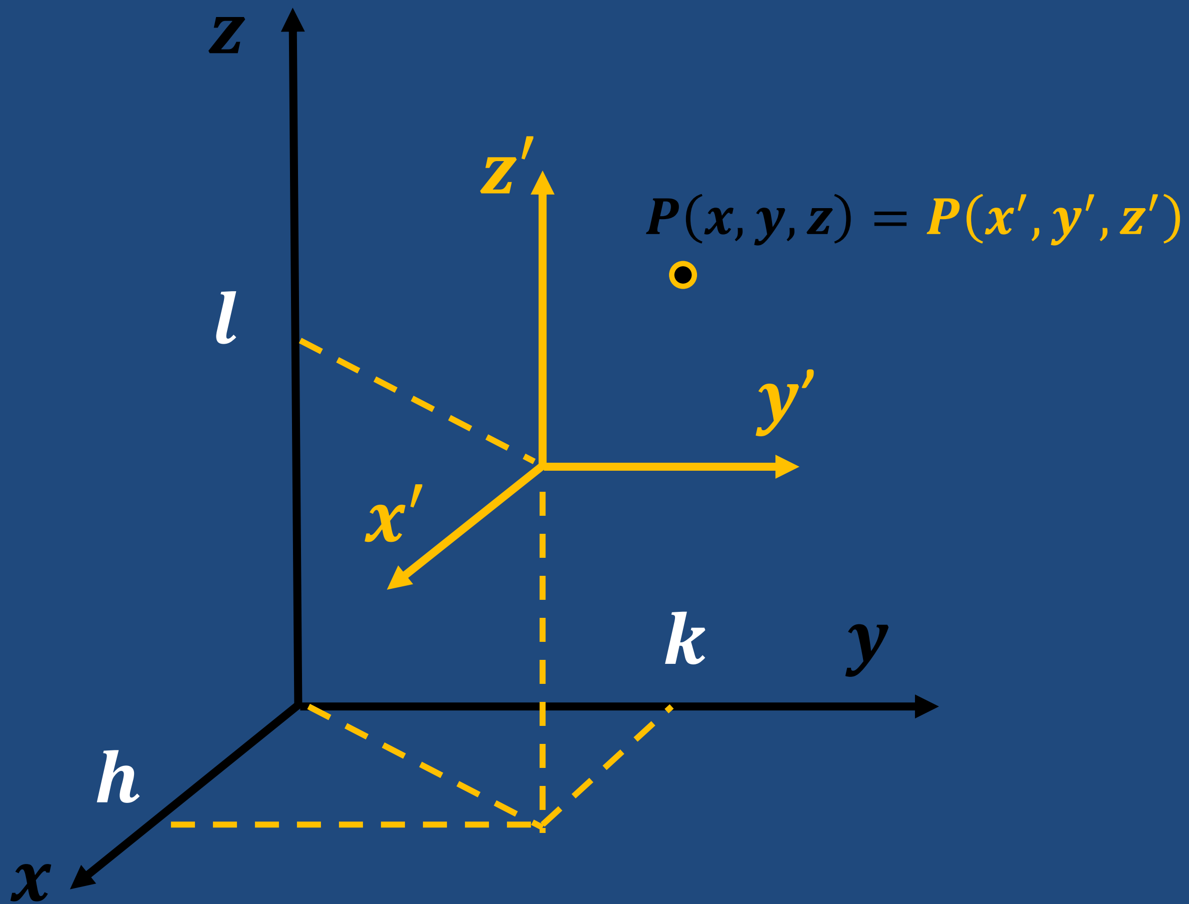


Translação de eixos no espaço



$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \\ z = l + z' \end{cases}$$

Translação de eixos no espaço



$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \\ z = l + z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = h - x \\ y' = k - y \\ z' = l - z \end{cases}$$

Relações de transformação

Exemplo 1

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;

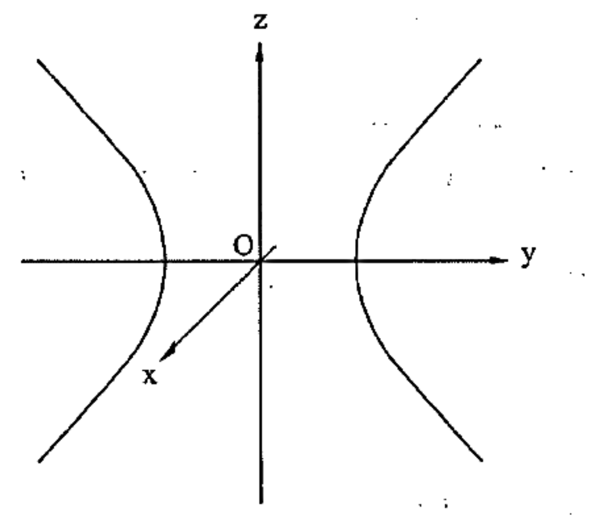


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

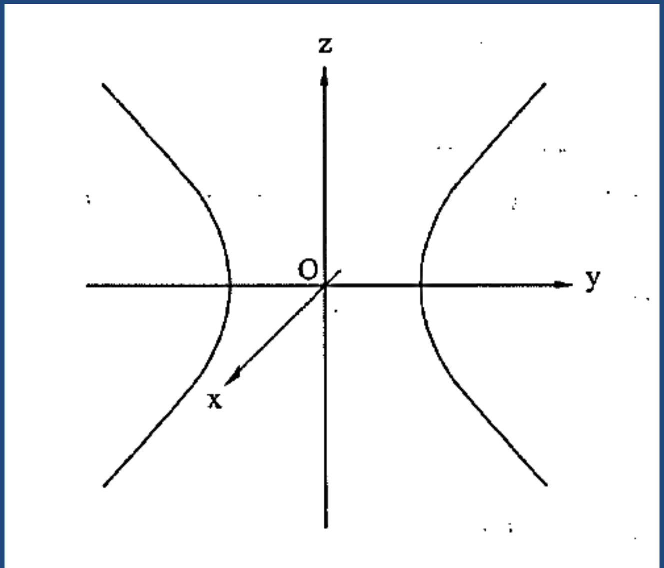


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

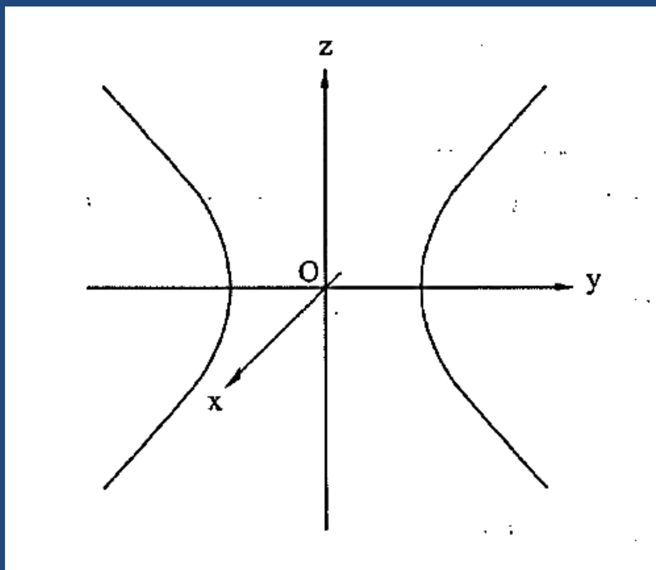


Figura 9.6

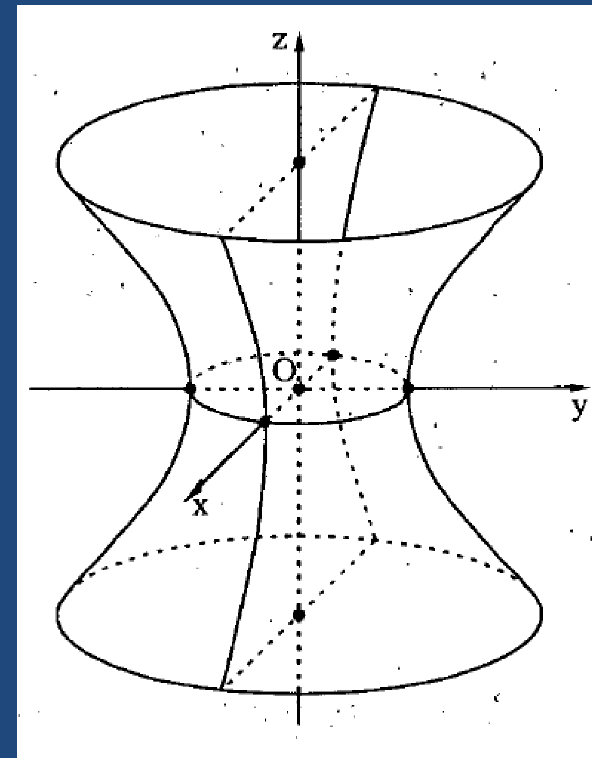


Figura 9.7

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;

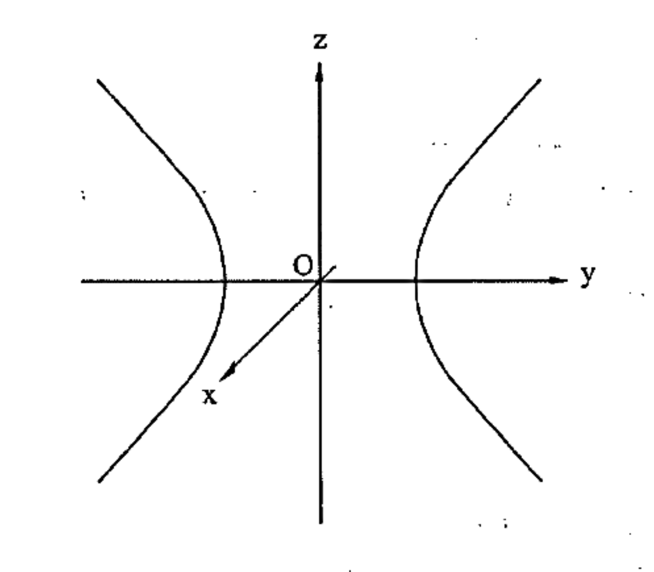


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oy:

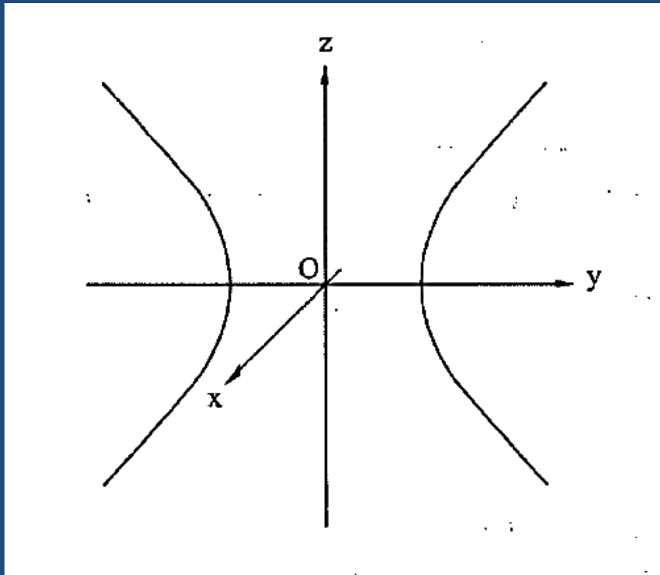


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oy:

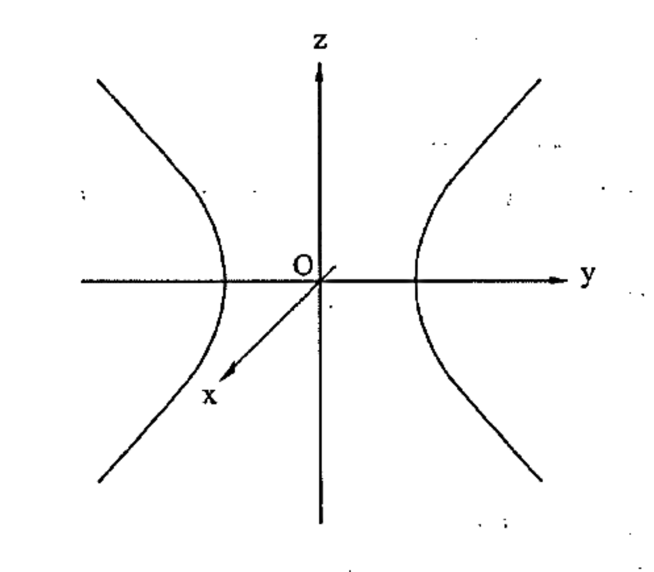


Figura 9.6

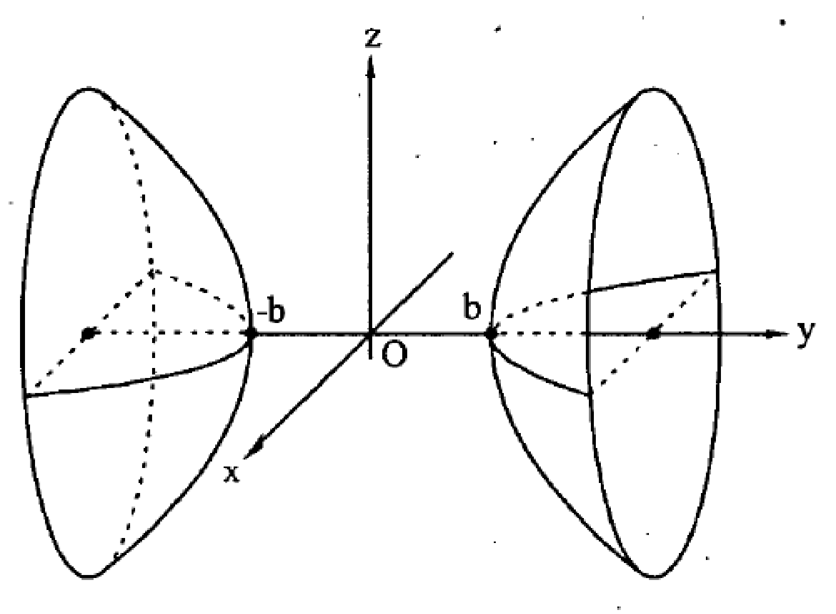


Figura 9.8

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow z=\pm\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow -\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;

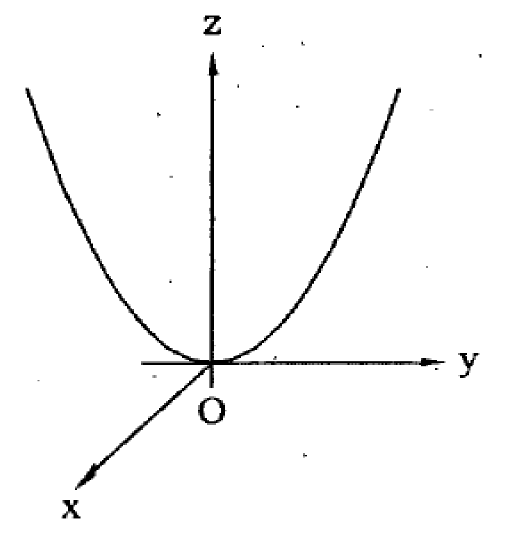


Figura 9.9

$$y^2 = 2pz$$

fazendo: $2p = b^2$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

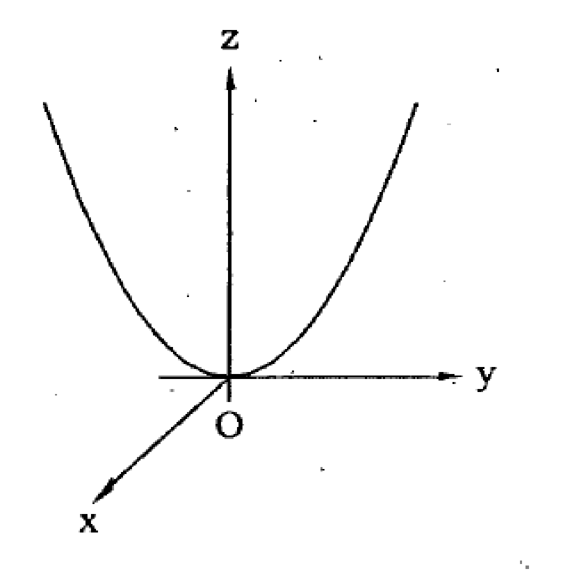


Figura 9.9

$$y^2 = 2pz \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

fazendo: $2p = b^2$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

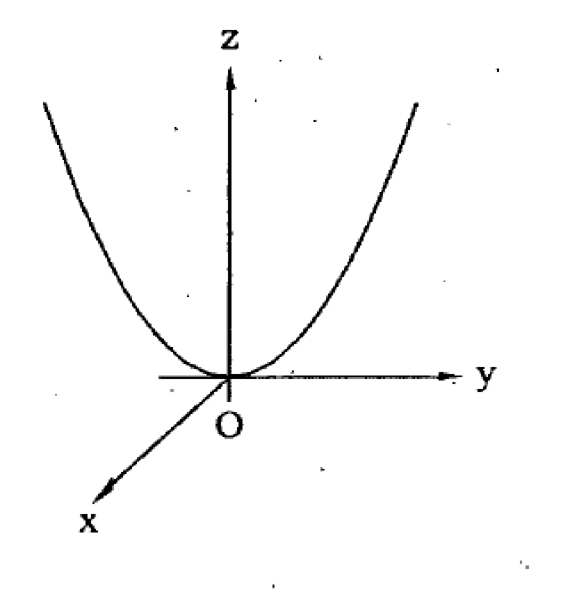


Figura 9.9

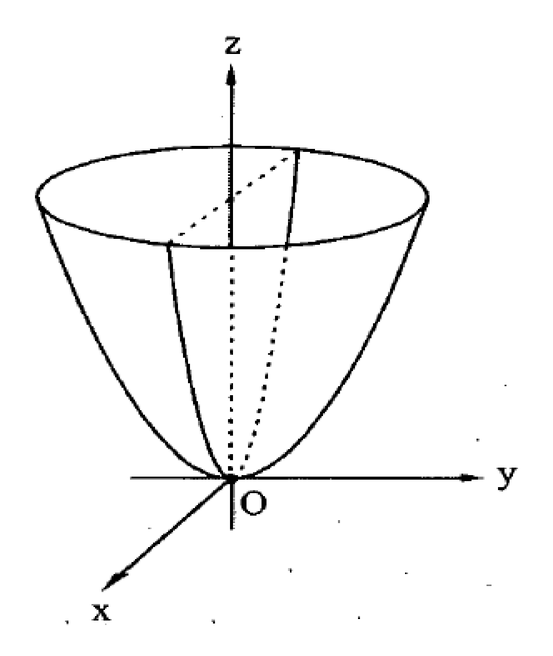


Figura 9.10

$$y^2 = 2pz \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

fazendo: $2p = b^2$

Exercício 1

Represente o paraboloide elíptico de equação $\boldsymbol{y = 4x^2 + z^2}$. Identificar a equação da elipse em $\boldsymbol{y = 4}$.

Exercício 1

Represente o paraboloide elíptico de equação $y = 4x^2 + z^2$. Identificar a equação da elipse em $y = 4$.

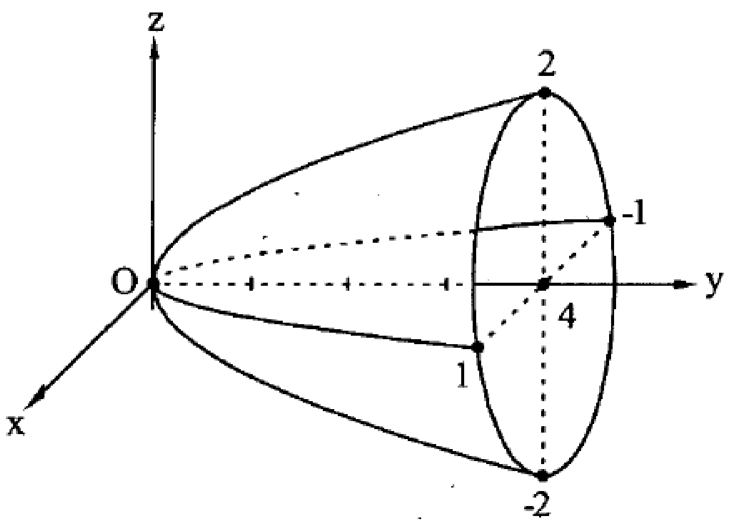


Figura 9.11

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- Supondo que a hipérbole está no plano xy e uma parábola no plano yz; O Giro em torno de oz:

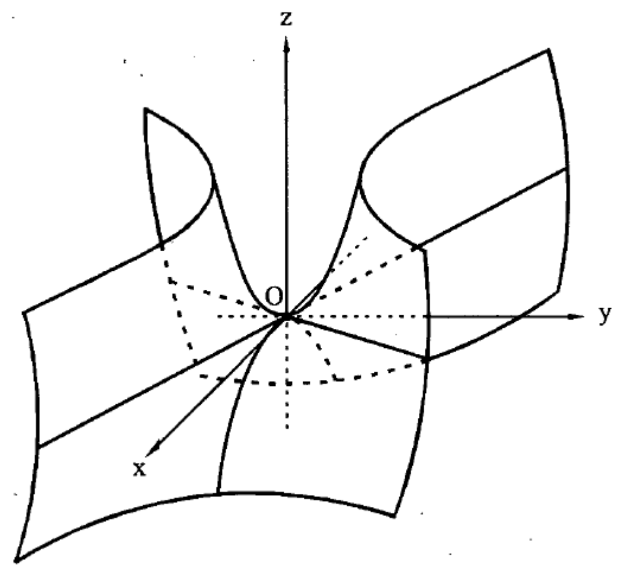


Figura 9.12

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Outras formas:

$$y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

$$x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

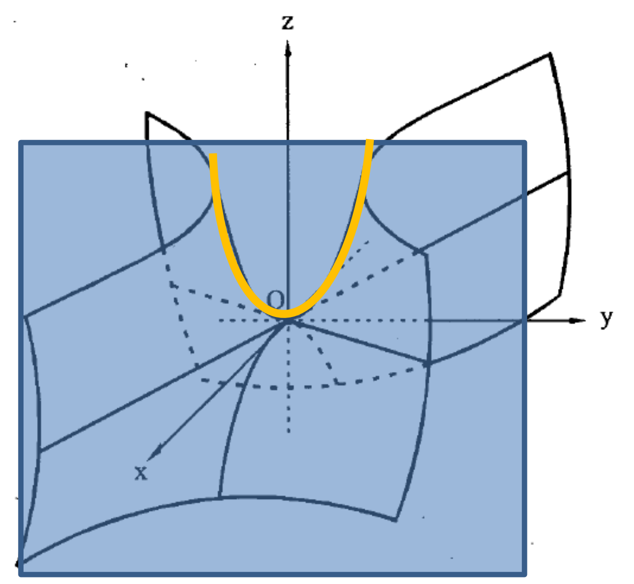


Figura 9.12

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

- O traço nos planos $y = 0$:

$$z = -\frac{x^2}{a^2}$$

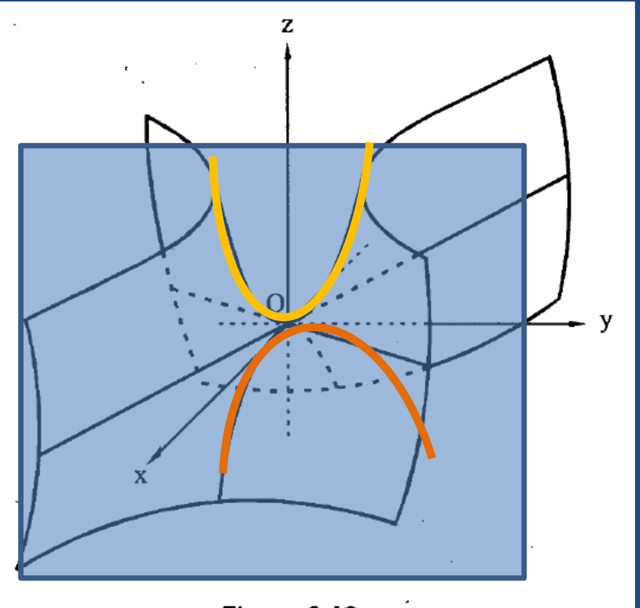


Figura 9.12

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

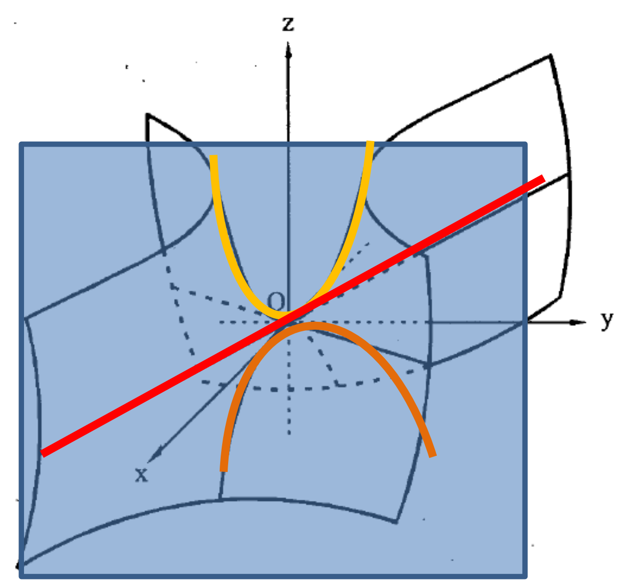


Figura 9.12

- O traço nos planos $y = 0$:

$$z = -\frac{x^2}{a^2}$$

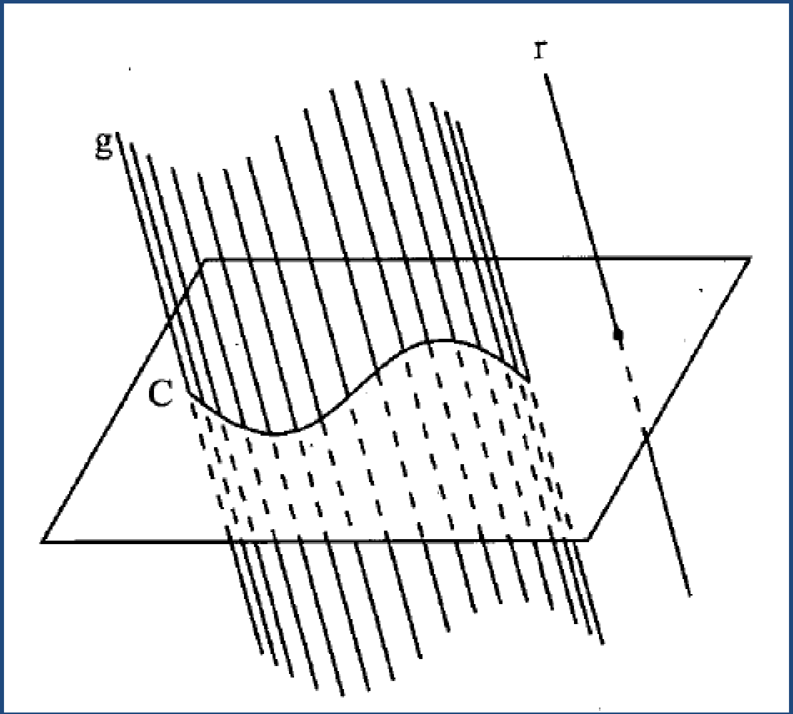
- O traço no plano $z = 0$:

$$0 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0$$

Retas (Hipérbole degenerada)

5 – Superfícies cilíndricas

- Seja uma curva plana c e r uma reta fixa não paralela ao plano de c;
- Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta g que se move paralelamente à reta fixa e em contato permanente com a curva;
- A Superfície cilíndrica pode ser vista como um conjunto de infinitas retas paralelas;



Exemplo 2

Seja a parábola $x^2 = 2y$ e $z = 0$, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oz, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

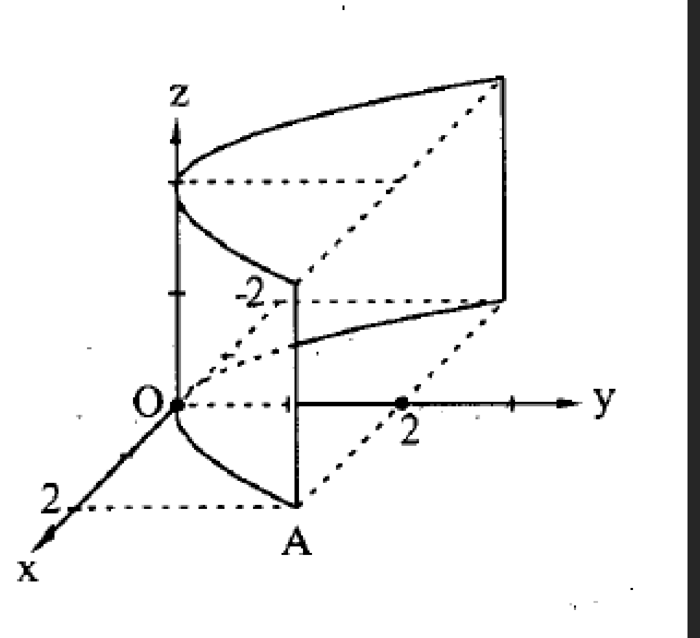


Figura 9.16

$$x^2 = 2y + 0z$$

A própria equação da Diretriz representa a Superfície cilíndrica.

$$\boxed{x^2 = 2y}$$

Exemplo 3

Seja a elipse como diretriz, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oy, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

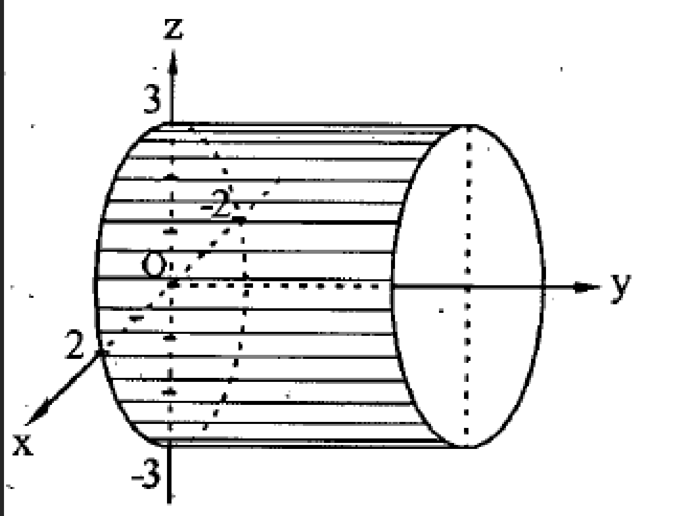


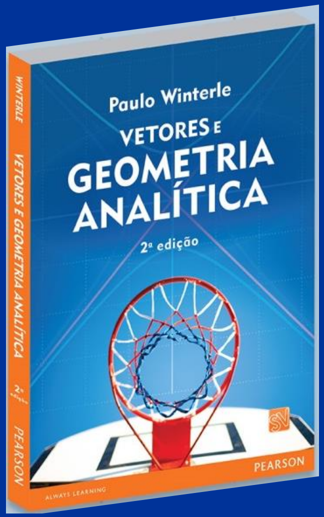
Figura 9.17

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

Cilíndro elíptico.

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

Bibliografia



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.