

Cálculo I

Engenharia

Aula 11

A derivada

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

A derivada

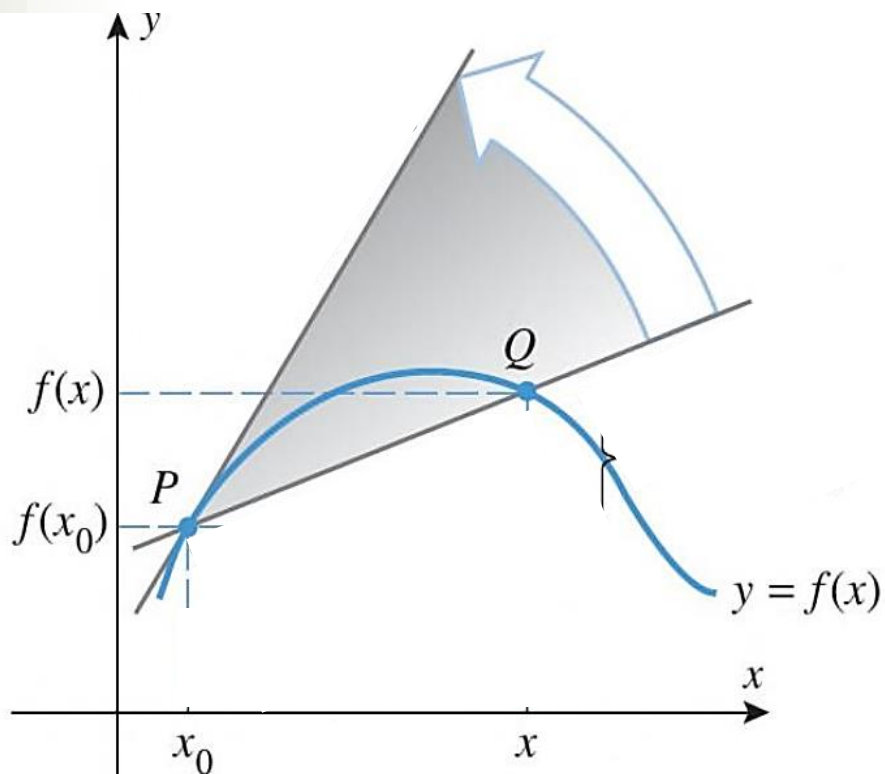
- Muitos fenômenos envolvem grandezas que variam em relação a outras:
 - Velocidade de um corpo no tempo;
 - Crescimento de bactérias no tempo;
 - Voltagem em relação à corrente elétrica;

A derivada

- Muitos fenômenos envolvem grandezas que variam em relação a outras:
 - Velocidade de um corpo no tempo;
 - Crescimento de bactérias no tempo;
 - Voltagem em relação à corrente elétrica;

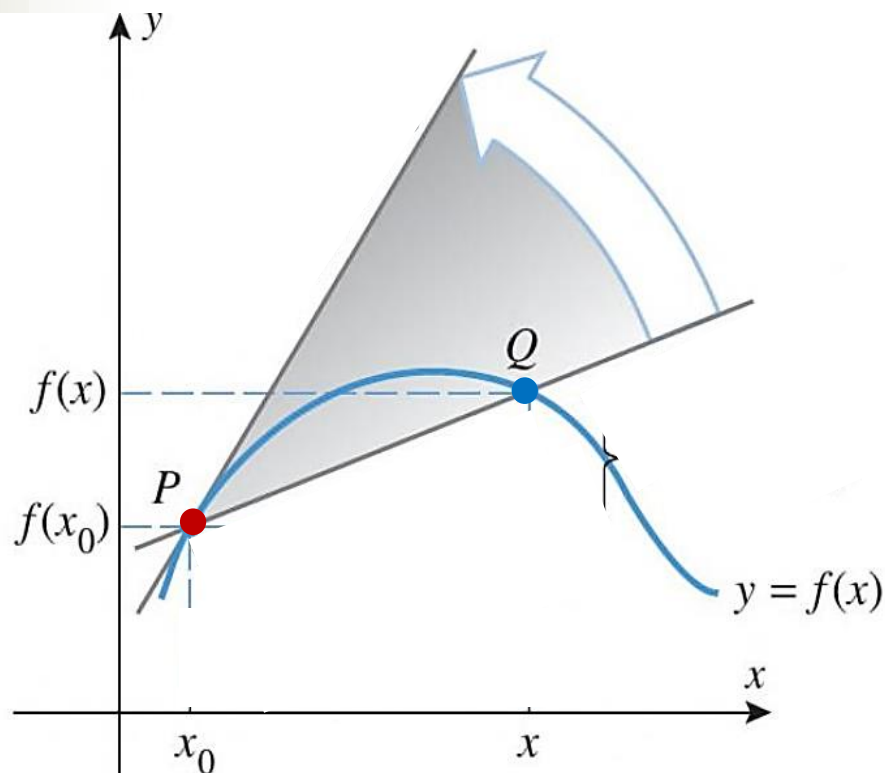
O conceito da derivada é a ferramenta matemática para estudar a taxa segundo a qual uma quantidade varia em relação à outra.

Retas tangentes



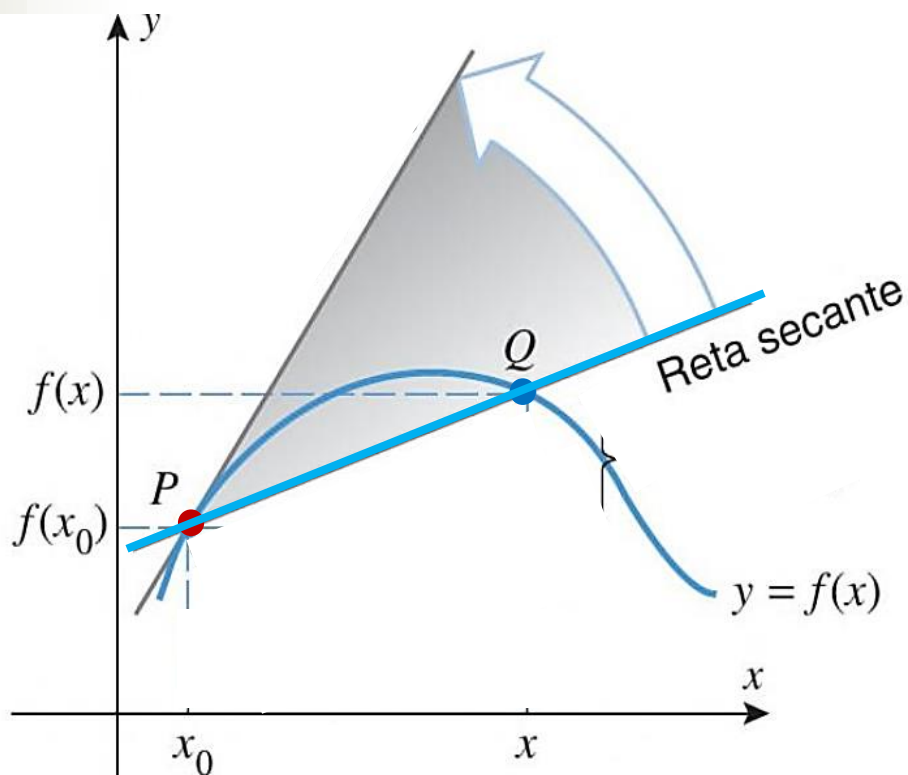
- Seja a função f que define a curva.

Retas tangentes



- Seja a função f que define a curva.
- O ponto $P(x_0; f(x_0))$ é distinto de $Q(x, f(x))$;

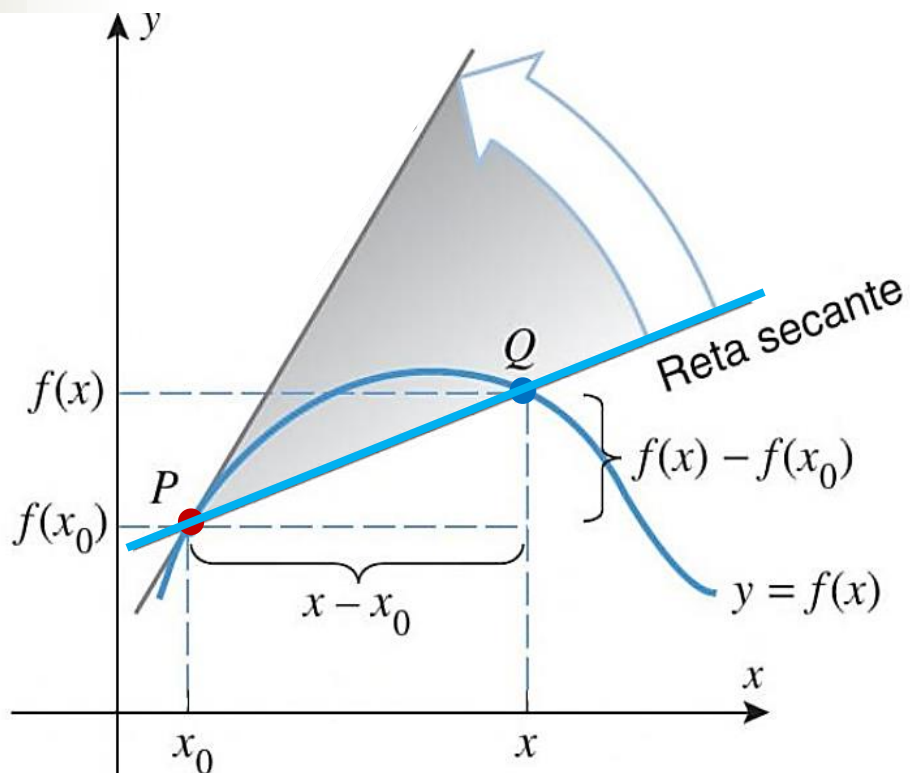
Retas tangentes



- Seja a função f que define a curva.
- O ponto $P(x_0; f(x_0))$ é distinto de $Q(x, f(x))$;
- Um **reta secante** passa por P e Q , de equação:

$$f(x) - f(x_0) = m_{PQ}(x - x_0)$$

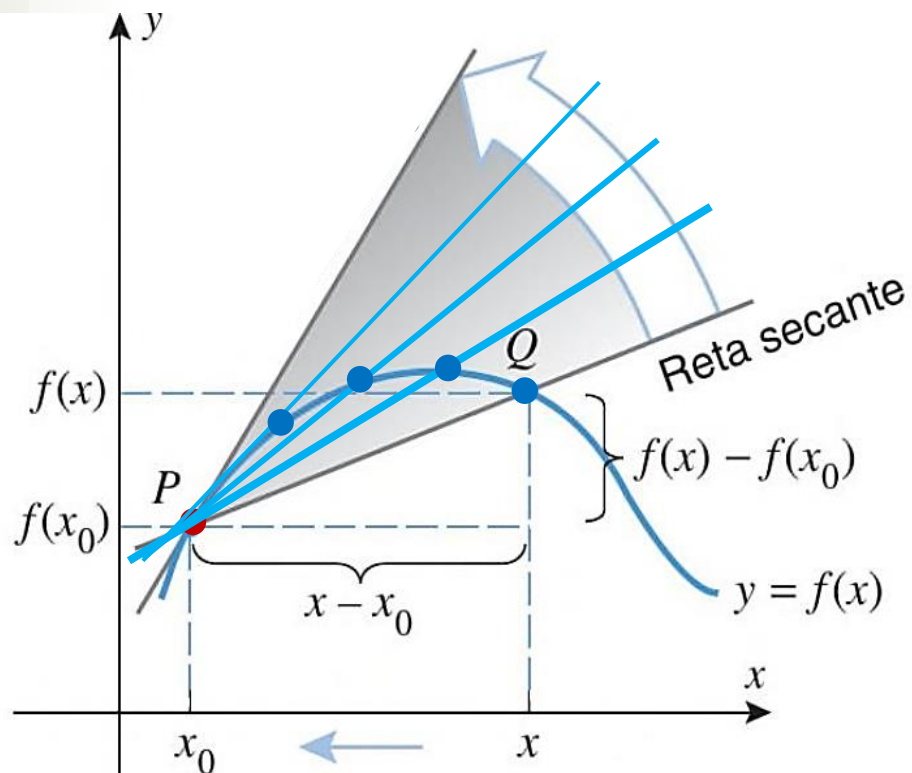
Retas tangentes



- A inclinação da **reta secante** que passa por **P** e **Q** será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Retas tangentes

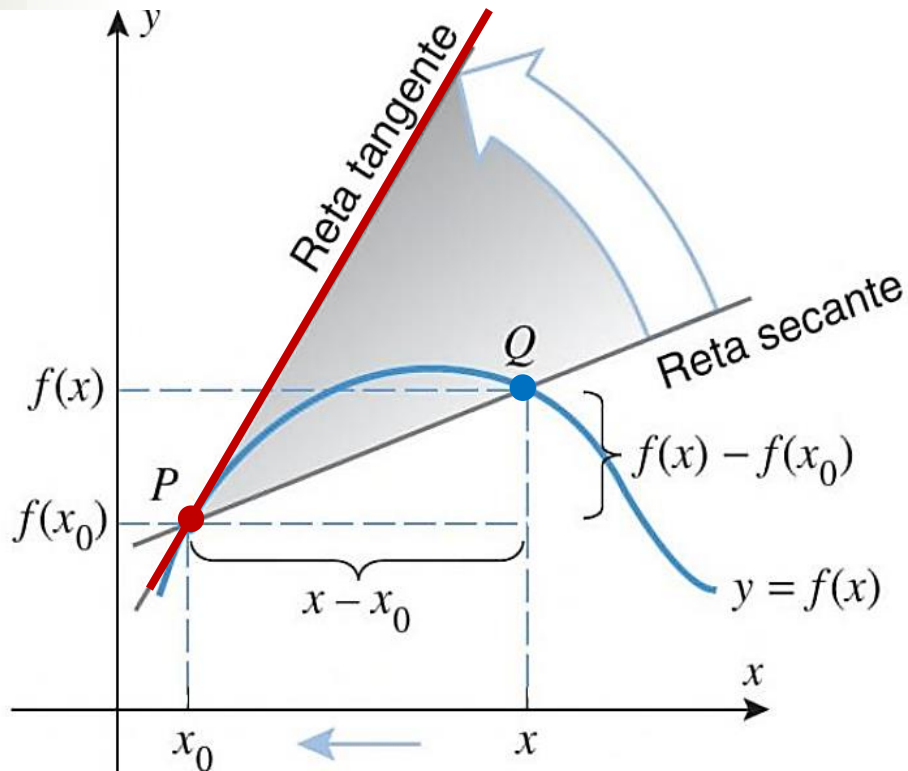


- A inclinação da **reta secante** que passa por **P** e **Q** será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

- Quando $x \rightarrow x_0$ o ponto **Q** se aproxima do ponto **P**.

Retas tangentes



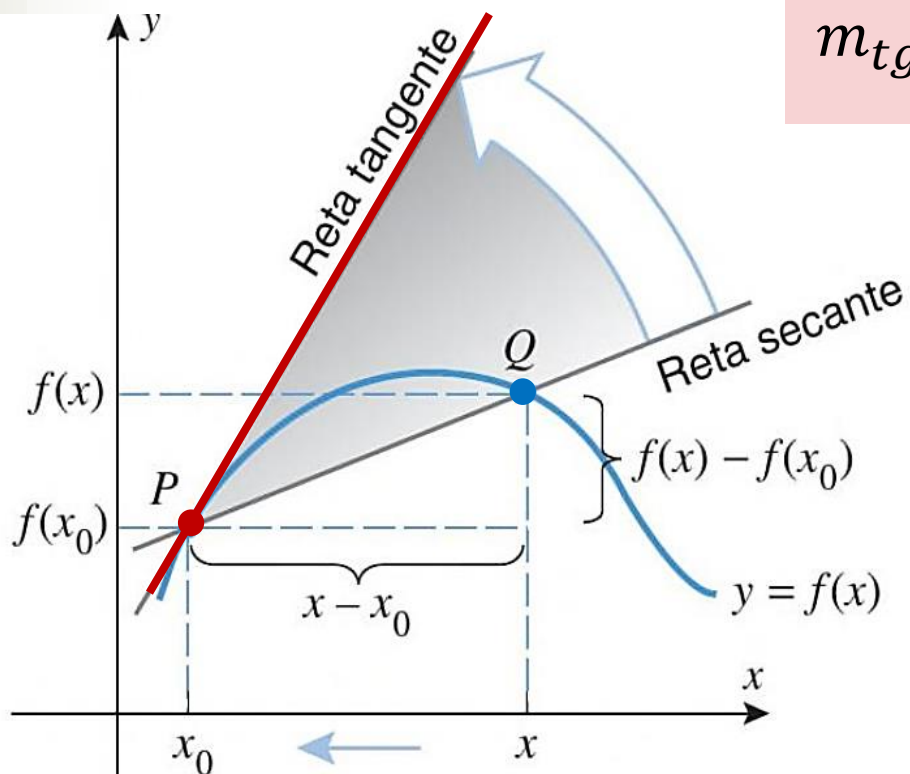
- A inclinação da **reta secante** que passa por **P** e **Q** será:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

- Quando $x \rightarrow x_0$ o ponto **Q** se aproxima do ponto **P**.

Se a reta secante atingir a posição limite quando $x \rightarrow x_0$, então tem-se a **reta tangente** ao ponto **P**.

Retas tangentes



$$m_{tg} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Se a reta secante atingir a posição limite quando $x \rightarrow x_0$, então tem-se a **reta tangente** ao ponto **P**.

Definição de derivada

2.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f . A *reta tangente* à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

Definição de derivada

2.1.1 DEFINIÇÃO Suponha que x_0 seja um ponto do domínio da função f . A *reta tangente* à curva $y = f(x)$ no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é a reta de equação

$$y - f(x_0) = m_{tg}(x - x_0)$$

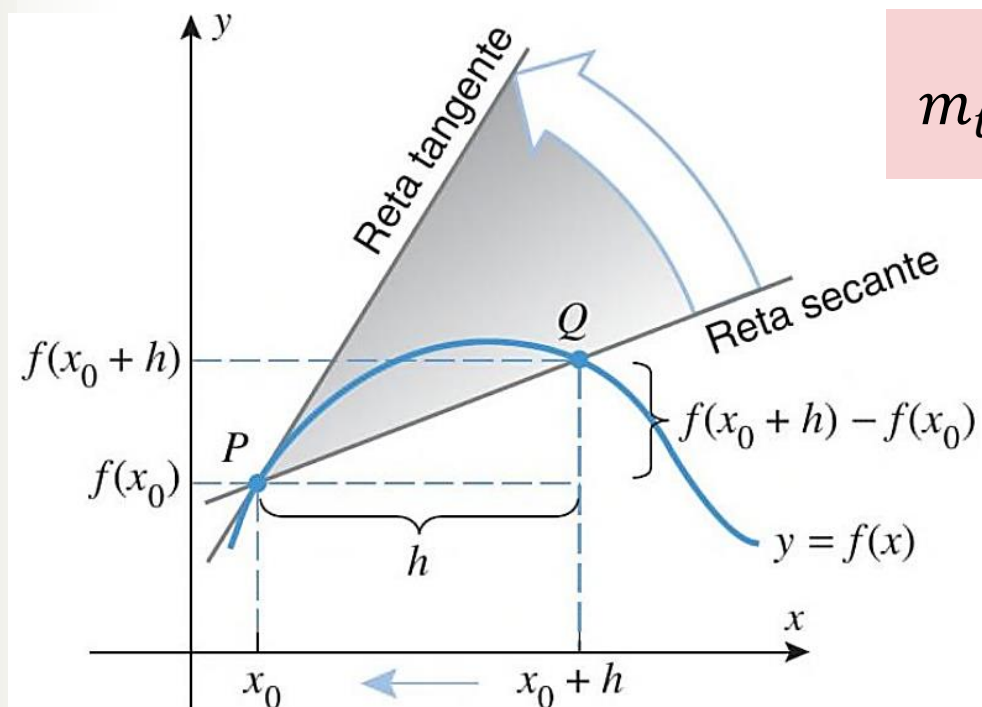
onde

$$m_{tg} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

sempre que existir o limite. Para simplificar, também dizemos que essa reta é a reta tangente a $y = f(x)$ em x_0 .

Maneira alternativa da definição

- A inclinação da reta tangente pode ser expressa considerando-se um incremento h na variável x .

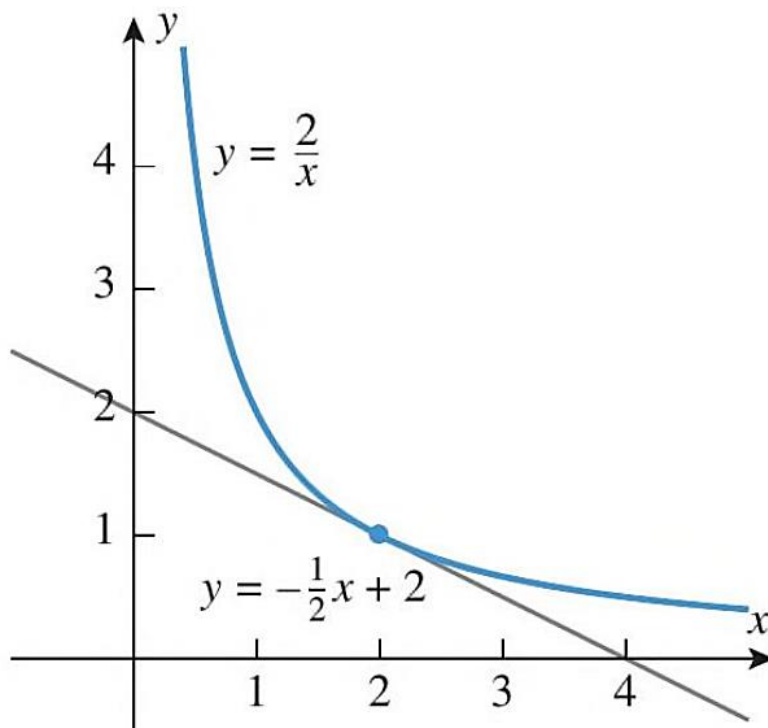


$$m_{tg} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemplo 1 - Encontrar a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$ usando a definição de derivada.

Exercício - Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x}$ no ponto $x_0 = 2$.

Exercício - Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \frac{2}{x}$ no ponto $x_0 = 2$.



Movimento retilíneo

- Na mecânica clássica, o movimento de um corpo pode ser completamente descrito se forem conhecidos a velocidade, a direção e o sentido em que se move;

Movimento retilíneo

- Na mecânica clássica, o movimento de um corpo pode ser completamente descrito se forem conhecidos a velocidade, a direção e o sentido em que se move;
- Considerando um movimento retilíneo tem-se uma função da posição S dependente do tempo t :

$$S = f(t)$$

Movimento retilíneo

- Se $[t_0, t_0 + h]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\textit{deslocamento}[t_0, t_0 + h] = f(t_0 + h) - f(t_0)$$

Movimento retilíneo

- Se $[t_0, t_0 + h]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\textit{deslocamento}[t_0, t_0 + h] = f(t_0 + h) - f(t_0)$$

- O deslocamento pode ser: positivo, negativo ou nulo;

Movimento retilíneo

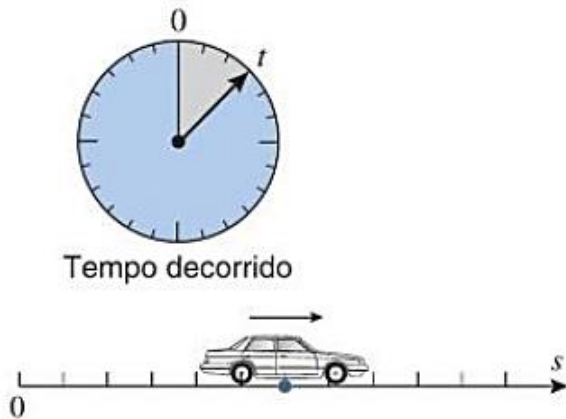
- Se $[t_0, t_0 + h]$ é um intervalo de tempo, então define-se o deslocamento como sendo a diferença entre as coordenadas;

$$\textit{deslocamento}[t_0, t_0 + h] = f(t_0 + h) - f(t_0)$$

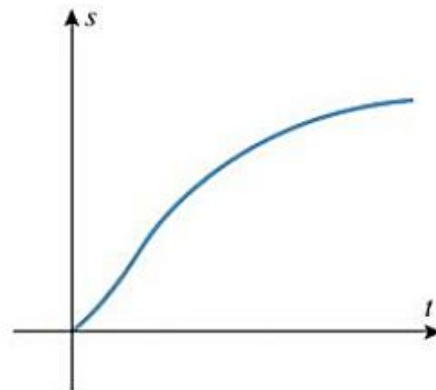
- O deslocamento pode ser: positivo, negativo ou nulo;
- Se o corpo se mover em ambos os sentidos os valores do deslocamento e da distância percorrida podem ser diferentes.

Movimento retilíneo

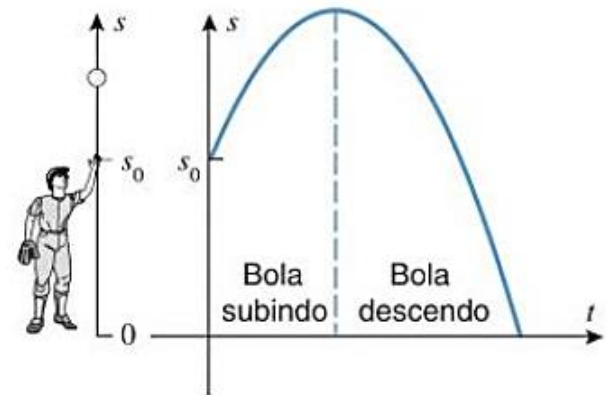
- Um gráfico da posição s da partícula *versus* tempo decorrido t descreve o movimento.



O carro move-se somente no sentido positivo



Curva posição *versus* tempo



Curva posição *versus* tempo

Velocidade média

- Define-se a velocidade média v_m como sendo a razão entre o deslocamento S em um intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Velocidade média

- Define-se a velocidade média v_m como sendo a razão entre o deslocamento S em um intervalo de tempo $[t_0, t_0 + h]$:

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

- E a velocidade escalar média é definida como o quociente entre a distância percorrida pelo tempo decorrido:

$$\text{velocidade escalar}_m = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo decorrido}}$$

Exemplo 5

A função da posição de um corpo em relação ao tempo decorrido é expressa pela expressão:

$$s = f(t) = 1 - t^2$$

Encontrar a velocidade média v_m no intervalo de tempo $[2, 3]$. Estimar a velocidade instantânea quando $t = 2s$.

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea v_i como sendo:

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea v_i como sendo:

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

- Geometricamente, a v_m entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$ é a inclinação da reta secante aos pontos $P(t_0, f(t_0))$ e $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$.

Velocidade instantânea

- Define-se a velocidade instantânea v_i como sendo:

$$v_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

- Geometricamente, a v_m entre $t = t_0$ e $t = t_0 + h$ é a inclinação da reta secante aos pontos $P(t_0, f(t_0))$ e $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$.
- A velocidade instantânea v_i no ponto t_0 é a inclinação da reta tangente à curva no ponto $P(t_0, f(t_0))$.

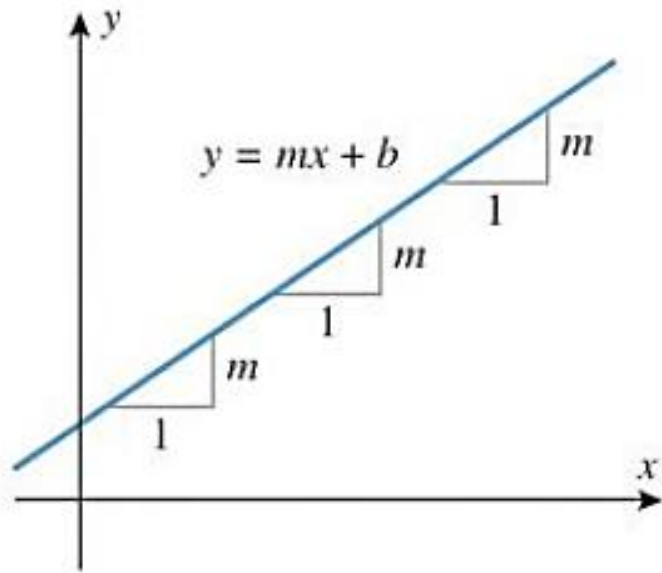
Inclinações e taxas de variação

- A velocidade pode ser vista como sendo a taxa de variação da posição em relação ao tempo;

Inclinações e taxas de variação

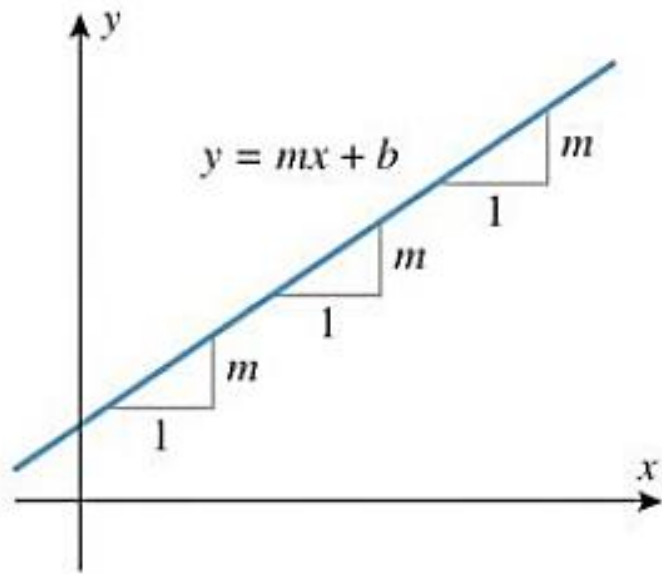
- A velocidade pode ser vista como sendo a taxa de variação da posição em relação ao tempo;
- As taxas de variação ocorrem em inúmeras aplicações como:
 - Quantidade de bactérias no tempo;
 - Comprimento de uma barra metálica com a temperatura;
 - Custo de produção dependente da quantidade de produtos;

Inclinações e taxas de variação



- Quando y é uma função linear de x ($y = mx + b$) a inclinação m é uma medida natural da taxa de variação de y em relação a x ;

Inclinações e taxas de variação



Uma unidade de aumento em x produz sempre m unidades de variação em y .

- Quando y é uma função linear de x ($y = mx + b$) a inclinação m é uma medida natural da taxa de variação de y em relação a x ;
- O aumento de 1 unidade em x , produz uma variação de m unidades de y ;

Exemplo 7

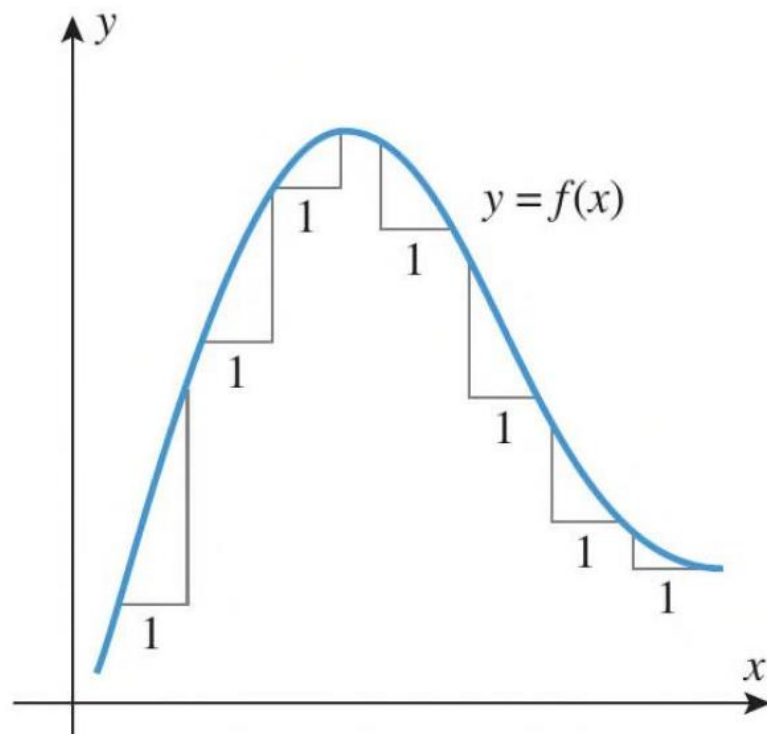
Encontrar a taxa de variação de y em relação a x .

(a) $y = 2x - 1$

(b) $y = -5x + 1$

Inclinações e taxas de variação

- Para uma curva qualquer a taxa de variação pode não ser linear.



Inclinações e taxas de variação

- Se $y = f(x)$, então definimos a taxa de variação média r_m de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ como:

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ou

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Inclinações e taxas de variação

- Se $y = f(x)$, então definimos a taxa de variação média r_m de y em relação a x no intervalo $[x_0, x_1]$ como:

$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ou

$$r_m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- E a taxa de variação instantânea r_i de y em relação a x será:

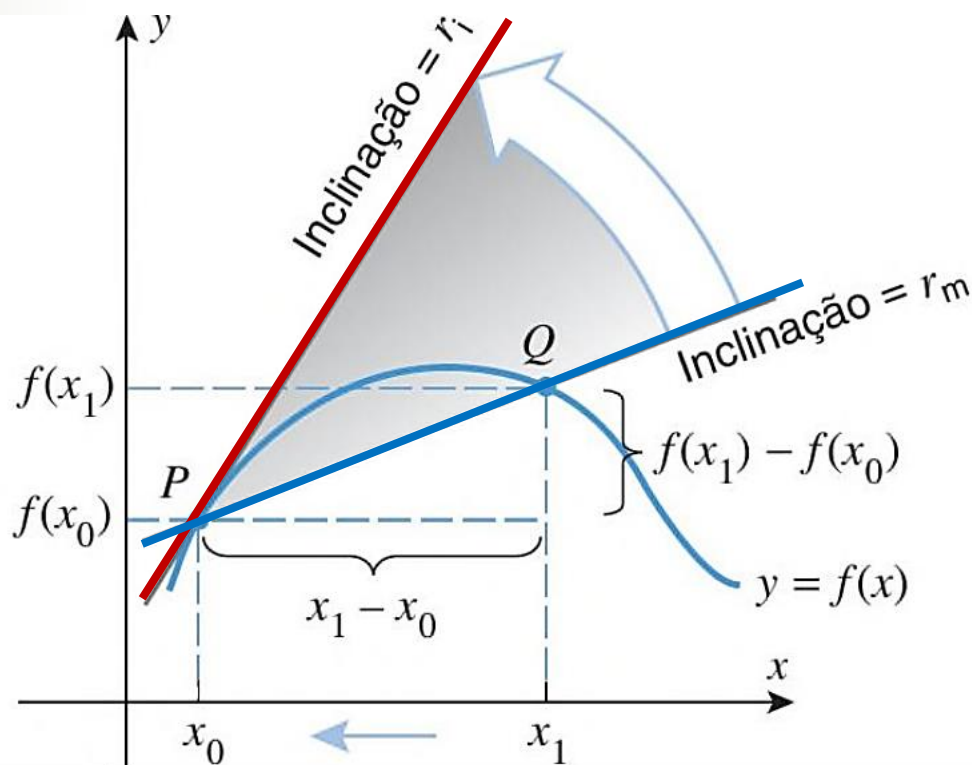
$$r_i = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

ou

$$r_i = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Inclinações e taxas de variação

$$r_i = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



$$r_m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Exemplo 9

Seja a função $y = f(x) = x^2 + 1$

- (a) Encontrar a taxa de variação média de y em relação a x no intervalo $[3, 5]$;
- (b) E a taxa de variação instantânea de y em relação a x quando $x = -4$.

Para depois desta aula:

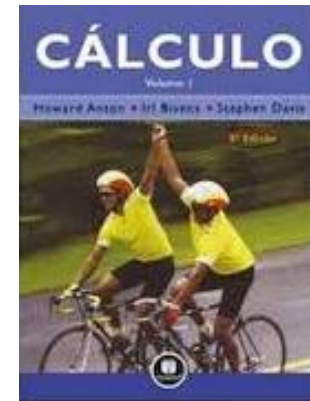
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no [site](#));

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br