Geometria Analítica
Engenharias

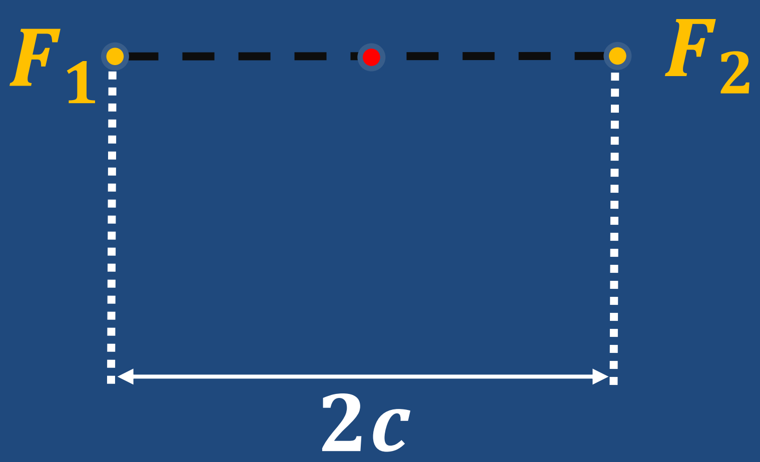
Semana 11 – Aula 2
Hipérbole

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

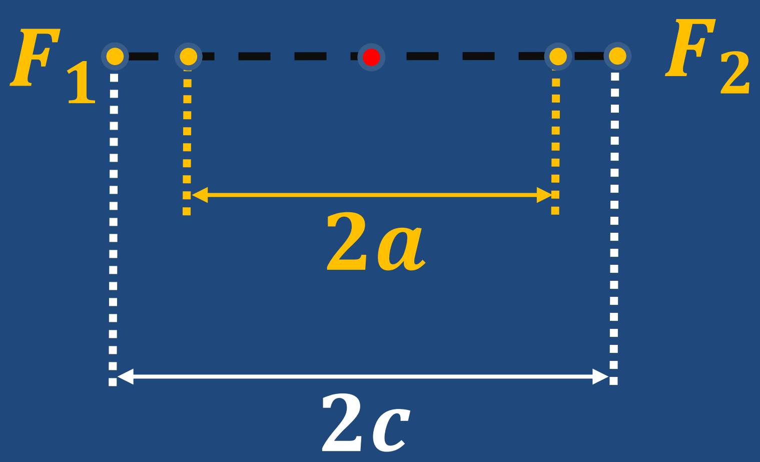
Hipérbole

- Sejam dois pontos F_1 e F_2 tal que: $d(F_1, F_2) = 2c$;



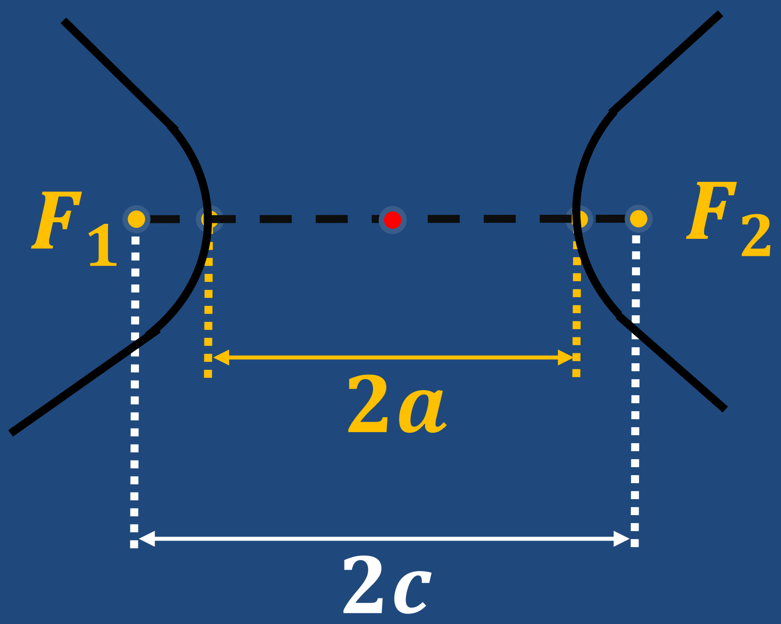
Hipérbole

- Sejam dois pontos F_1 e F_2 tal que: $d(F_1, F_2) = 2c$;
- Ainda um número real positivo a em que $2a < 2c$.



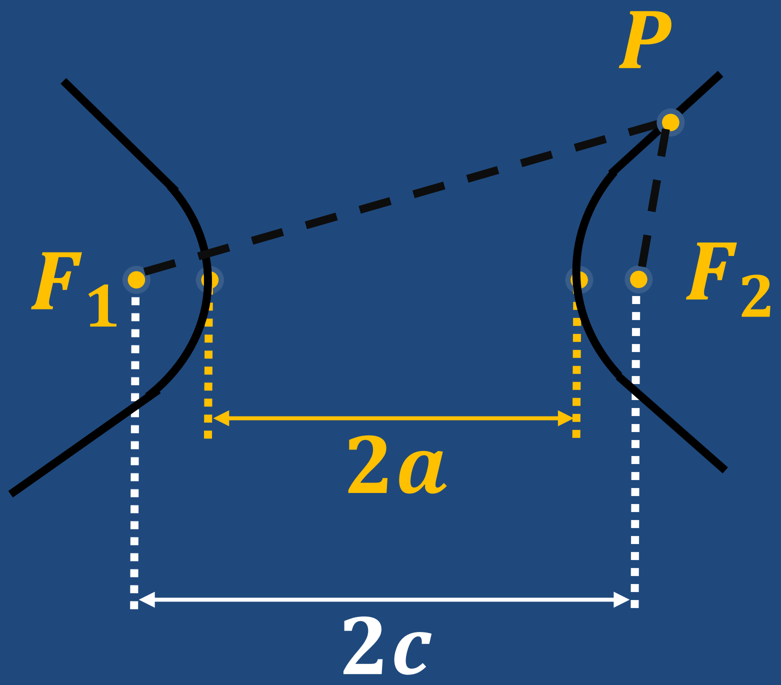
Hipérbole

- Sejam dois pontos F_1 e F_2 tal que: $d(F_1, F_2) = 2c$;
- Ainda um número real positivo a em que $2a < 2c$.



Hipérbole

- Sejam dois pontos F_1 e F_2 tal que: $d(F_1, F_2) = 2c$;
- Ainda um número real positivo a em que $2a < 2c$.



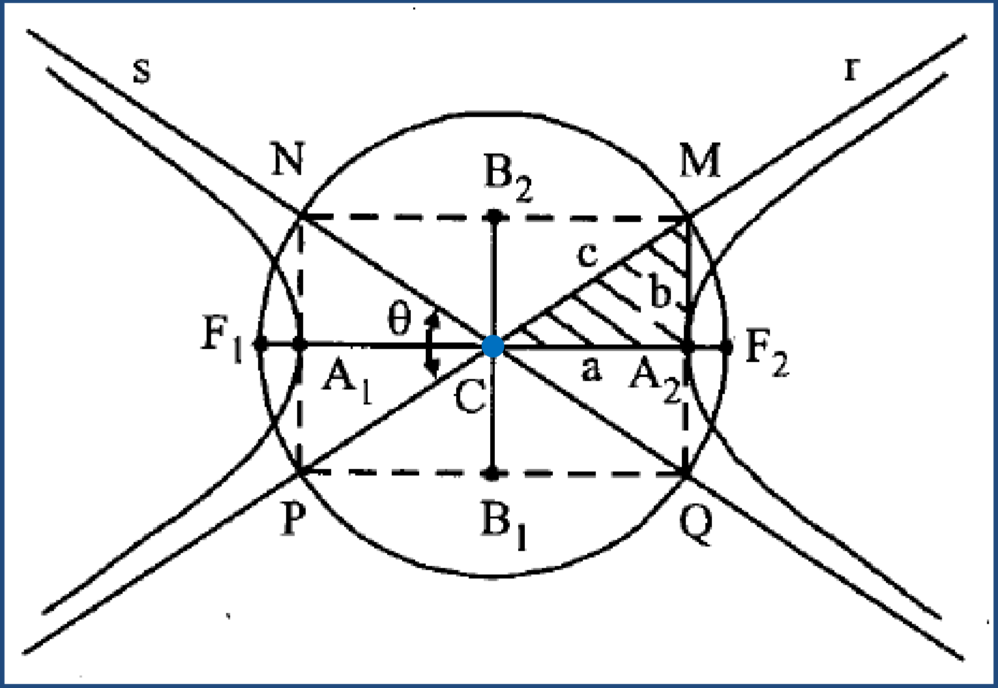
Um ponto P pertence à hipérbole se e somente se:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

ou,

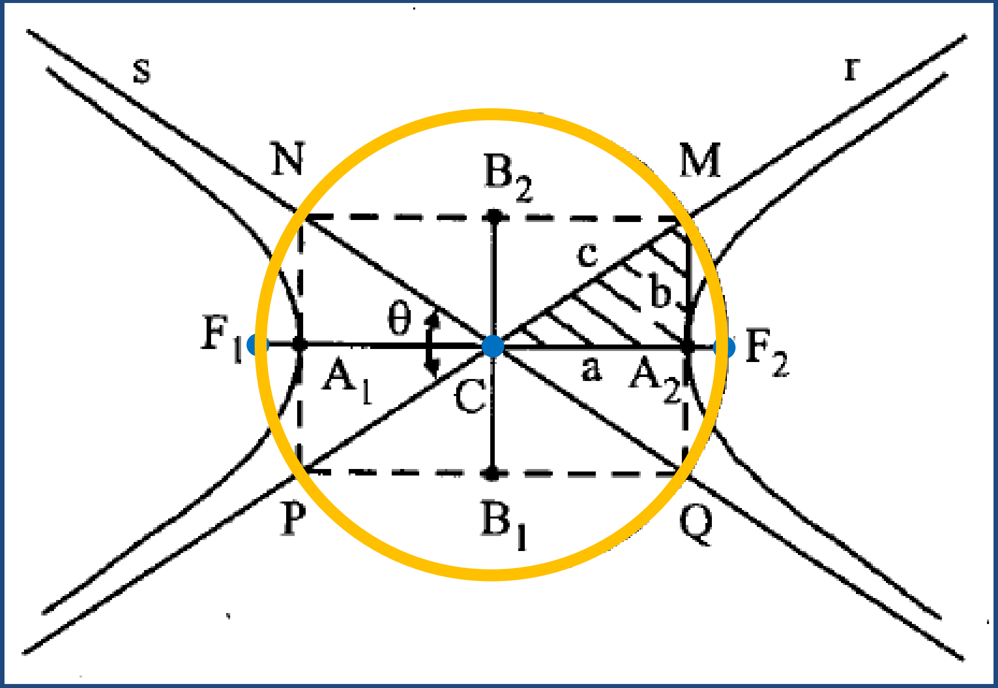
$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

Traçado da hipérbole



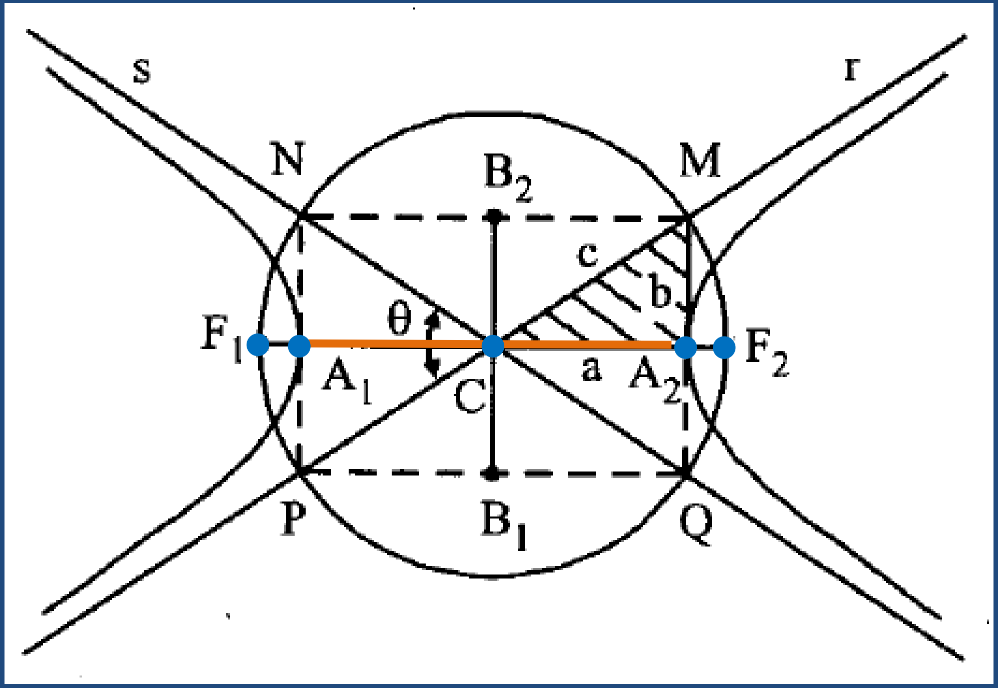
Traçado da hipérbole

1. Construir uma circunferência de raio $\boldsymbol{c}$ que passe pelos dois pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$;



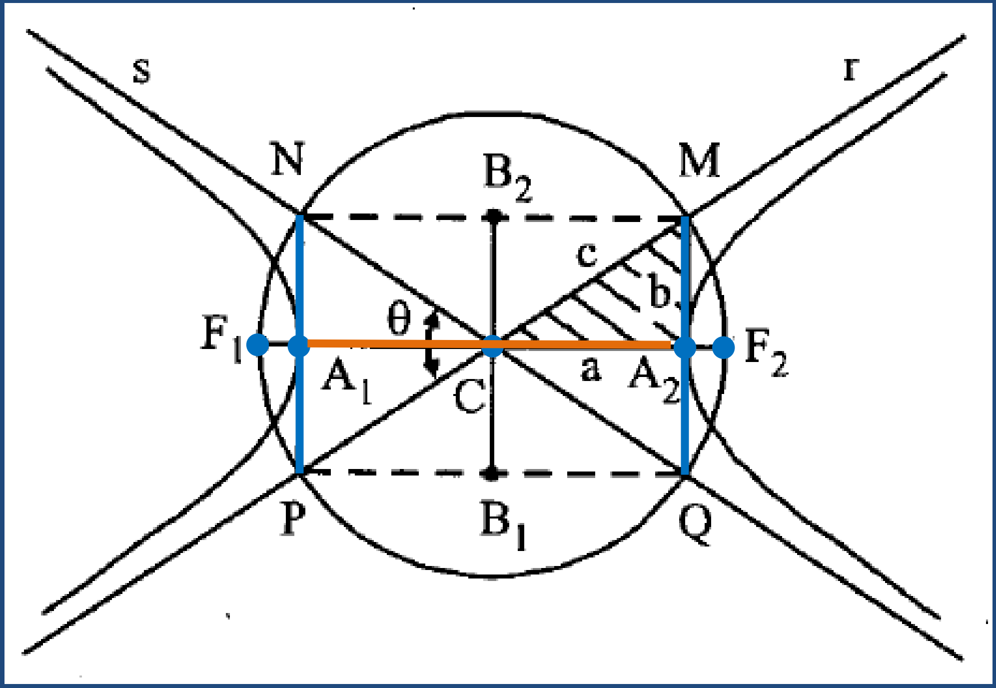
Traçado da hipérbole

1. Construir uma circunferência de raio c que passe pelos dois pontos F_1 e F_2;
2. Marcar dois pontos A_1 e A_2 tal que a distância ao centro seja $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$;



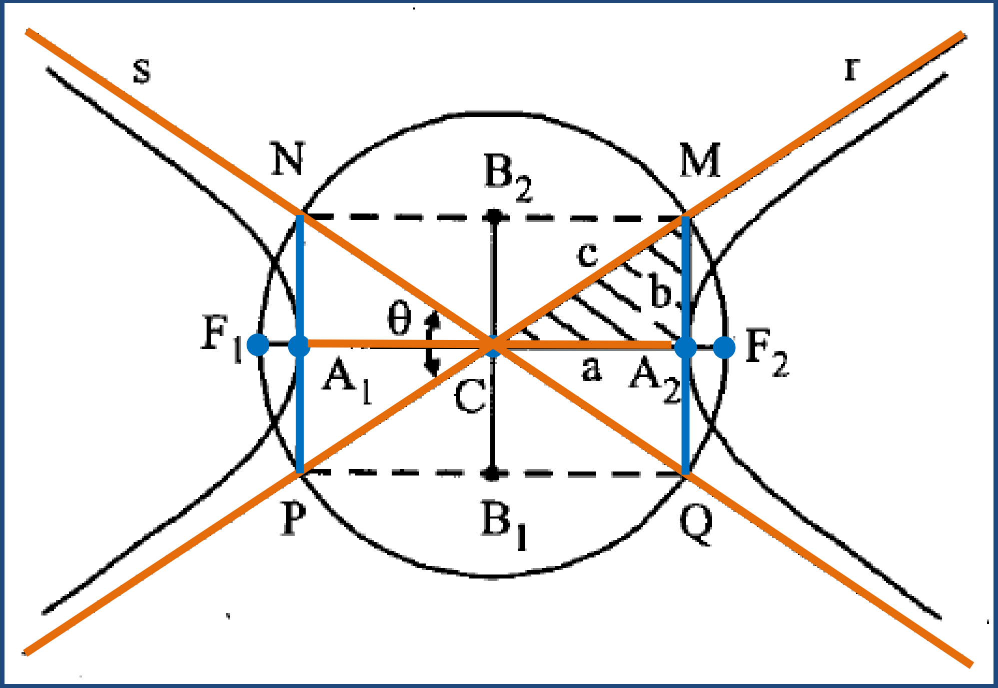
Traçado da hipérbole

1. Construir uma circunferência de raio $\boldsymbol{c}$ que passe pelos dois pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$;
2. Marcar dois pontos $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ tal que a distância ao centro seja $\boldsymbol{d(C, A_1) = d(C, A_2) = a}$;
3. Traçar duas cordas perpendiculares ao diâmetro $\overline{\boldsymbol{F_1 F_2}}$;



Traçado da hipérbole

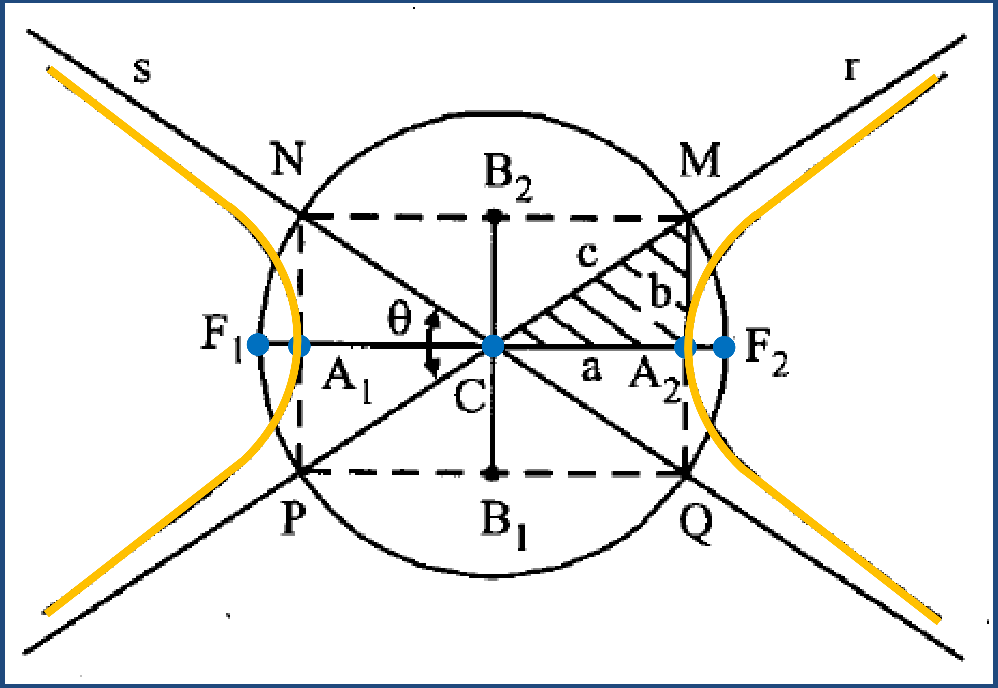
1. Construir uma circunferência de raio $\boldsymbol{c}$ que passe pelos dois pontos $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$;
2. Marcar dois pontos $\boldsymbol{A_1}$ e $\boldsymbol{A_2}$ tal que a distância ao centro seja $\boldsymbol{d(C, A_1) = d(C, A_2) = a}$;
3. Traçar duas cordas perpendiculares ao diâmetro $\overline{\boldsymbol{F_1 F_2}}$;



4. Traçar as diagonais do retângulo PQMN, chamadas retas $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$;

Traçado da hipérbole

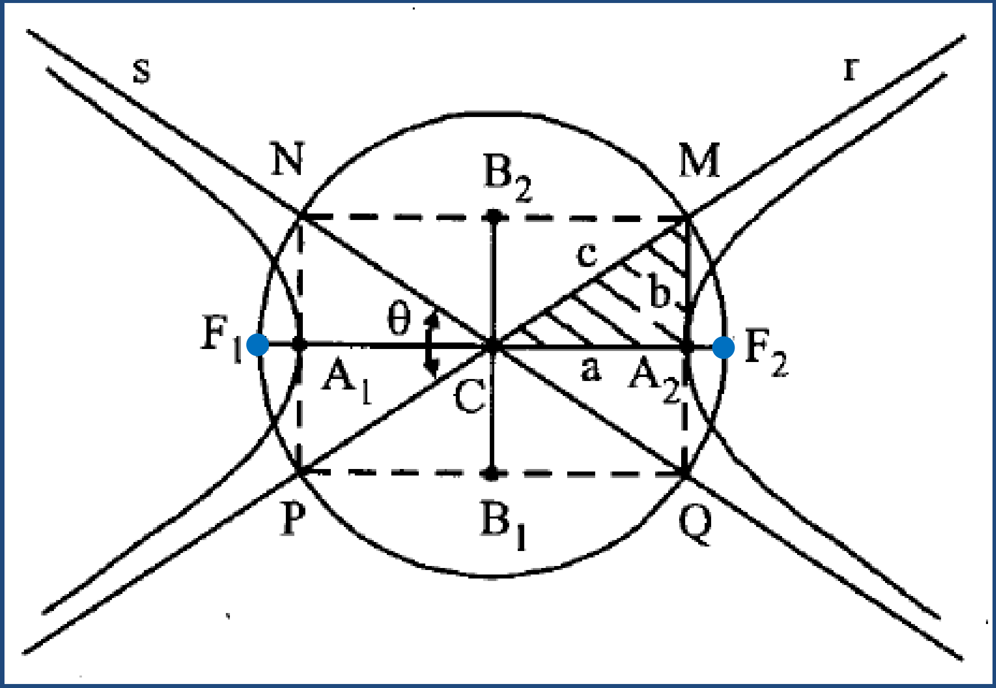
1. Construir uma circunferência de raio c que passe pelos dois pontos F_1 e F_2;
2. Marcar dois pontos A_1 e A_2 tal que a distância ao centro seja $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$;
3. Traçar duas cordas perpendiculares ao diâmetro $\overline{F_1 F_2}$;



4. Traçar as diagonais do retângulo PQMN, chamadas retas r e s;
5. A hipérbole passará pelos vértices A_1, A_2 e tenderá assintoticamente para as retas r e s.

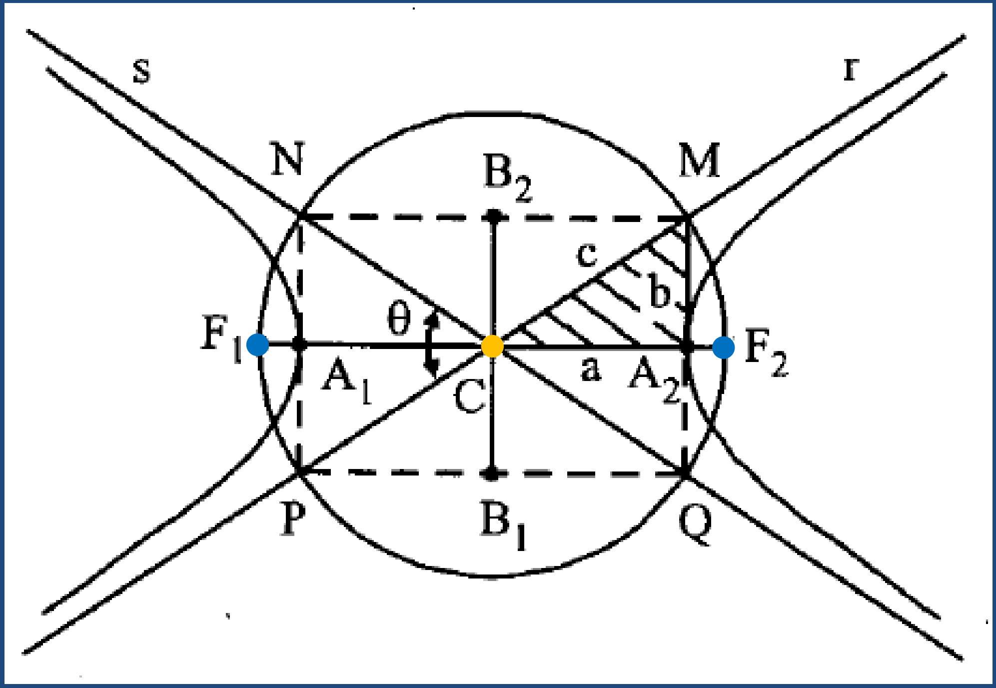
Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2



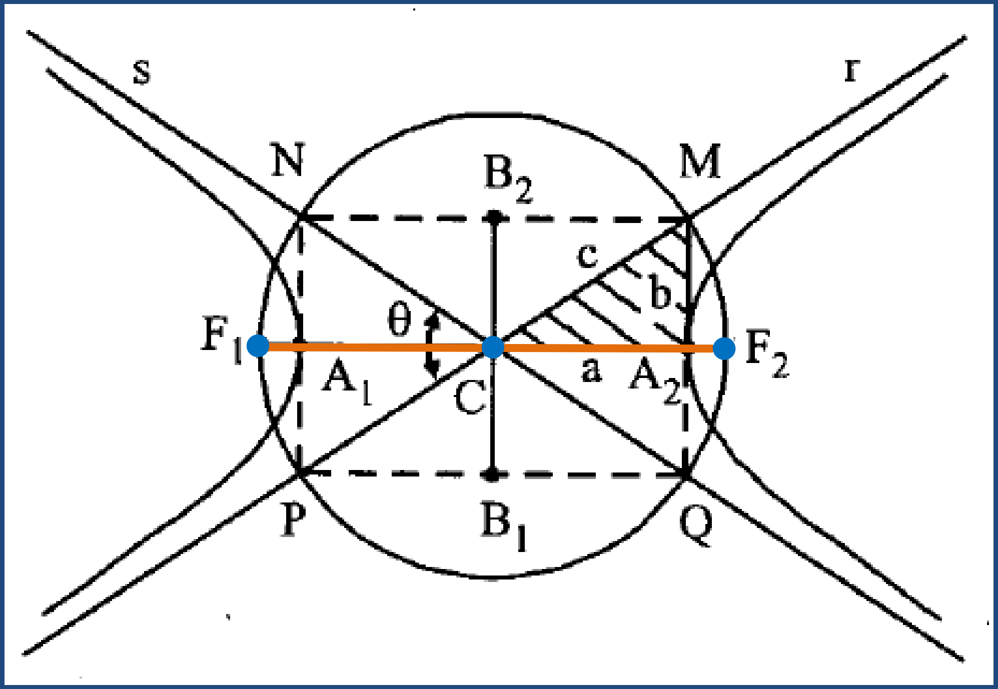
Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C



Elementos da hipérbole

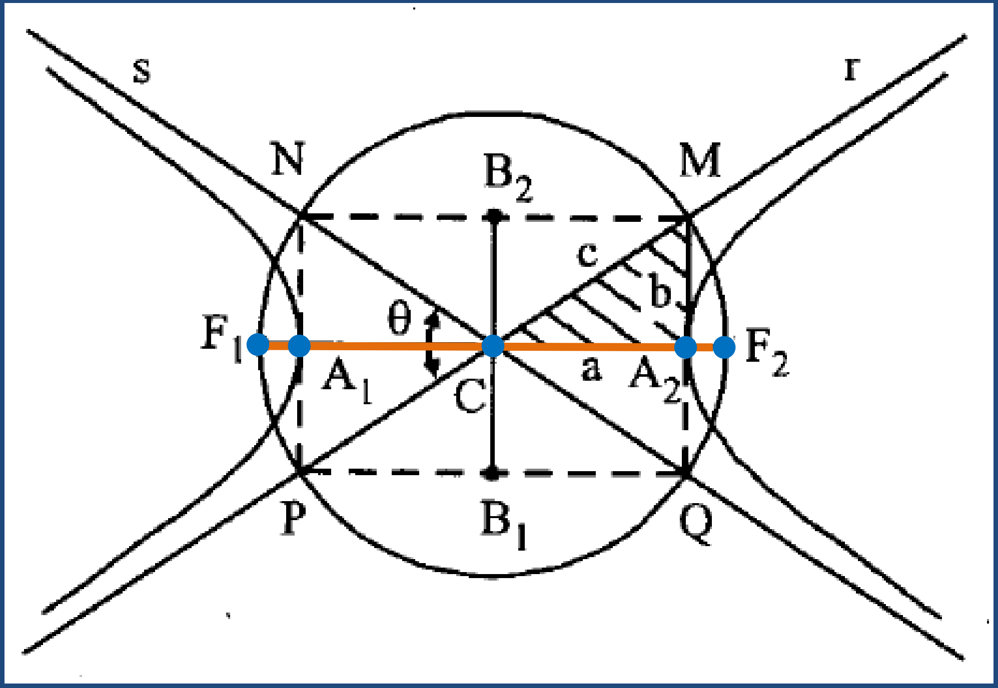
Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1 F_2}| = 2c$



Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

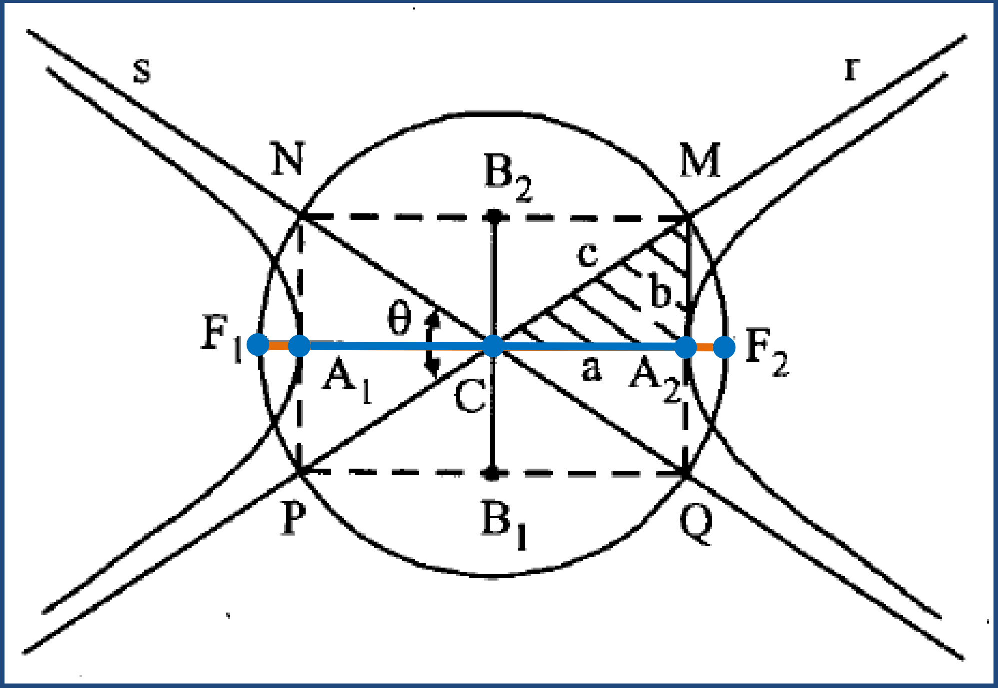
Vértices: A_1 e A_2



Elementos da hipérbole

Focos: F_1 *e* F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Vértices: A_1 *e* A_2 **Eixo Real:** $|\overline{A_1A_2}| = 2a$

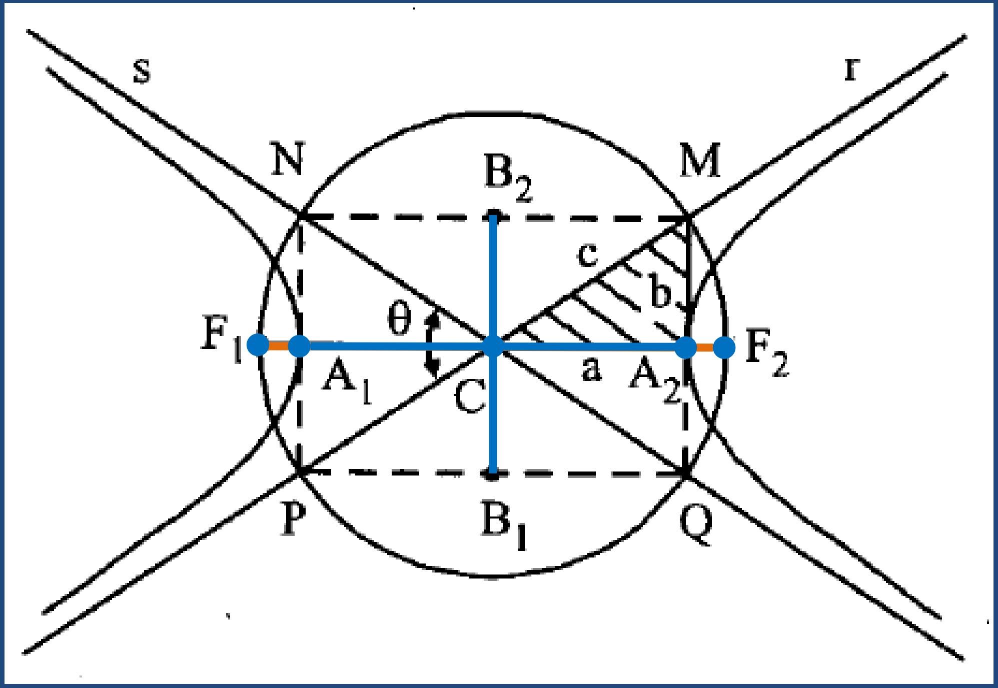


Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Vértices: A_1 e A_2 **Eixo Real:** $|\overline{A_1A_2}| = 2a$

Eixo imaginário: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$

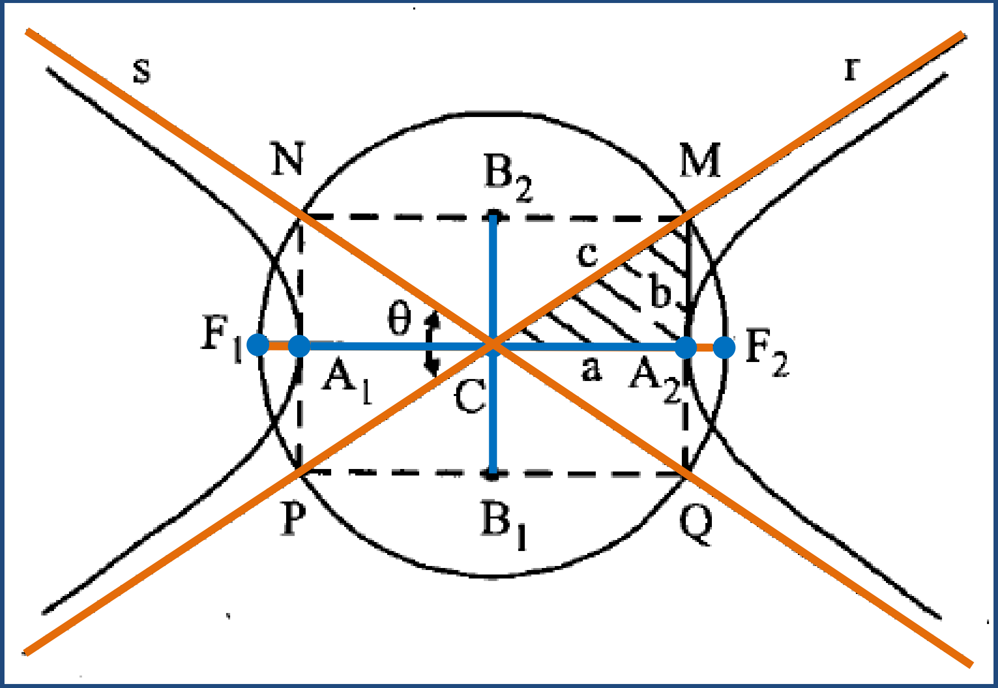


Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Vértices: A_1 e A_2 **Eixo Real:** $|\overline{A_1A_2}| = 2a$

Eixo imaginário: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$ **Assíntotas:** retas r e s

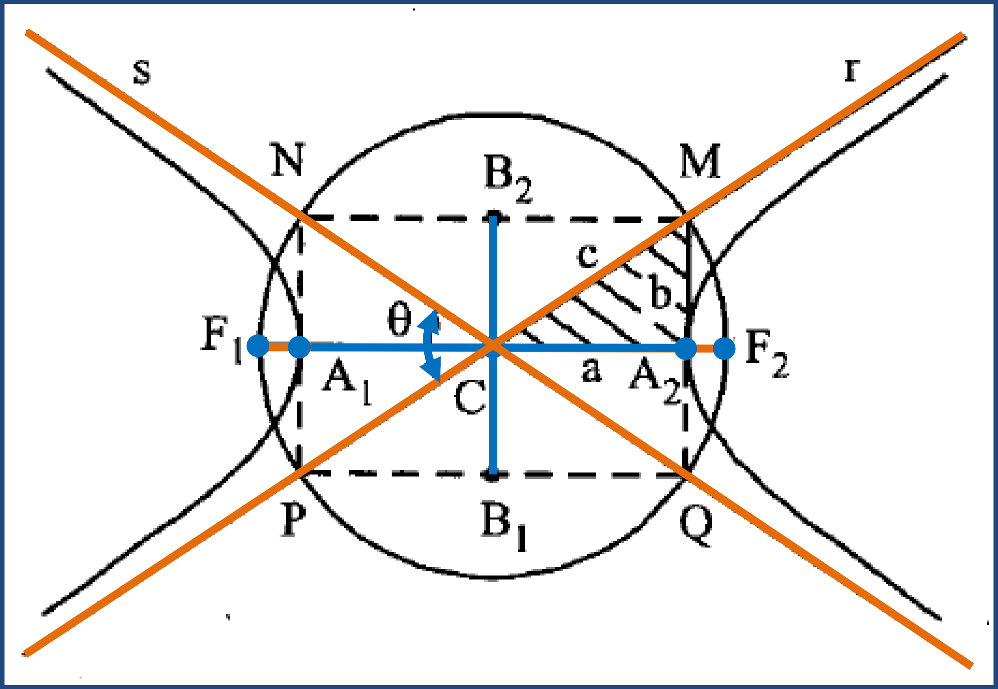


Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Vértices: A_1 e A_2 **Eixo Real:** $|\overline{A_1A_2}| = 2a$

Eixo imaginário: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$ **Assíntotas:** retas r e s



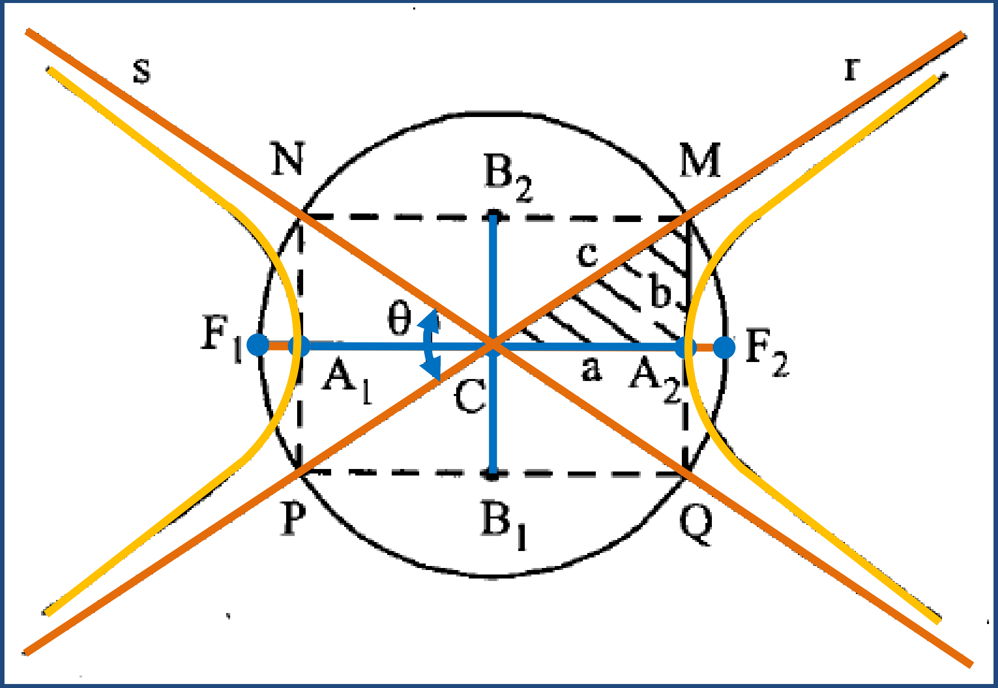
Abertura: ângulo θ

Elementos da hipérbole

Focos: F_1 e F_2 **Centro:** C **Distância Focal:** $|\overline{F_1F_2}| = 2c$

Vértices: A_1 e A_2 **Eixo Real:** $|\overline{A_1A_2}| = 2a$

Eixo imaginário: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$ **Assíntotas:** retas r e s



Abertura: ângulo θ

Excentricidade: $\mathbf{e} = \frac{c}{a}$

Excentricidade da hipérbole

Número real $e > 1$, porque $c > \mathrm{a}$, obtido pela razão:

$$e = \frac{c}{a} \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidade da hipérbole

Número real $e > 1$, porque $c > \mathrm{a}$, obtido pela razão:

$$e = \frac{c}{a} \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

A excentricidade é responsável pela forma da hipérbole.

- **Quanto maior *e*** maior é a excentricidade, ou seja, maior é o ângulo de abertura;

Excentricidade da hipérbole

Número real $\boldsymbol{e > 1}$, porque $\boldsymbol{c > \mathrm{a}}$, obtido pela razão:

$$\boldsymbol{e = \frac{c}{a}} \qquad \boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$$

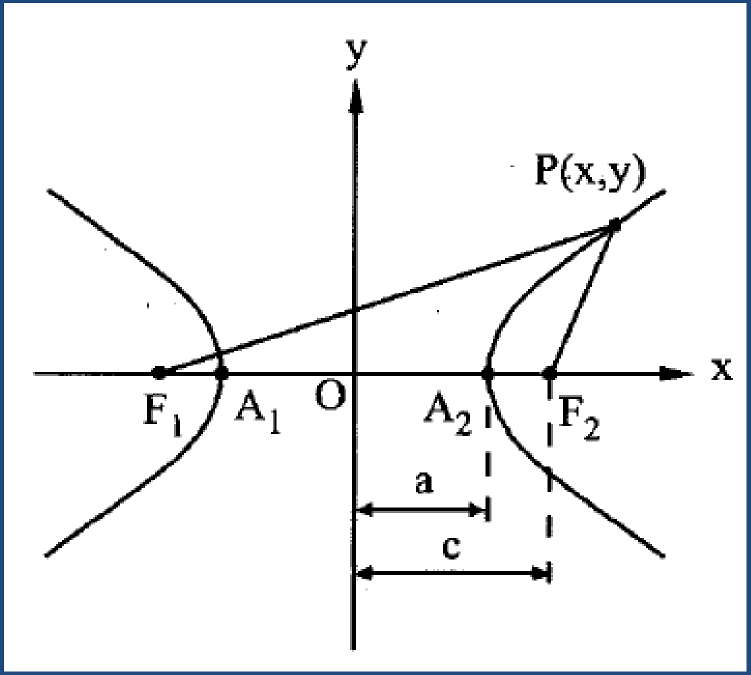
A excentricidade é responsável pela forma da hipérbole.

- **Quanto maior $\boldsymbol{e}$** maior é a excentricidade, ou seja, maior é o ângulo de abertura;
- **Quando $\boldsymbol{a = b}$** as assíntotas são perpendiculares e a hipérbole é equilátera.

Equação reduzida da hipérbole

1º Caso: Eixo real sobre o eixo x.

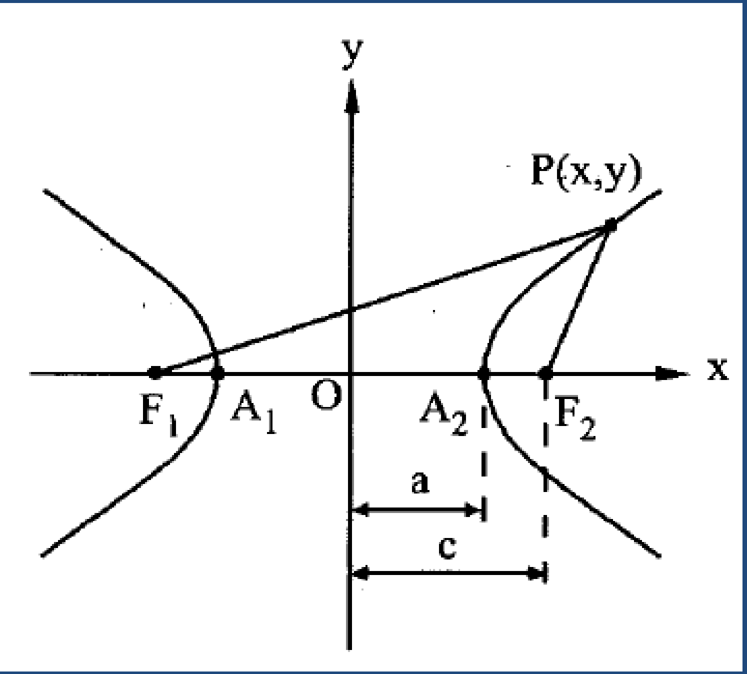
Focos: $\boldsymbol{F_1(-c, 0), F_2(c, 0)}$



Equação reduzida da hipérbole

1º Caso: Eixo real sobre o eixo x.

Focos: $\boldsymbol{F_1(-c,0), F_2(c,0)}$



Pela definição:

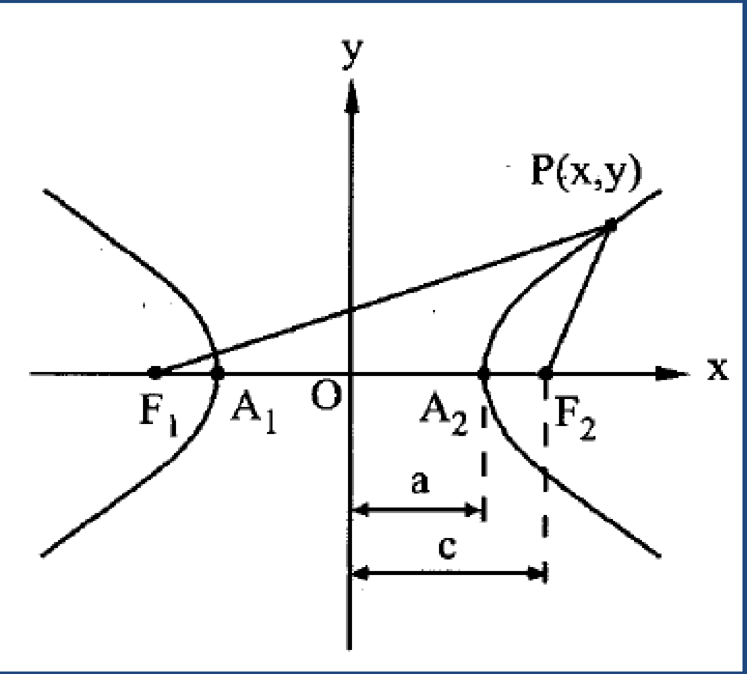
$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$\big|\|[(x,y) - (-c,0)]\| - \|[(x,y) - (c,0)]\|\big| = 2a$$

Equação reduzida da hipérbole

1º Caso: Eixo real sobre o eixo x.

Focos: $F_1(-c,0), F_2(c,0)$



Pela definição:

$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$

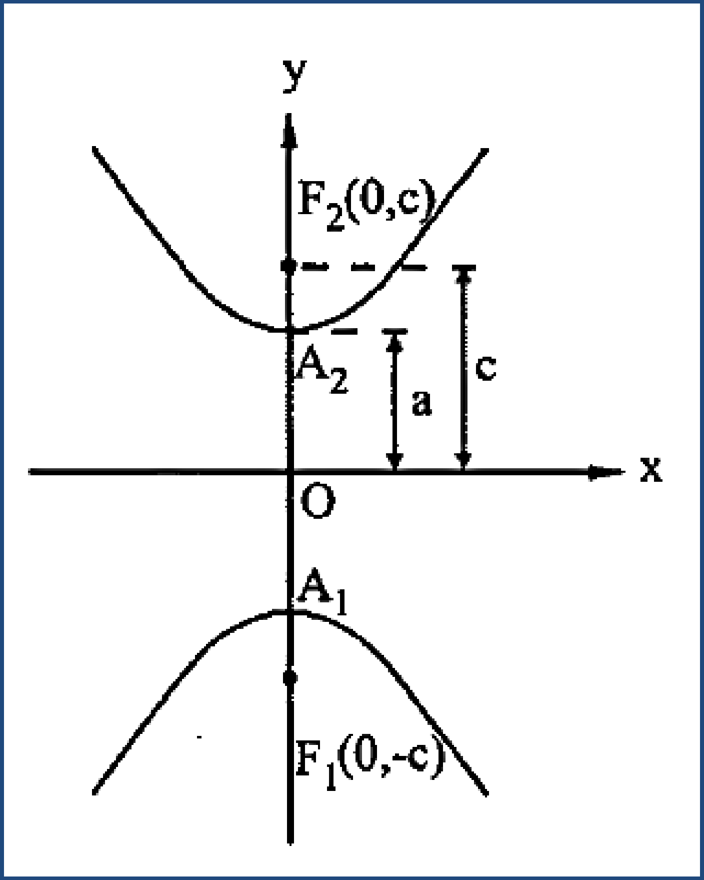
$$\big|\,\|[(x,y)-(-c,0)]\| - \|[(x,y)-(c,0)]\|\,\big| = 2a$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equação reduzida da hipérbole

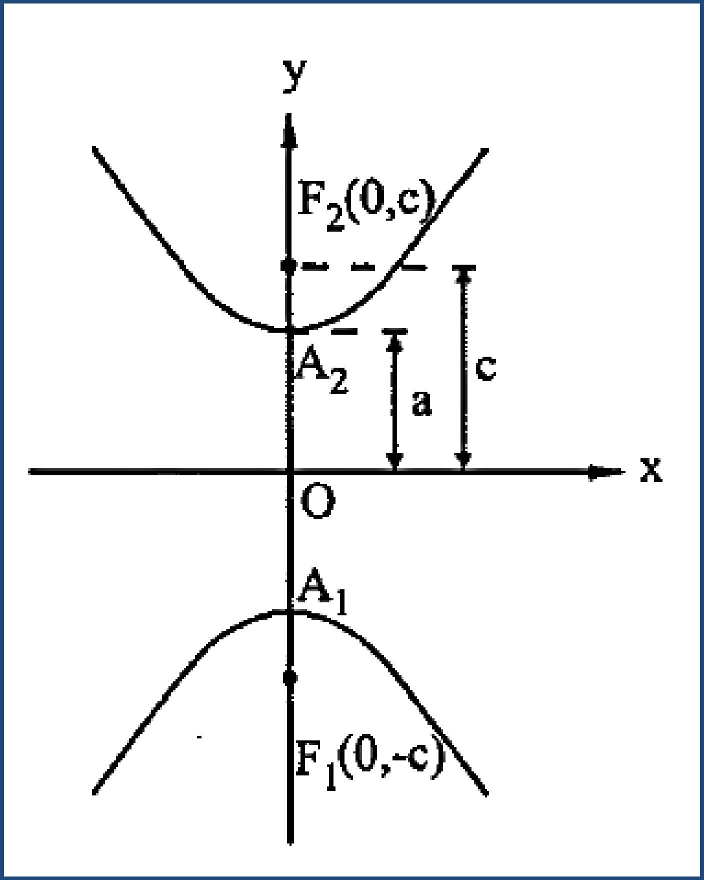
2º Caso: Eixo real sobre o eixo y.

Foco: $\boldsymbol{F_1(0,-c)}$ e $\boldsymbol{F_2(0,c)}$



Equação reduzida da hipérbole

2º Caso: Eixo real sobre o eixo y.



Foco: $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$

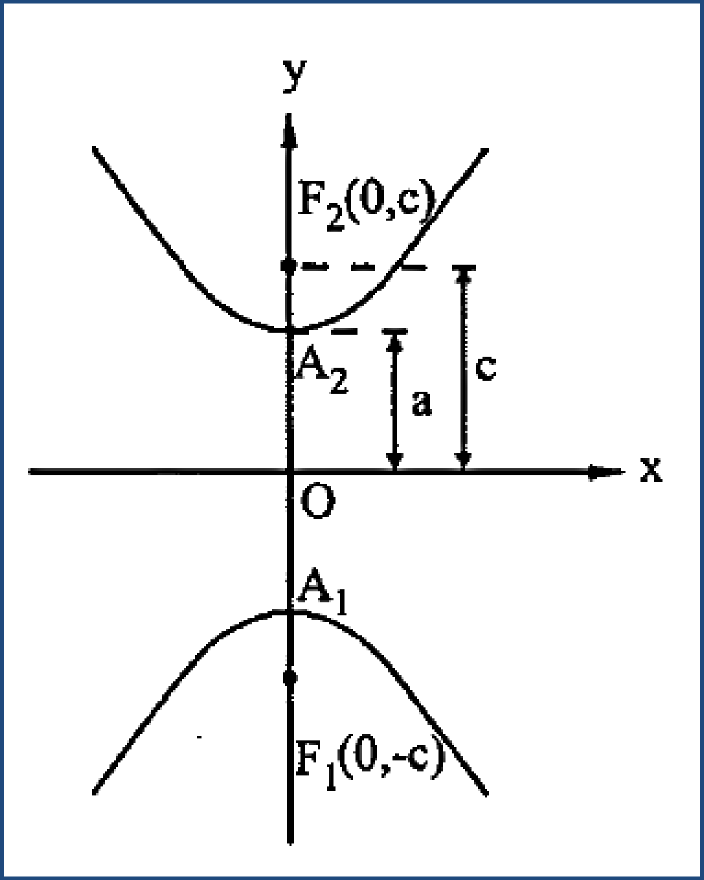
Pela definição:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

Equação reduzida da hipérbole

2º Caso: Eixo real sobre o eixo y.

Foco: $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$



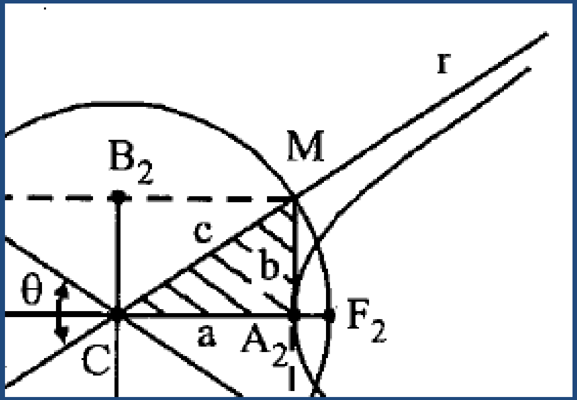
Pela definição:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

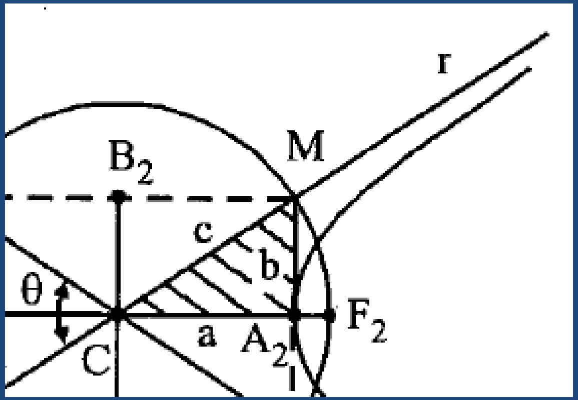
Como identificar o eixo real?

Na representação da hipérbole $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são os catetos do triângulo retângulo. Assim,



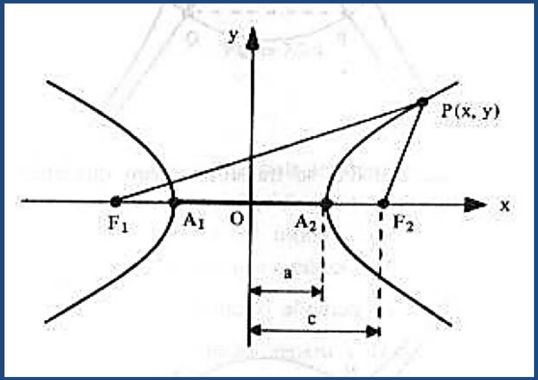
Como identificar o eixo real?

Na representação da hipérbole a e b são os catetos do triângulo retângulo. Assim,



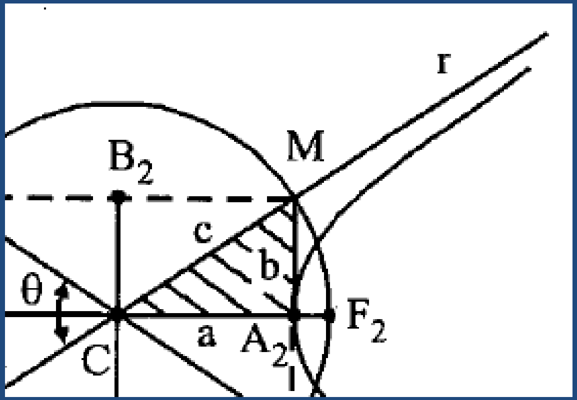
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eixo real



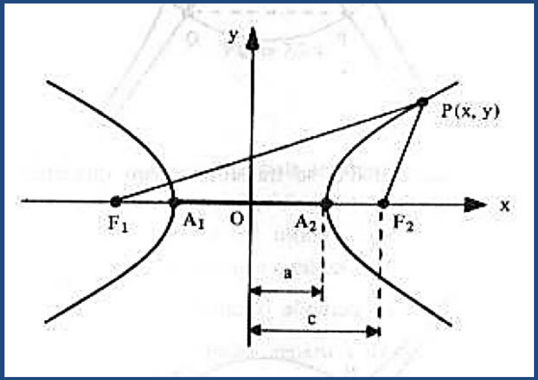
Como identificar o eixo real?

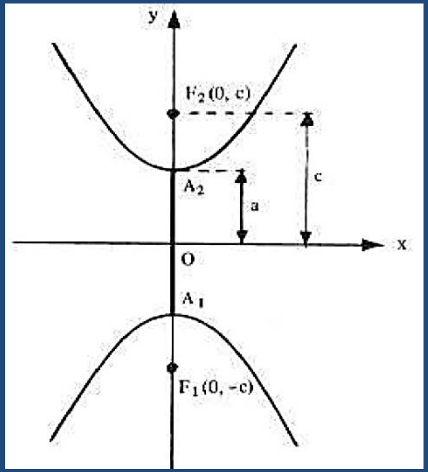
Na representação da hipérbole a e b são os catetos do triângulo retângulo. Assim,



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Eixo real





Exemplo 1

Dada a hipérbole $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$ Determinar:
a) Medida dos semi-eixos; b) esboço do gráfico; c) os focos; d) os vértices; e) a excentricidade; f) as equações das assíntotas.

Translação de eixos

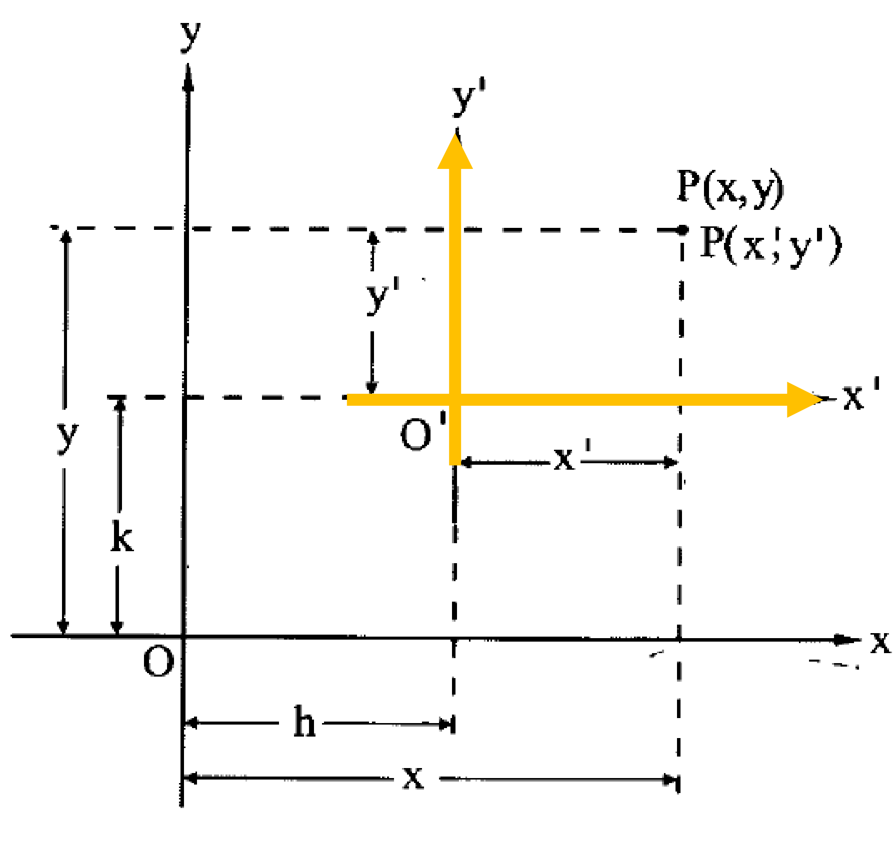


Figura 8.15

- $\boldsymbol{P(x, y)}$ plano $\boldsymbol{xoy}$;
- $\boldsymbol{P(x', y')}$ plano $\boldsymbol{x'oy'}$;
- Da figura:

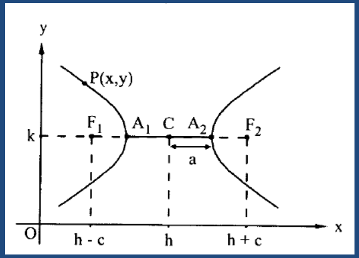
$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Relações de transformação

Equação da hipérbole deslocada

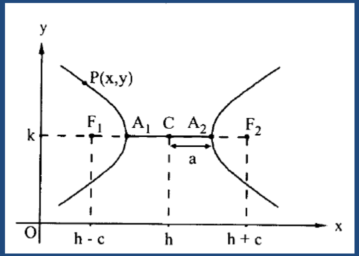
<u>**Caso 1:**</u> Eixo real || x.



$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Equação da hipérbole deslocada

Caso 1: Eixo real || x.



$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

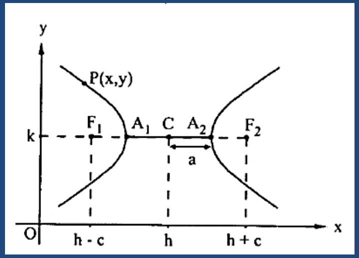
No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

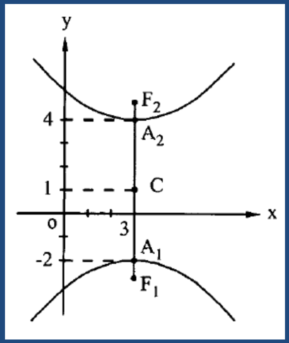
Equação da hipérbole deslocada

Caso 1: Eixo real || x.



$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Caso 2: Eixo real || y.



$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

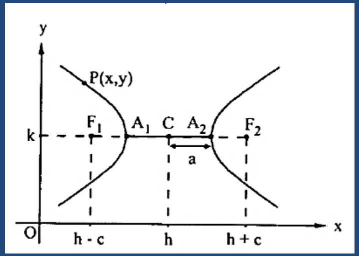
No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Equação da hipérbole deslocada

Caso 1: Eixo real || x.



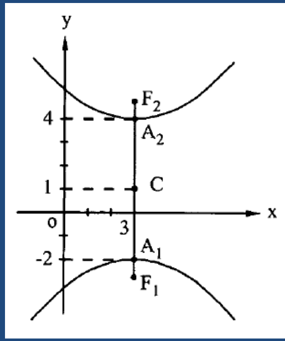
$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Caso 2: Eixo real || y.



$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

No sistema x0y:

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

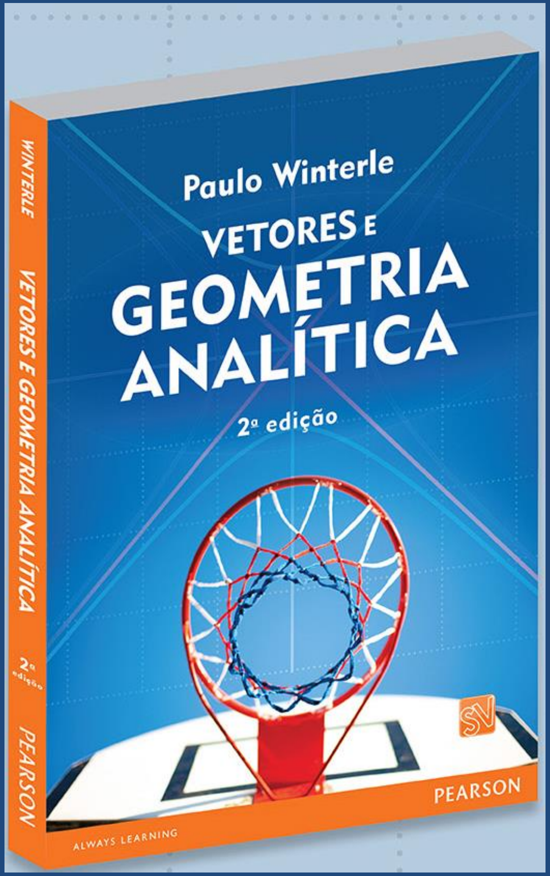
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Exercício

Determinar a equação da hipérbole de vértices: $A_1(1, -2)$ e $A_2(5, -2)$, sabendo que $F(6, -2)$ é um dos focos.

Resp.: $5x^2 - 4y^2 - 30x - 16y + 9 = 0$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br