

# Geometria Analítica

## Engenharias

### Semana 11 – Aula 1

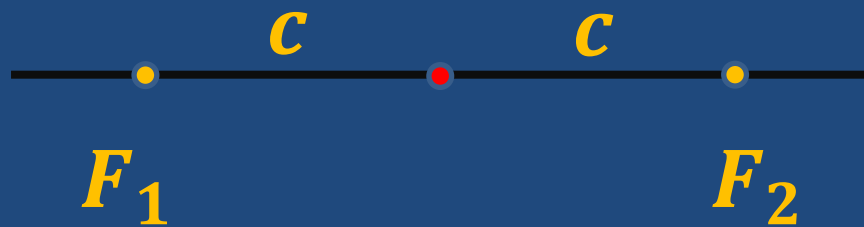
### Elipse

**Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria**

**henrique.faria@unesp.br**

# Elipse

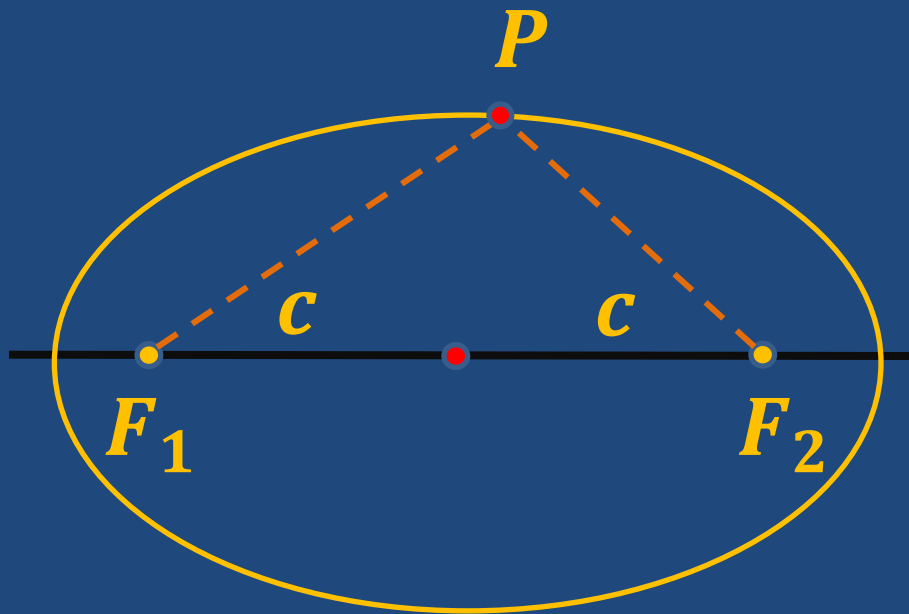
Sejam dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  em que a distância entre estes é expressa por:  $d(F_1, F_2) = 2c$



# Elipse

Sejam dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  em que a distância entre estes é expressa por:  $d(F_1, F_2) = 2c$

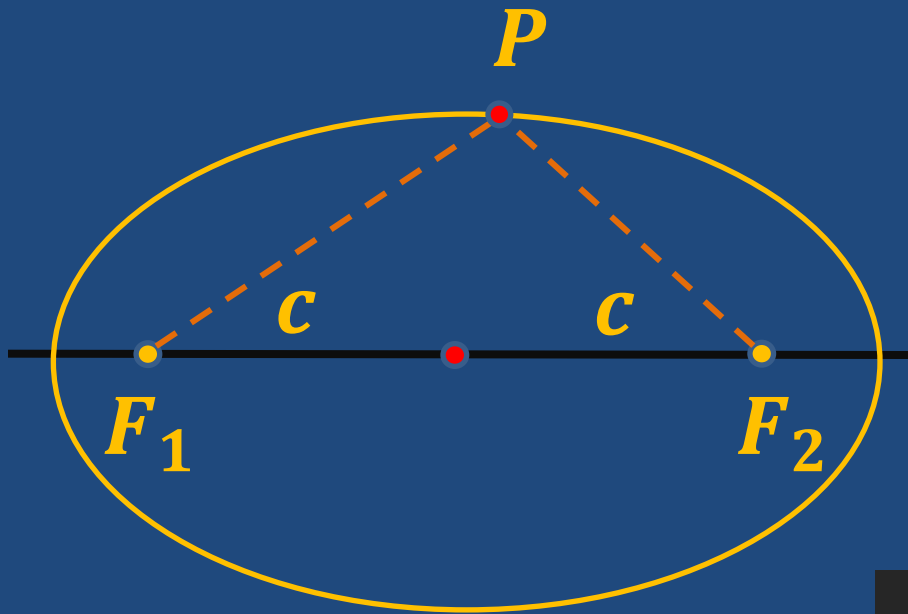
Estabelecendo como fixa a soma das distâncias  $d(F_1, P)$  e  $d(F_2, P)$ , constrói-se a curva seguinte:



# Elipse

Sejam dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  em que a distância entre estes é expressa por:  $d(F_1, F_2) = 2c$

Estabelecendo como fixa a soma das distâncias  $d(F_1, P)$  e  $d(F_2, P)$ , constrói-se a curva seguinte:

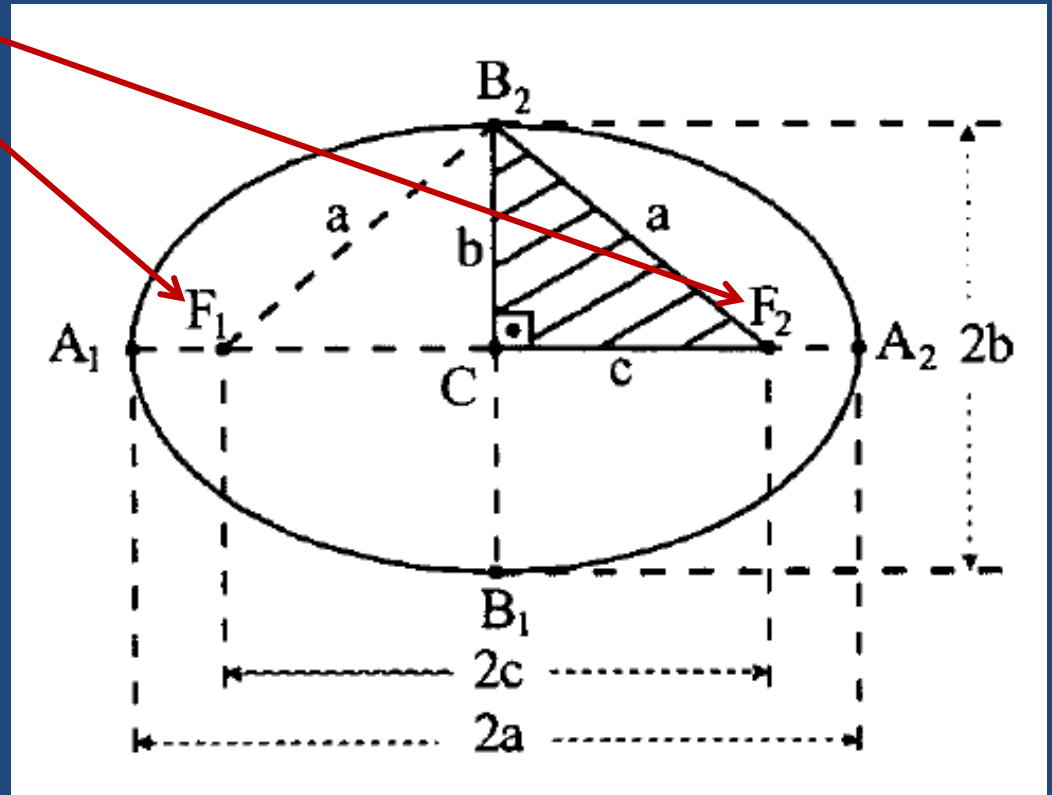


Elipse é o conjunto de todos os pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

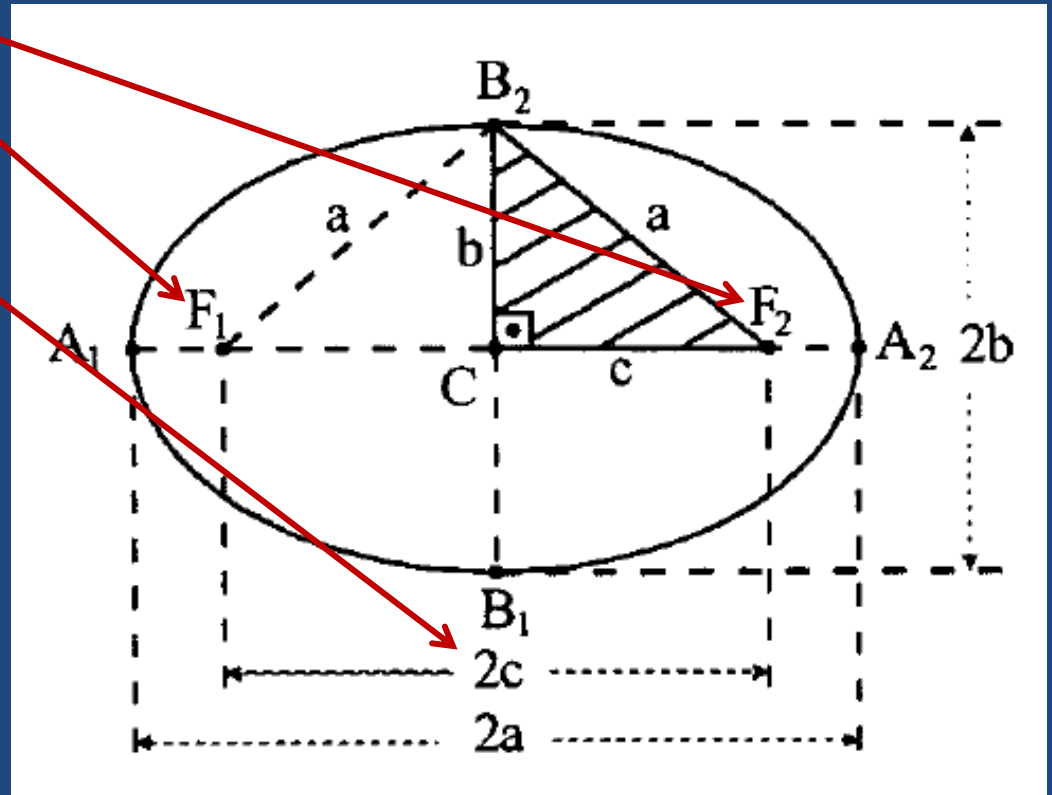
# Elementos da Elipse

➤ **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$



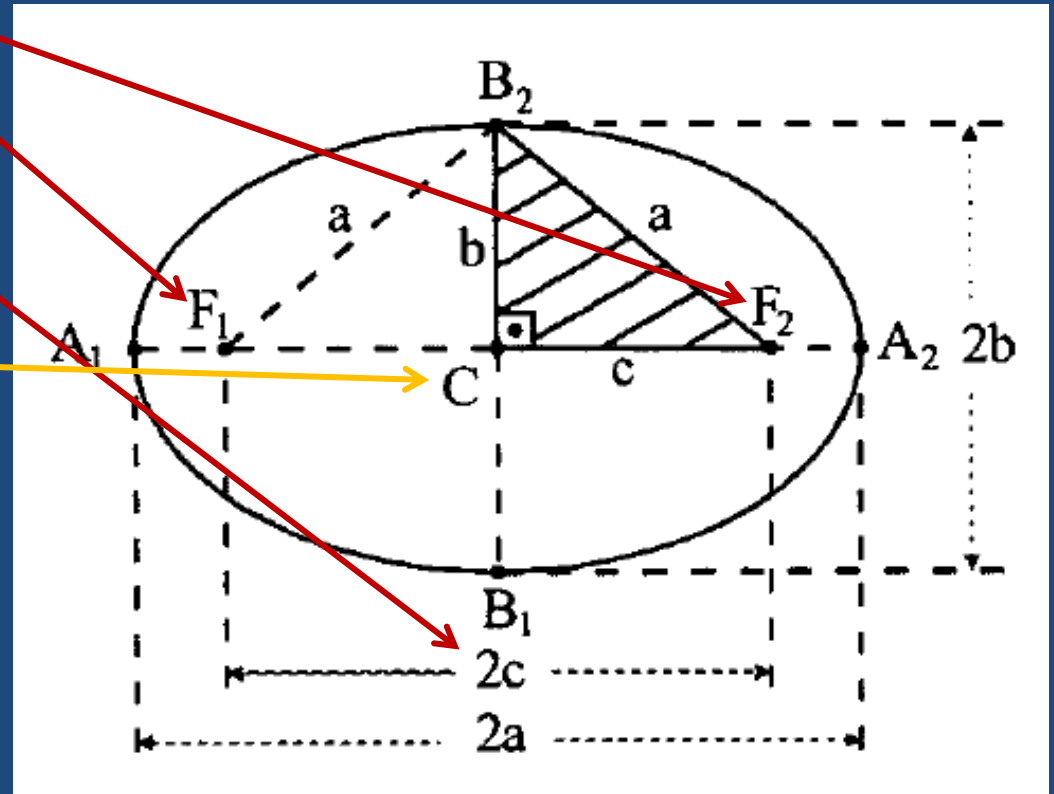
# Elementos da Elipse

- **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$
- **Distância Focal:**  
 $d(F_1, F_2) = 2c$



# Elementos da Elipse

- **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$
- **Distância Focal:**  
 $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:**  $C$



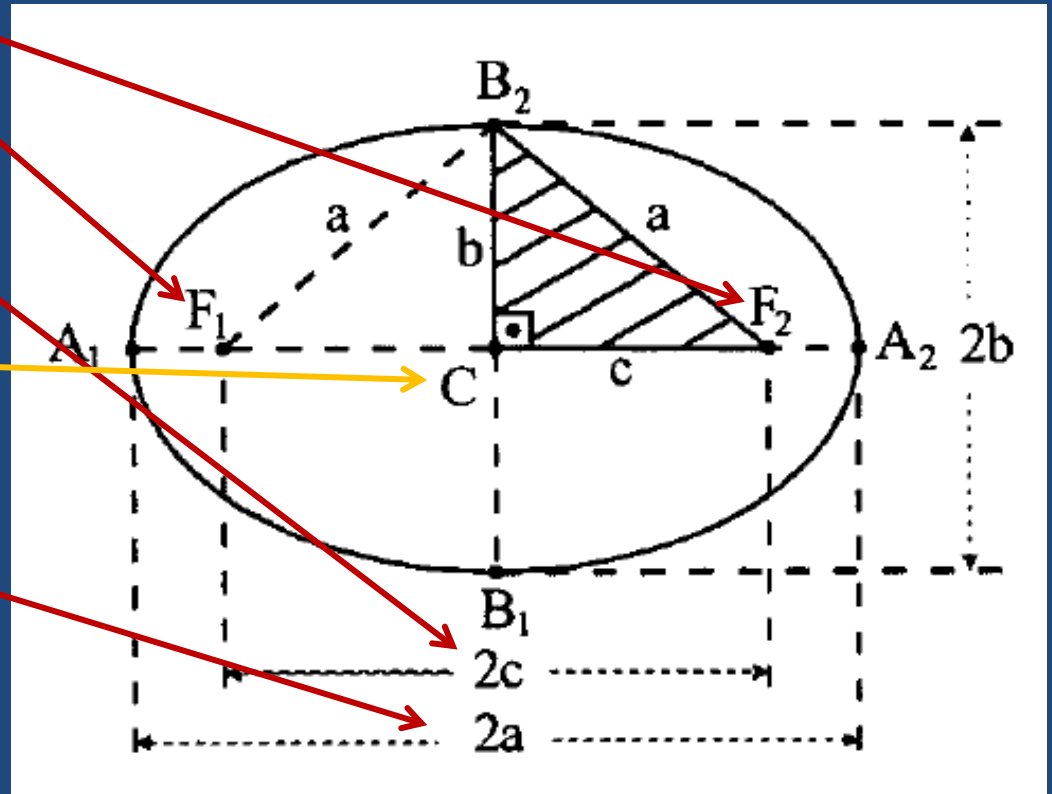
# Elementos da Elipse

➤ **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$

➤ **Distância Focal:**  
 $d(F_1, F_2) = 2c$

➤ **Centro:**  $C$

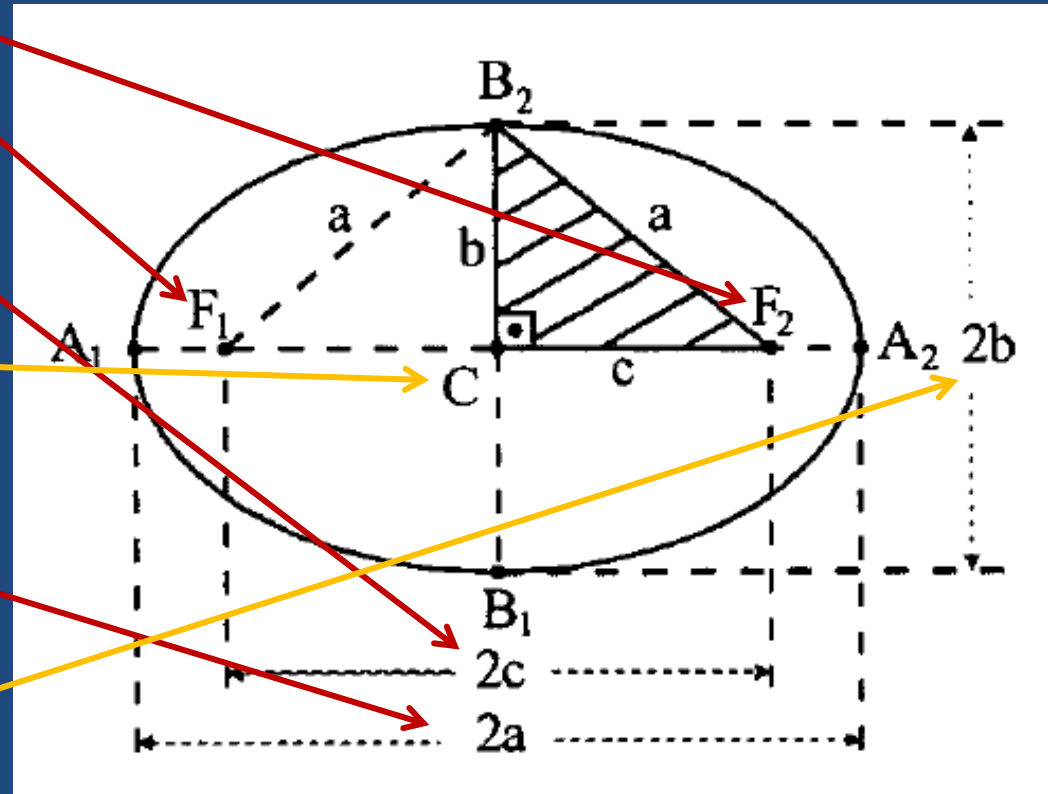
➤ **Eixo maior:**  $2a$





# Elementos da Elipse

- **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$
- **Distância Focal:**  
 $d(F_1, F_2) = 2c$
- **Centro:**  $C$
- **Eixo maior:**  $2a$
- **Eixo menor:**  $2b$



# Elementos da Elipse

➤ **Focos:**  $F_1$  e  $F_2$

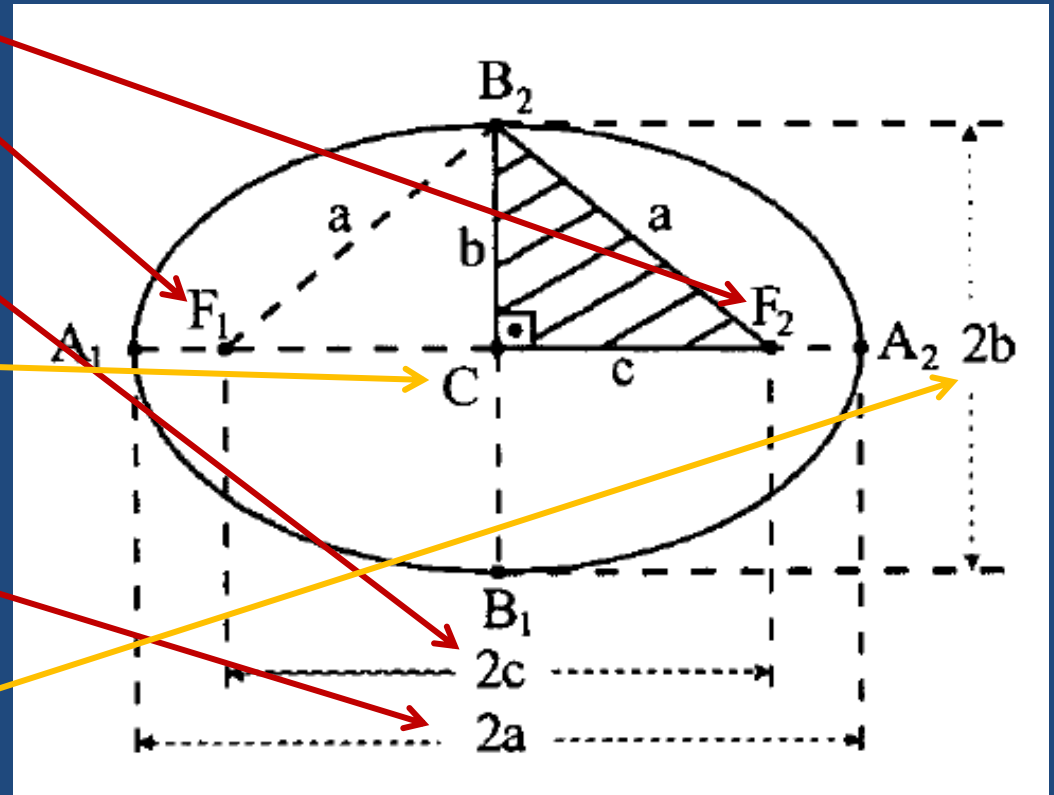
➤ **Distância Focal:**  
 $d(F_1, F_2) = 2c$

➤ **Centro:**  $C$

➤ **Eixo maior:**  $2a$

➤ **Eixo menor:**  $2b$

➤ **Vértices:**  $A_1, A_2, B_1, B_2$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

# Excentricidade da elipse

Número real  $0 < e < 1$  obtido pela razão:

$$e = \frac{c}{a}$$

# Excentricidade da elipse

Número real  $0 < e < 1$  obtido pela razão:

$$e = \frac{c}{a}$$

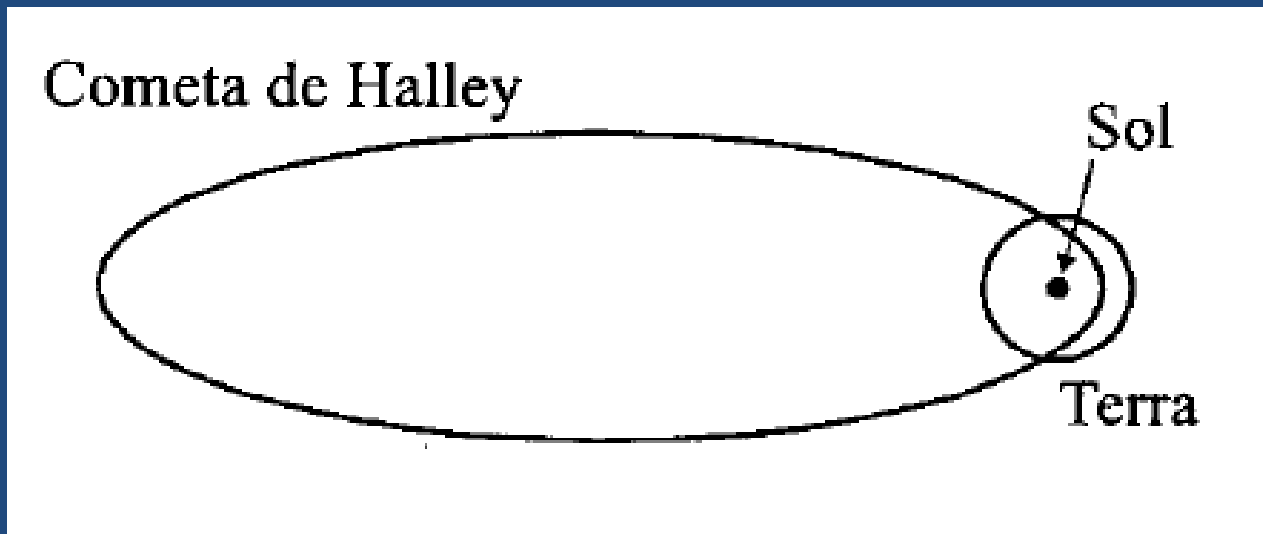
A excentricidade é responsável pela forma da elipse.

- $e \cong 0$  se aproximam de uma circunferência;
- $e \cong 1$  elipses achatadas.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

# Excentricidade da elipse

O corpo com órbita mais excêntrica no sistema solar é o cometa Halley:  $e = 0,967$ . Ele leva 76 anos para completar uma volta em torno do sol (revolução).



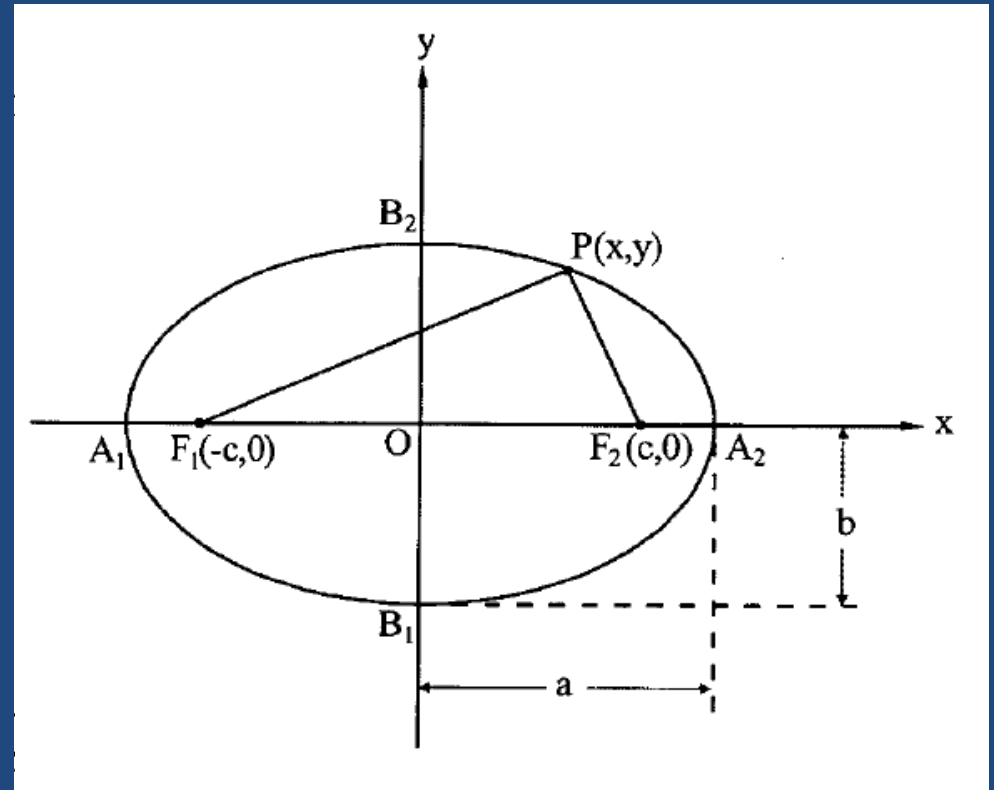
Enquanto a excentricidade da órbita da terra em torno do sol:  $e = 0,02$ .

# Equação reduzida da elipse

1º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $x$ .

Focos:  $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$



# Equação reduzida da elipse

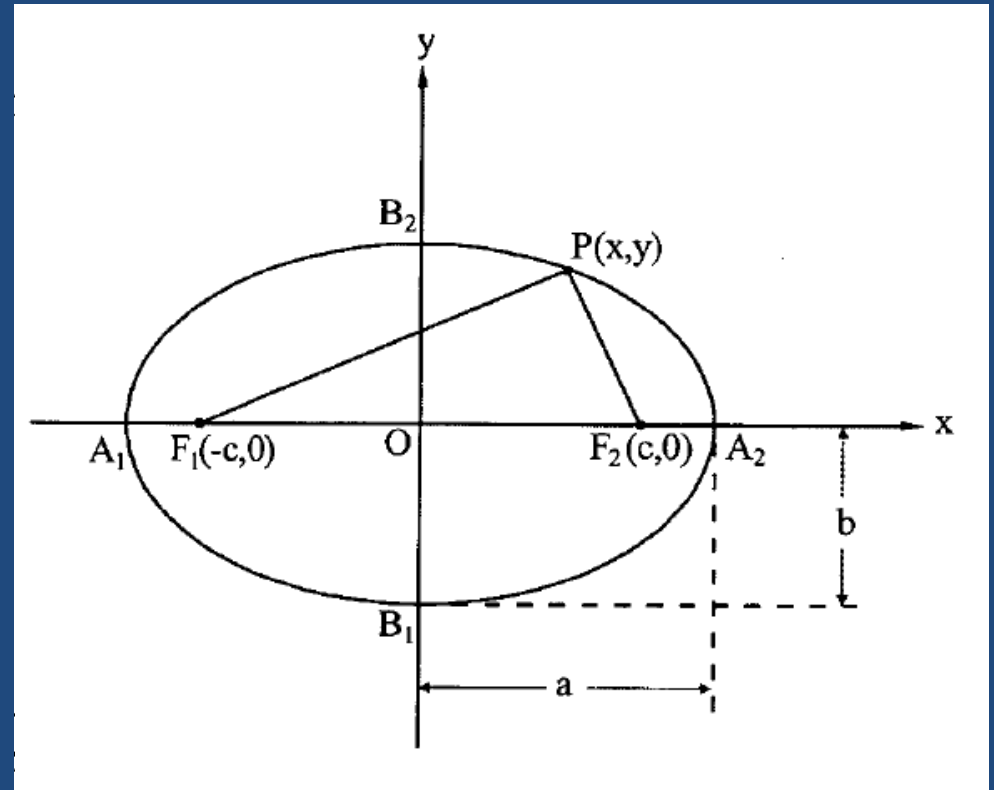
1º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $x$ .

Focos:  $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$



# Equação reduzida da elipse

1º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $x$ .

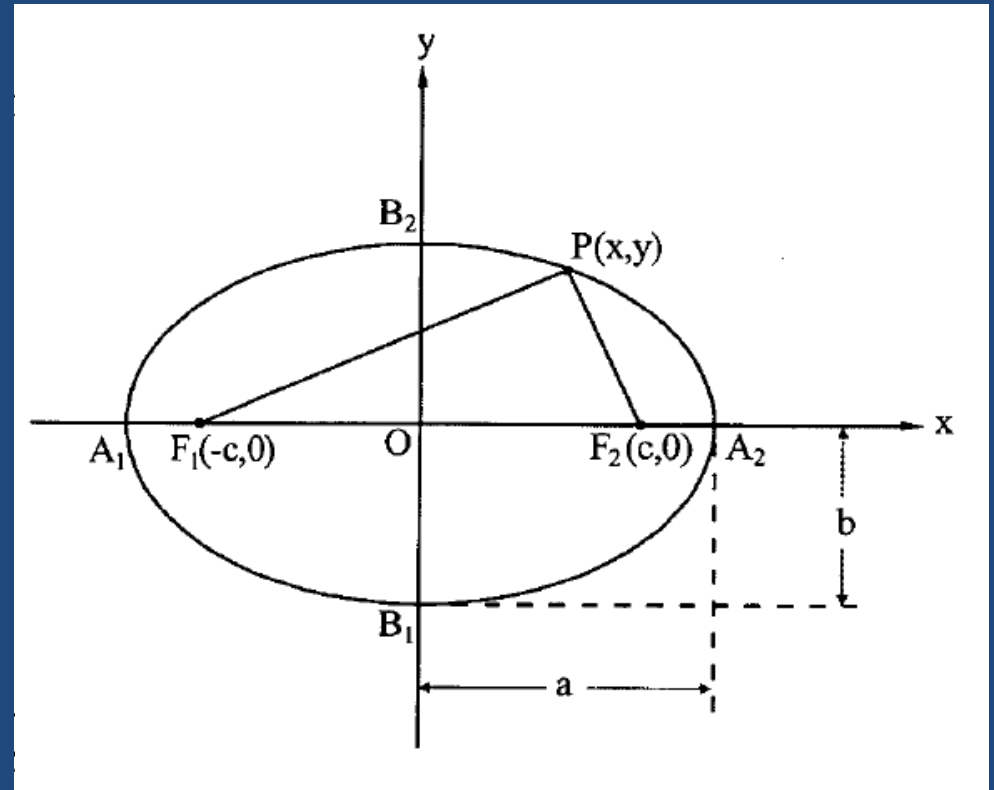
Focos:  $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$

Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$





# Equação reduzida da elipse

1º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $x$ .

Focos:  $F_1(-c, 0)$

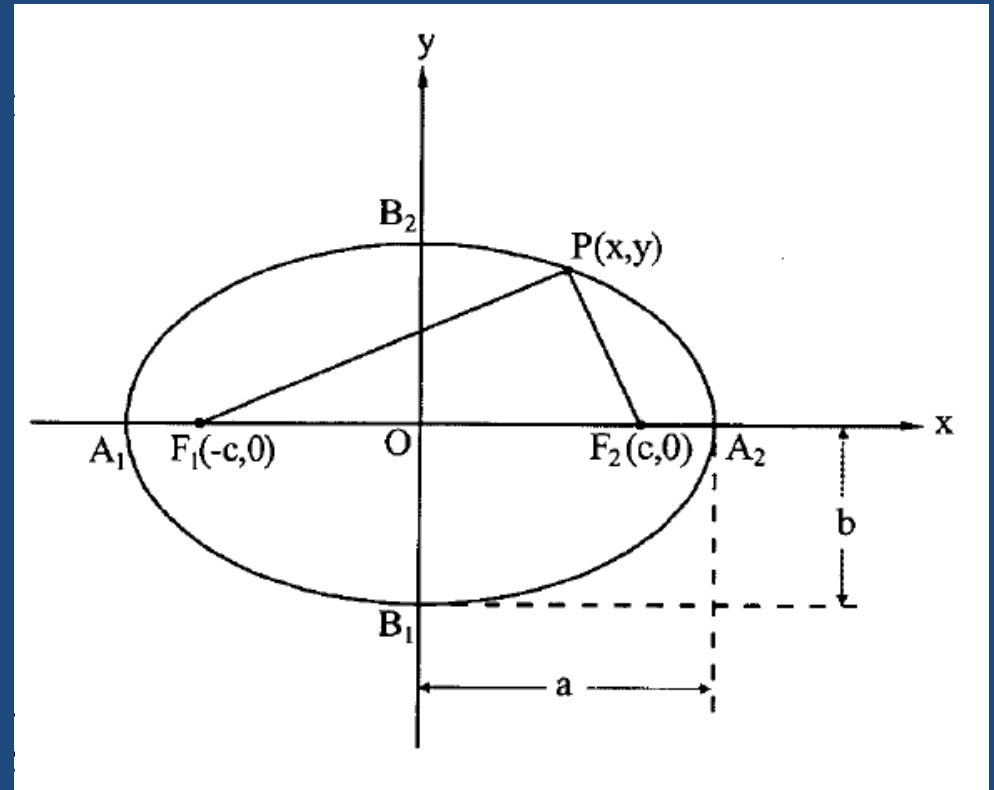
$F_2(c, 0)$

Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

$$|(x, y) - (-c, 0)| + |(x, y) - (c, 0)| = 2a$$

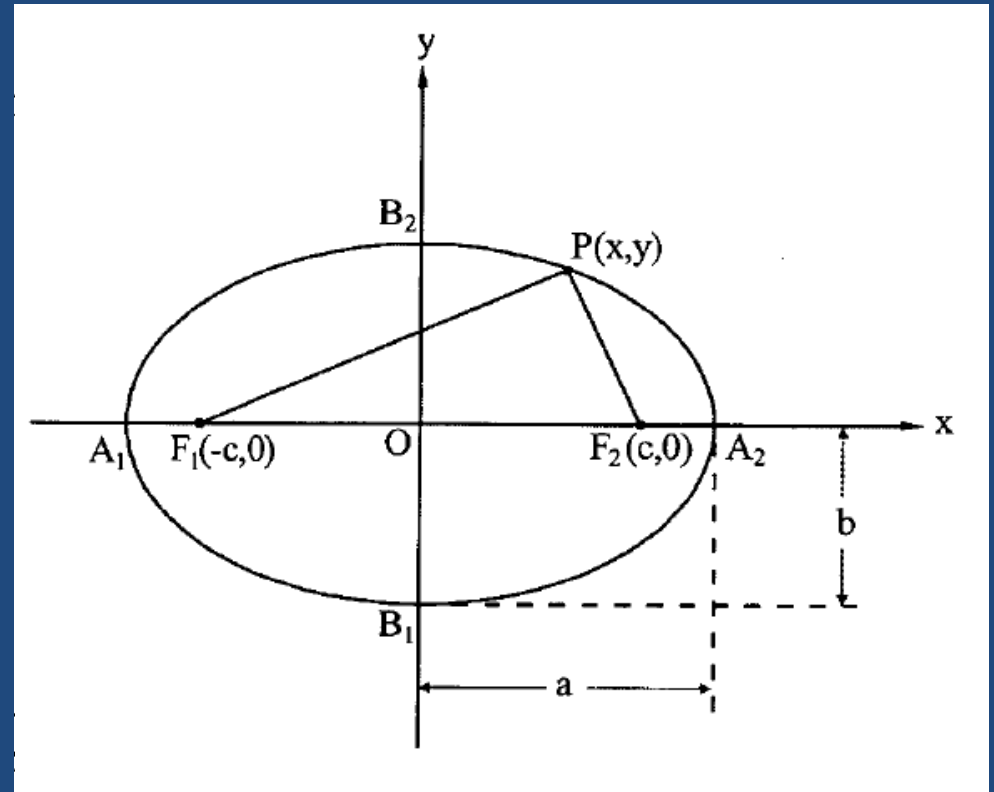


# Equação reduzida da elipse

1º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $x$ .

Focos:  $F_1(-c, 0)$

$F_2(c, 0)$



Pela definição:

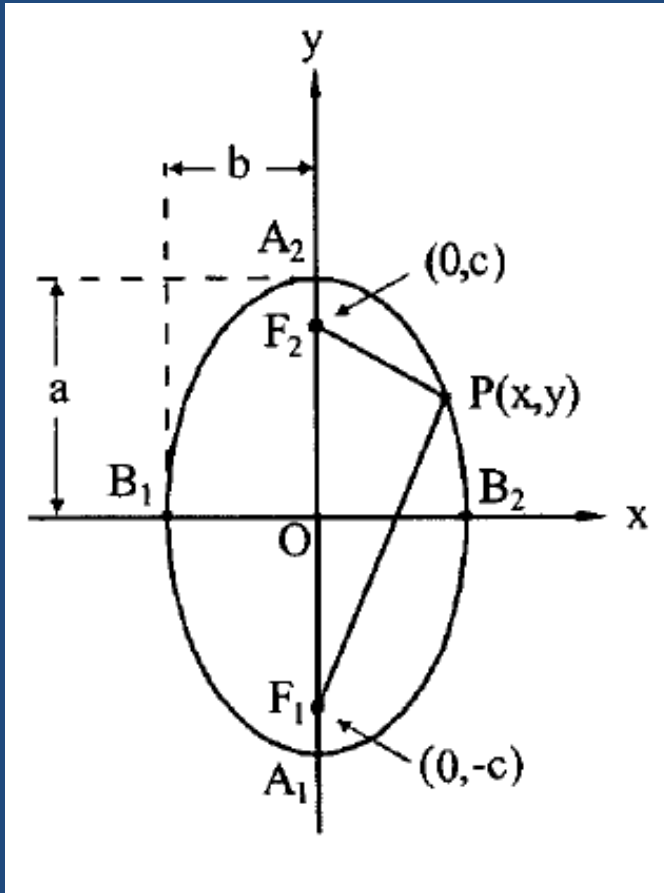
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$|\overrightarrow{F_1P}| + |\overrightarrow{F_2P}| = 2a$$

$$|(x, y) - (-c, 0)| + |(x, y) - (c, 0)| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

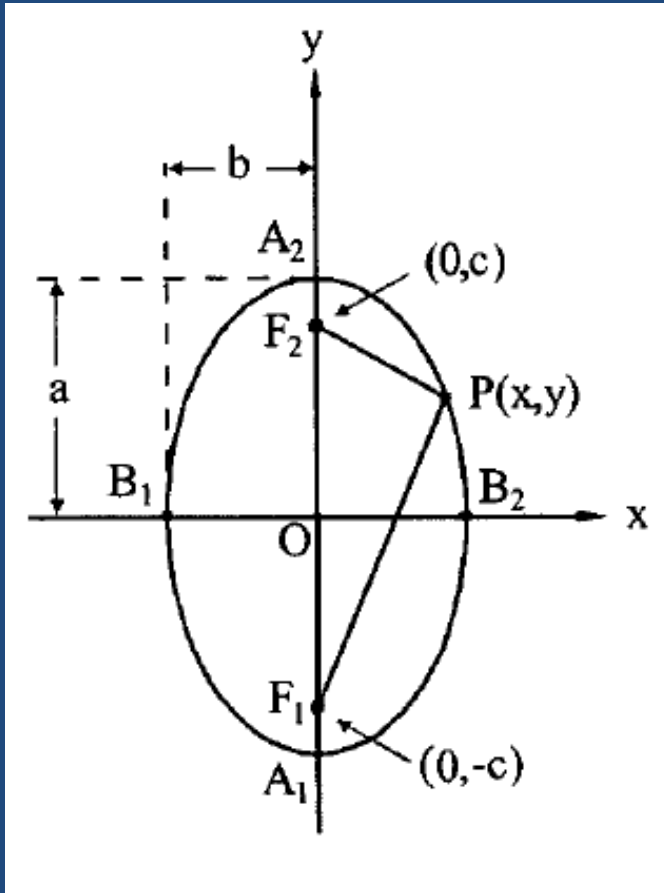
# Equação reduzida da Elipse



2º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $y$ .

Foco:  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$

# Equação reduzida da Elipse



2º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $y$ .

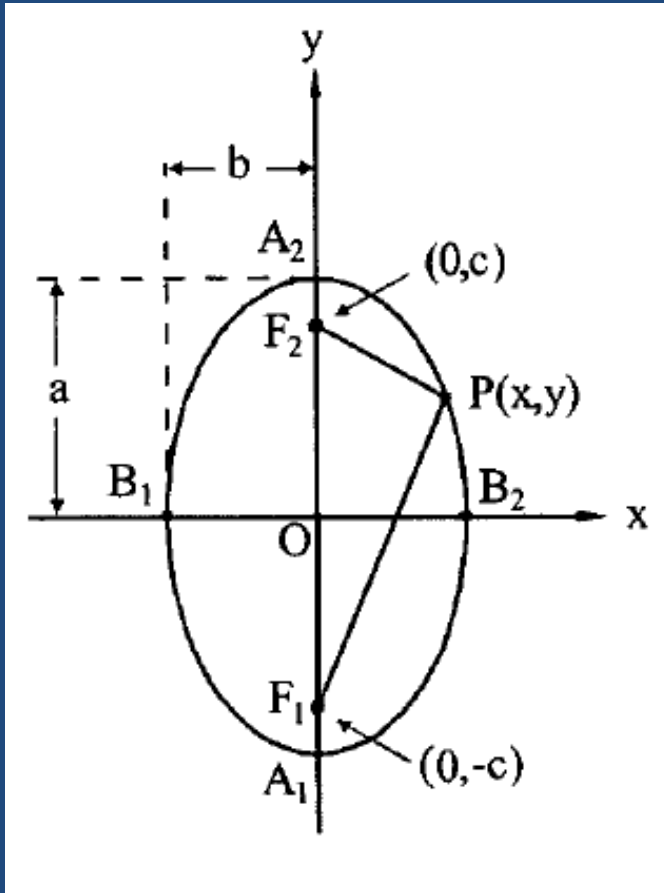
Foco:  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$

Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Fazer como exercício em casa ...

# Equação reduzida da Elipse



2º Caso: Eixo maior sobre o eixo  $y$ .

Foco:  $F_1(0, -c)$  e  $F_2(0, c)$

Pela definição:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Fazer como exercício em casa ...

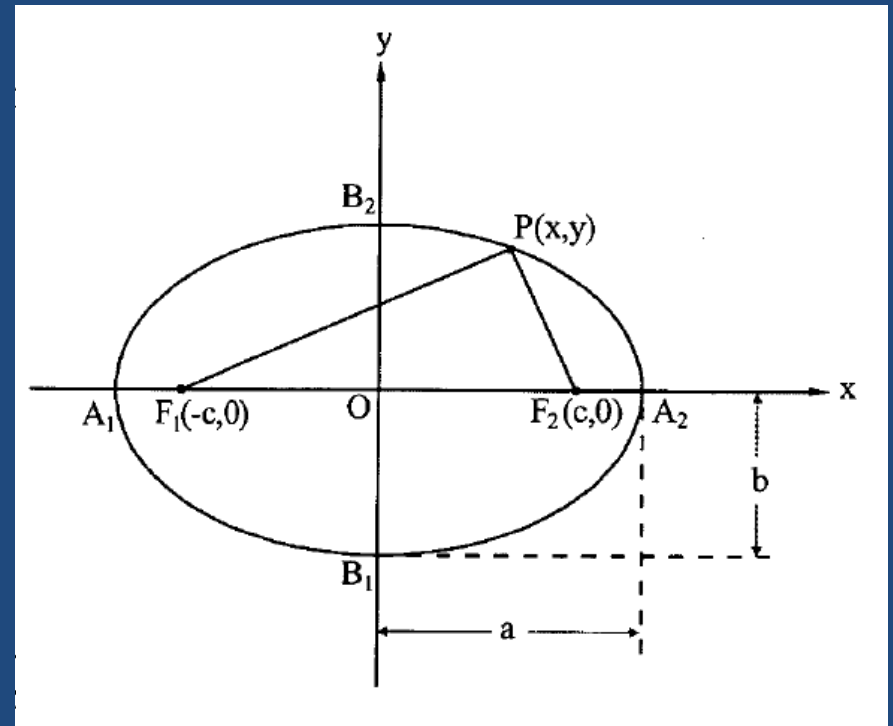


$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

# Como identificar o eixo maior?

Na representação, sempre para elipse:  $a > b$

Então:



# Como identificar o eixo maior

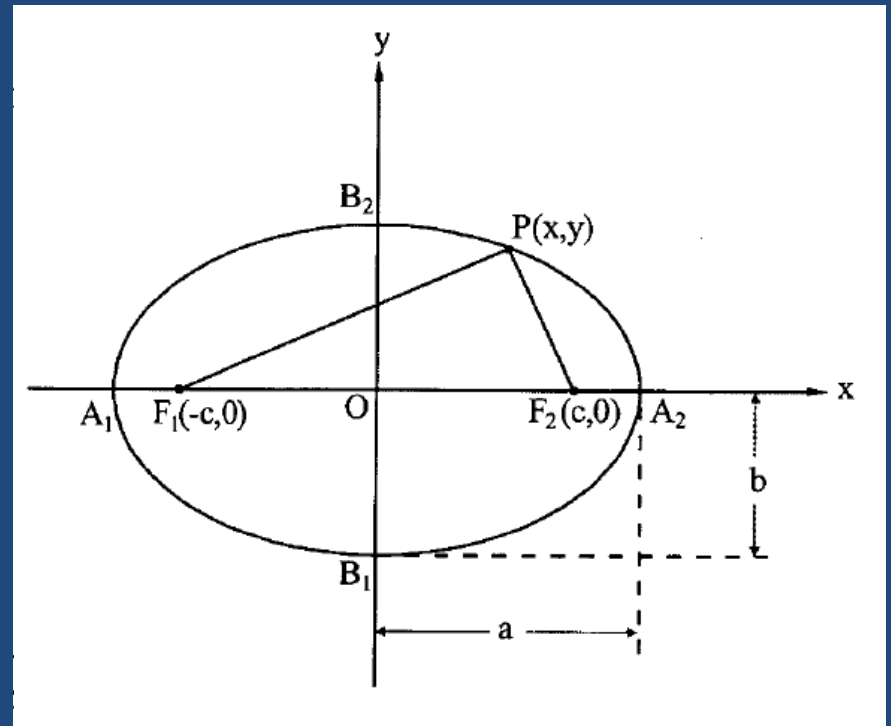
Na representação, sempre para elipse:  $a > b$

Então:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Eixo maior**

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



# Exemplo 1

Resp.:  $F_1(0, -\sqrt{12})$   $e = 0,86$

Determine para a elipse  $4x^2 + y^2 - 16 = 0$ .

- a) A medida dos semieixos;
- b) Os focos
- c) A excentricidade;
- d) O esboço do gráfico



# Exercício

$$\text{Resp.: } F_1(\sqrt{7}, 0) \quad e = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Determine para a elipse  $9x^2 + 16y^2 - 144 = 0$ .

- a) A medida dos semieixos; b) Os Focos
- c) A excentricidade; d) O esboço do gráfico

# Translação de eixos

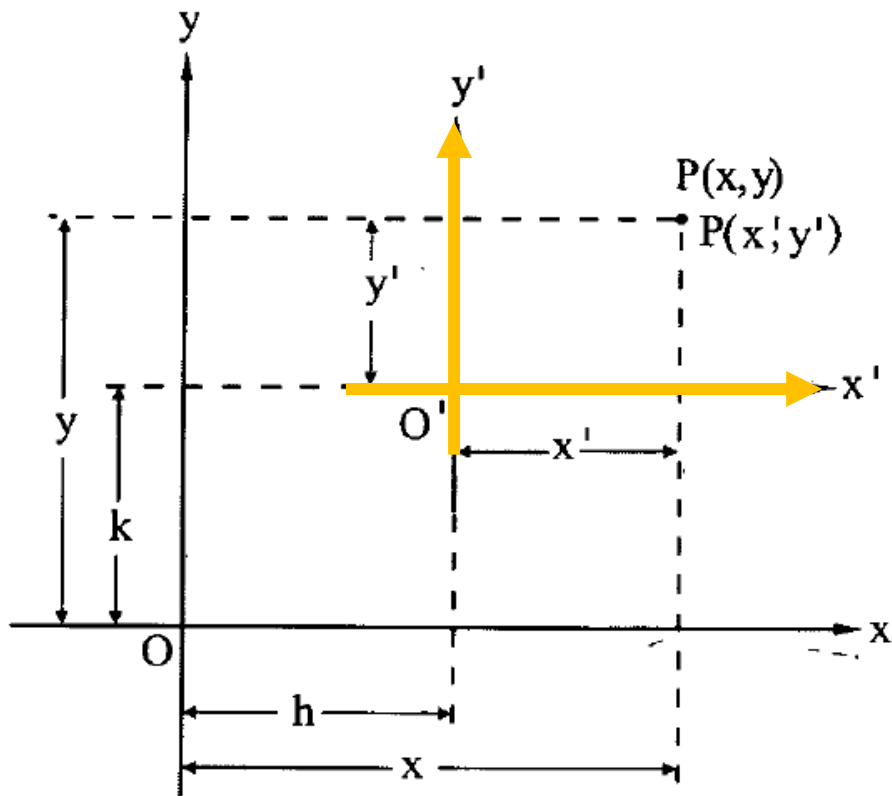


Figura 8.15

- $P(x, y)$  plano  $xoy$ ;
- $P(x', y')$  plano  $x'o'y'$ ;
- Da figura:

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Relações de  
transformação

# Equação da elipse deslocada

**Caso 1:** Eixo maior é paralelo ao eixo  $x$ .

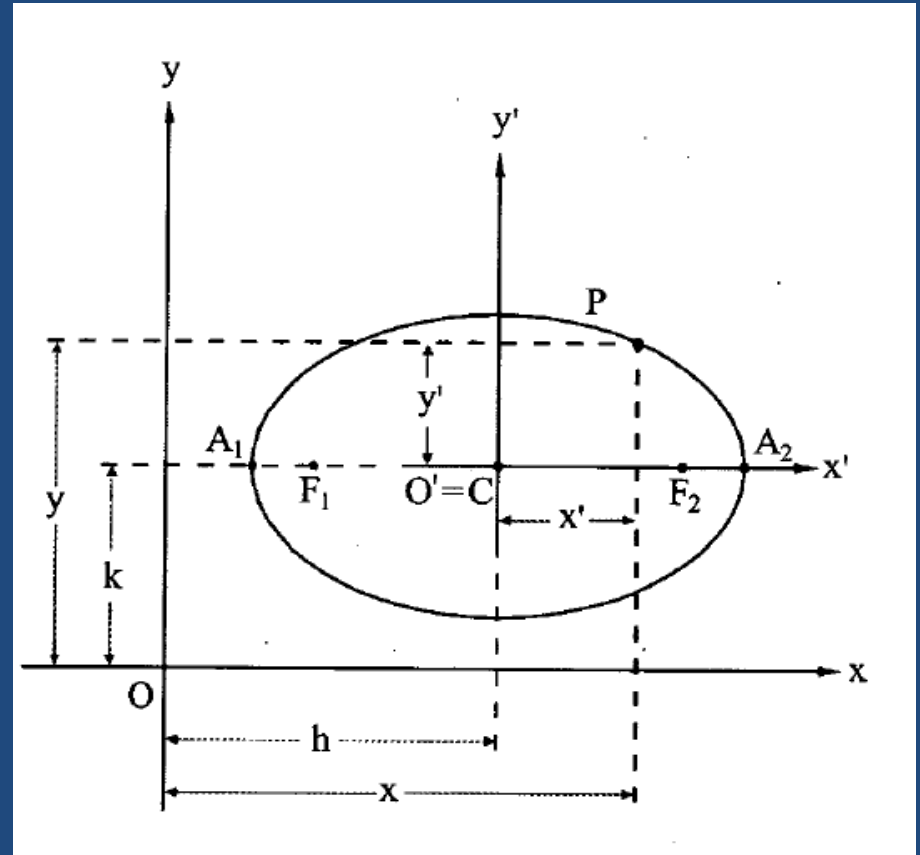
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

No sistema  $x_0y$ :

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Então:

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



# Equação da elipse deslocada

Caso 2: Eixo maior é paralelo ao eixo  $y$ .

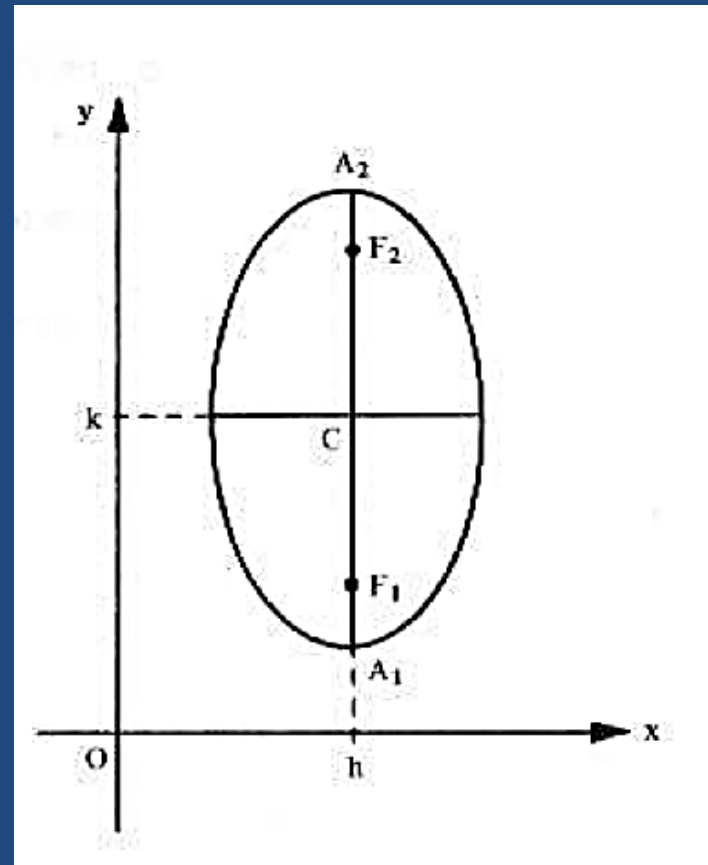
$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$$

No sistema  $x_0y$ :

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Então:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



Troca de  $a$  por  $b$   
no caso anterior

## Exemplo 2

Obter a equação da elipse com eixo maior paralelo ao eixo  $y$  com centro  $C(4, -2)$ , eixo menor com medida **6** e excentricidade  $e = 1/2$ .

$$\text{Resp.: } 4x^2 + 3y^2 - 32x + 12y + 40 = 0$$

# Exercício

A equação da elipse é:  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$

Determinar: a) a equação reduzida; b) o centro; c) os focos; d) a excentricidade.

$$\text{Resp.: } F_1(1 - \sqrt{5}, 2) \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

# Circunferência

The background is a dark, teal-colored abstract composition. It features a complex network of thin, light-colored lines that form various geometric shapes, including circles, arcs, and a grid-like pattern. Some of these lines are thicker and more prominent, creating a sense of depth and movement. Scattered throughout the background are faint, semi-transparent numbers and mathematical symbols, such as '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '10', '11', '12', '13', '14', '15', '16', '17', '18', '19', '20', '21', '22', '23', '24', '25', '26', '27', '28', '29', '30', '31', '32', '33', '34', '35', '36', '37', '38', '39', '40', '41', '42', '43', '44', '45', '46', '47', '48', '49', '50', '51', '52', '53', '54', '55', '56', '57', '58', '59', '60', '61', '62', '63', '64', '65', '66', '67', '68', '69', '70', '71', '72', '73', '74', '75', '76', '77', '78', '79', '80', '81', '82', '83', '84', '85', '86', '87', '88', '89', '90', '91', '92', '93', '94', '95', '96', '97', '98', '99', '100', '101', '102', '103', '104', '105', '106', '107', '108', '109', '110', '111', '112', '113', '114', '115', '116', '117', '118', '119', '120', '121', '122', '123', '124', '125', '126', '127', '128', '129', '130', '131', '132', '133', '134', '135', '136', '137', '138', '139', '140', '141', '142', '143', '144', '145', '146', '147', '148', '149', '150', '151', '152', '153', '154', '155', '156', '157', '158', '159', '160', '161', '162', '163', '164', '165', '166', '167', '168', '169', '170', '171', '172', '173', '174', '175', '176', '177', '178', '179', '180', '181', '182', '183', '184', '185', '186', '187', '188', '189', '190', '191', '192', '193', '194', '195', '196', '197', '198', '199', '200'. The overall effect is that of a digital or mathematical landscape.

# Circunferência

- Elipse degenerada;
- O plano  $\pi$  que secciona a superfície cônica é ortogonal ao eixo vertical desse cone;



# Circunferência

- Elipse degenerada;
- O plano  $\pi$  que secciona a superfície cônica é ortogonal ao eixo vertical desse cone;
- O que resulta na equação da elipse em  $a = b = r$  e define o raio  $r$  da circunferência;

# Circunferência

- Elipse degenerada;
- O plano  $\pi$  que secciona a superfície cônica é ortogonal ao eixo vertical desse cone;
- O que resulta na equação da elipse em  $a = b = r$  e define o raio  $r$  da circunferência;
- Os focos coincidem com o centro.

# Circunferência

- Elipse degenerada;
- O plano  $\pi$  que secciona a superfície cônica é ortogonal ao eixo vertical desse cone;
- O que resulta na equação da elipse em  $a = b = r$  e define o raio  $r$  da circunferência;
- Os focos coincidem com o centro.

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \quad x^2 + y^2 = r^2$$

# Circunferência

- Elipse degenerada;
- O plano  $\pi$  que secciona a superfície cônica é ortogonal ao eixo vertical desse cone;
- O que resulta na equação da elipse em  $a = b = r$  e define o raio  $r$  da circunferência;
- Os focos coincidem com o centro.

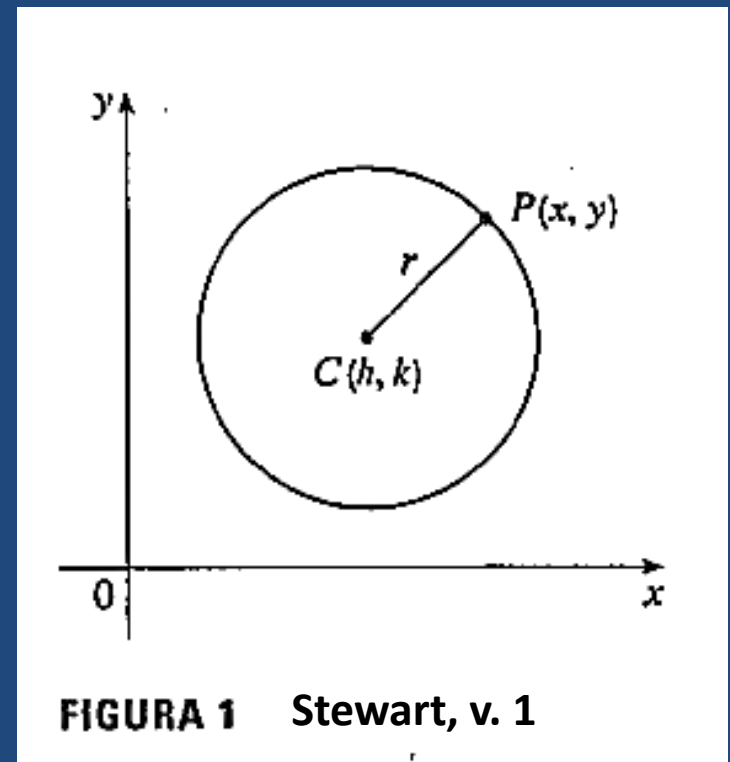
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Equação da  
circunferência  
centrada na origem

# Circunferência

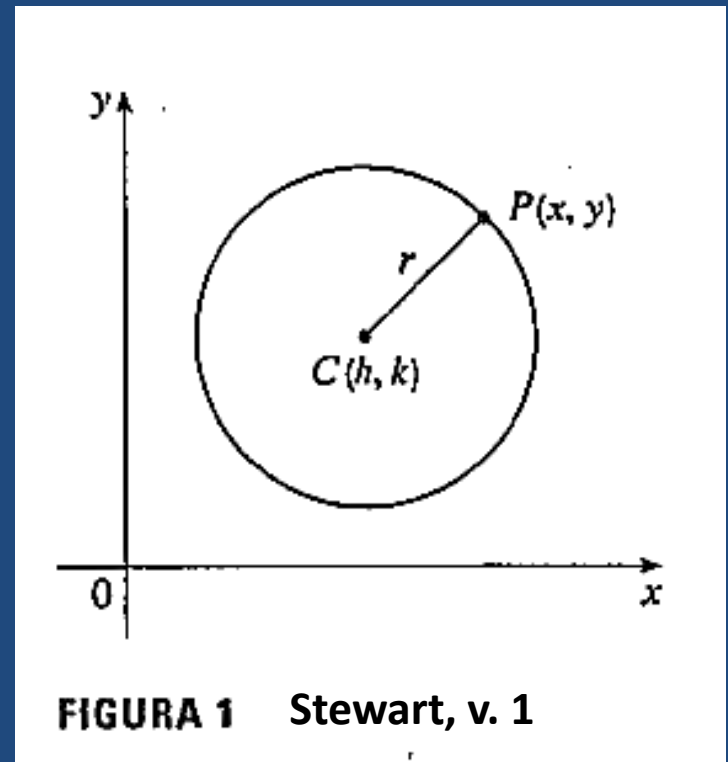
- Se o centro da circunferência estiver deslocado:  $C(h, k)$



# Circunferência

- Se o centro da circunferência estiver deslocado:  $C(h, k)$ ;
- A equação geral ficará, então:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

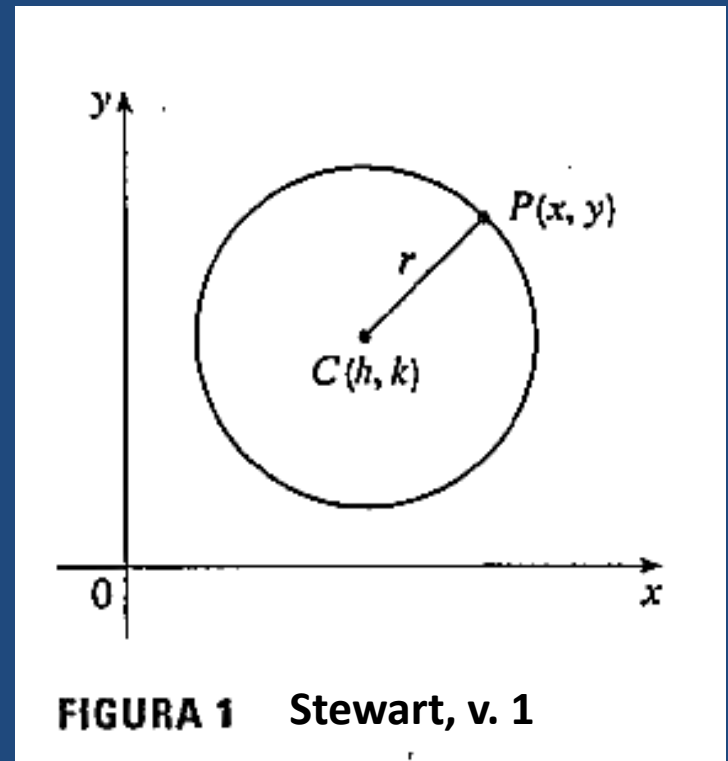


# Circunferência

- Se o centro da circunferência estiver deslocado:  $C(h, k)$ ;
- A equação geral ficará, então:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



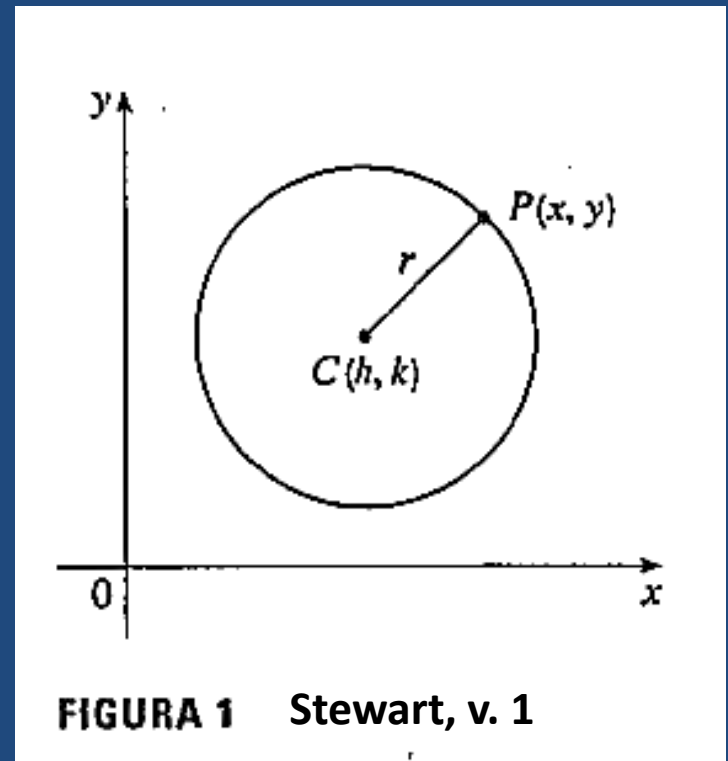
# Circunferência

- Se o centro da circunferência estiver deslocado:  $C(h, k)$ ;
- A equação geral ficará, então:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Equação da circunferência  
de centro  $C(h, k)$



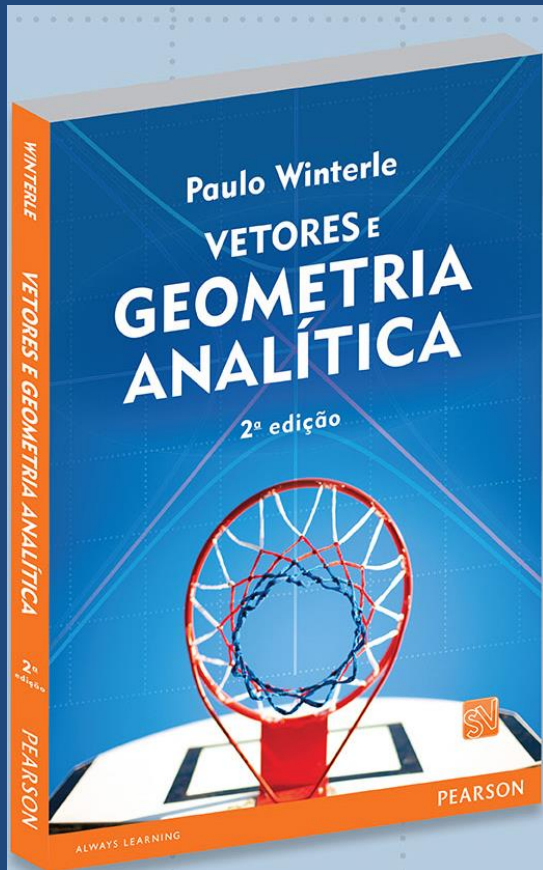


# Exemplo 1

Esboce o gráfico da equação  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$  mostrando, primeiro, que ela é uma circunferência.

Determine o seu raio e seu centro. Resp.:  $r = \sqrt{3}$  e  $C(-1, 3)$

# Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

# Contato



[profhenriquefaria.com](http://profhenriquefaria.com)



[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)