Cálculo I

Engenharia

Aula 12
A função derivada

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Nos estudos anteriores

- Mostramos que se o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$

Existe, podemos interpretá-lo como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(\mathrm{x})$ no ponto $x = \boldsymbol{x_o}$;

Nos estudos anteriores

- Mostramos que se o limite:

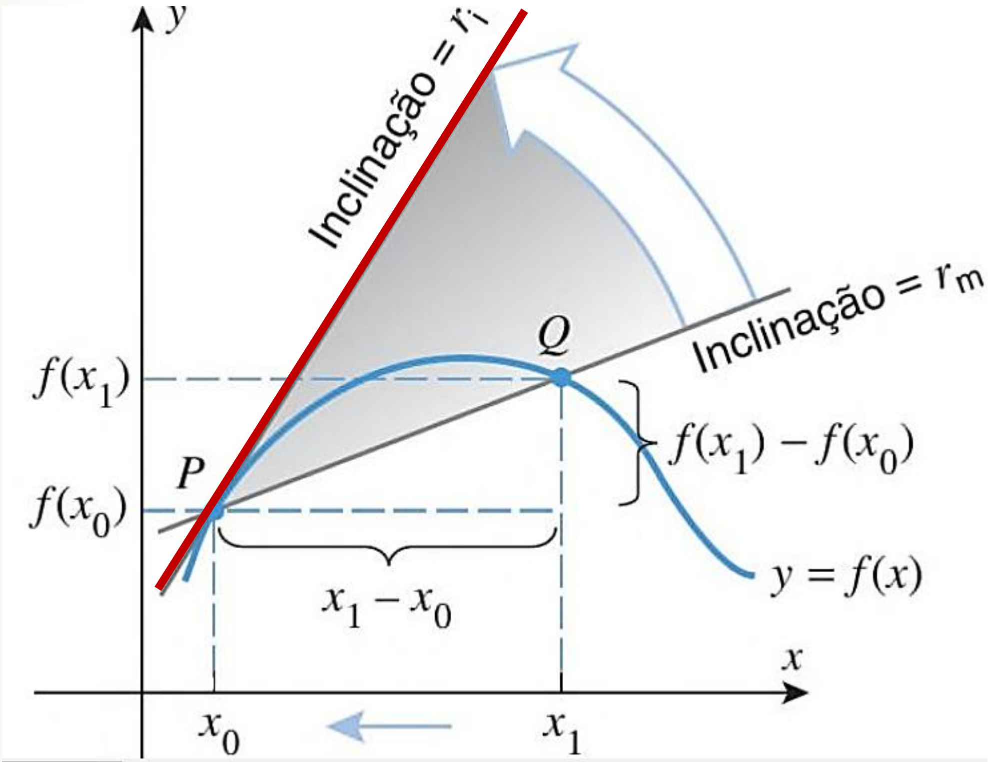
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$

Existe, podemos interpretá-lo como a inclinação da reta tangente à curva $y = f(\mathrm{x})$ no ponto $x = \boldsymbol{x_o}$;

- Também esse limite indica a taxa de variação instantânea de y em relação a x em $x = \boldsymbol{x_o}$.

Nos estudos anteriores

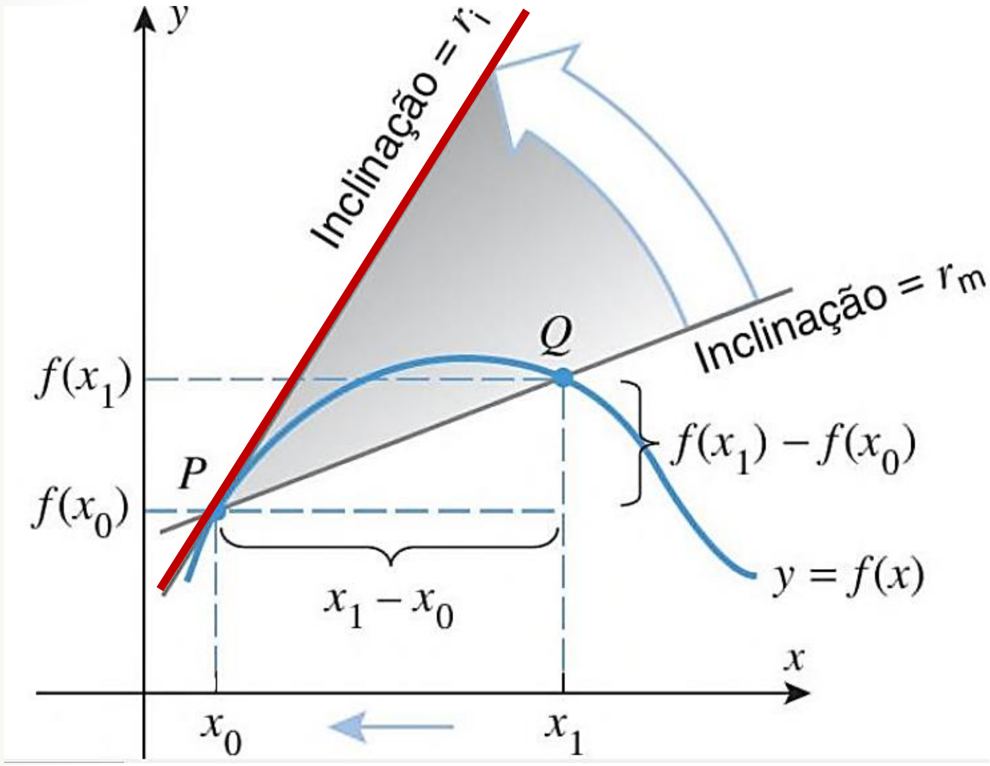
$$r_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Nos estudos anteriores

$$r_i = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_o)}{h}$$



- Esse limite é tão relevante para o Cálculo que recebe uma notação especial.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A função derivada

2.2.1 DEFINIÇÃO A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

é denominada ***derivada de f em relação a x***. O domínio de f' consiste em todos os x do domínio de f com os quais existe o limite.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A função derivada

2.2.1 DEFINIÇÃO A função f' definida pela fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

é denominada ***derivada de f em relação a x***. O domínio de f' consiste em todos os x do domínio de f com os quais existe o limite.

O **termo "derivada"** é usado porque a função f' deriva da função f por meio do limite.

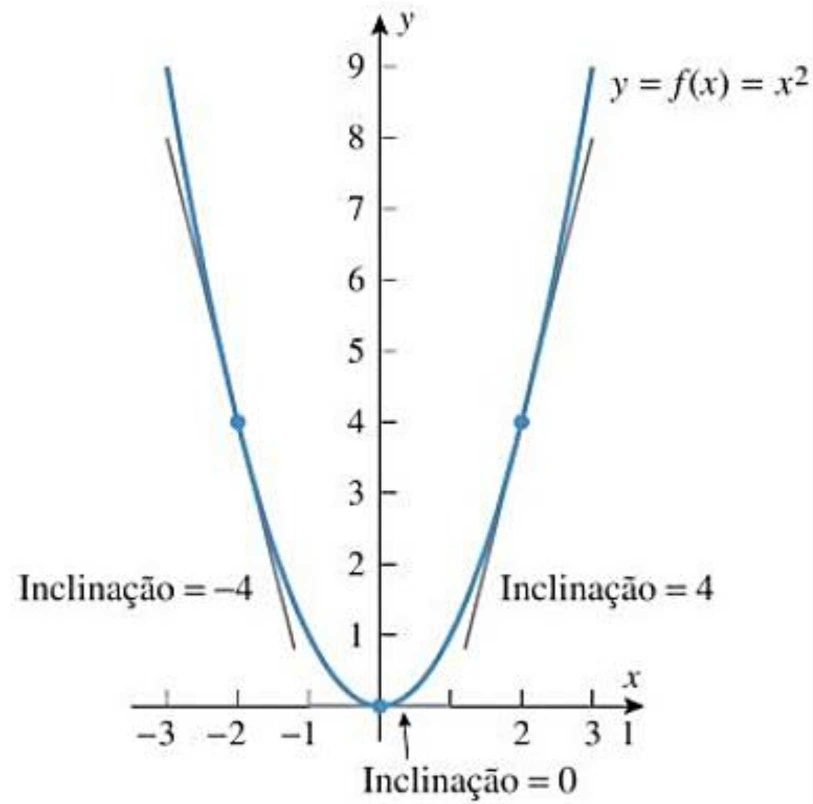
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Encontrar a derivada em relação a x de $f(x) = x^2 + 1$ e use-a para encontrar a equação da reta tangente a curva no ponto $x = 2$.

A função derivada

- Podemos pensar em *f'* como uma função que produz inclinações.

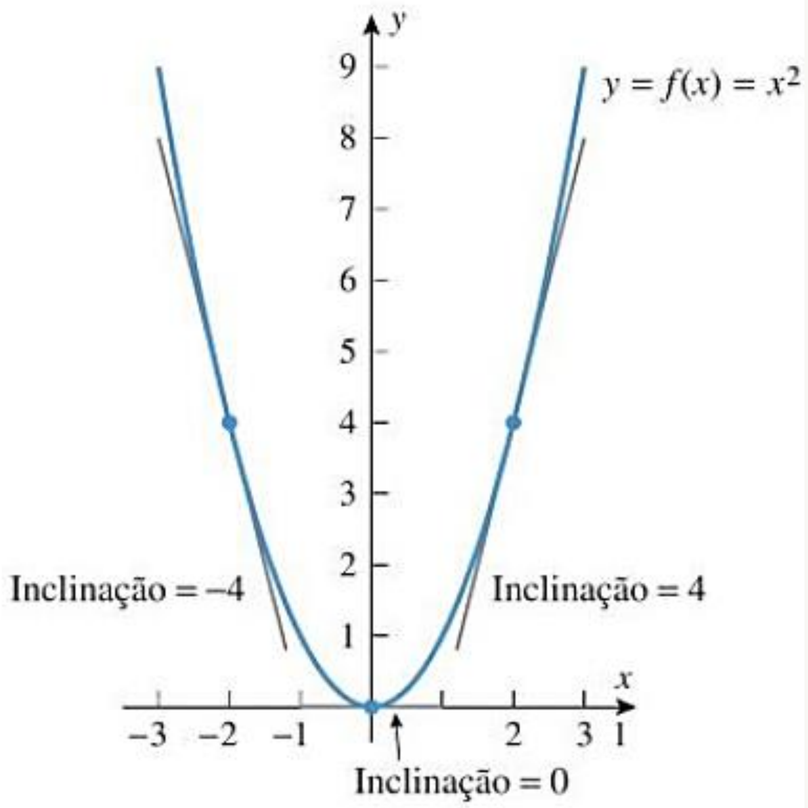


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A função derivada

- Podemos pensar em f' como uma função que produz inclinações.

- Do exemplo 1, $f' = 2x$ nos pontos $x = -2$; $x = 0$ e $x = 2$ correspondem às inclinações das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ nesses valores.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A função derivada e reta tangente

- A fórmula da **reta tangente** ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_o, f(x_o))$ poderá ser redefinida por:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

A função derivada e reta tangente

Encontrando a Equação da Reta Tangente a $y = f(x)$ em $x = x_0$.

Passo 1. Calcule $f(x_0)$; o ponto de tangência é $(x_0, f(x_0))$.

Passo 2. Encontre $f'(x)$ e calcule $f'(x_0)$, que é a inclinação m da reta.

Passo 3. Substitua o valor da inclinação m e o ponto $(x_0, f(x_0))$ na forma ponto-inclinação da reta

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

ou, equivalente, por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 2

Seja a função $f(x) = x^3 - x$

(a) Encontrar a derivada em relação a x;

(b) Fazer o esboço dos gráficos de f e f'.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 2

Seja a função $f(x) = x^3 - x$

(a) Encontrar a derivada em relação a x;

(b) Fazer o esboço dos gráficos de f e f'.

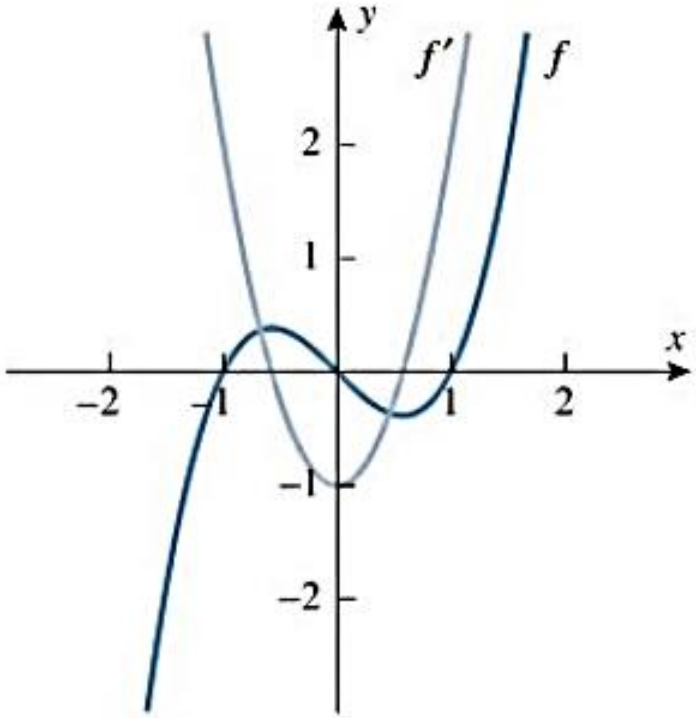


Figura 2.2.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 2

Seja a função $f(x) = x^3 - x$

(a) Encontrar a derivada em relação a x;

(b) Fazer o esboço dos gráficos de f e f'.

- Nota-se que $f'(x)$ é **positiva** onde a reta tangente a $f(x)$ tem inclinação positiva;

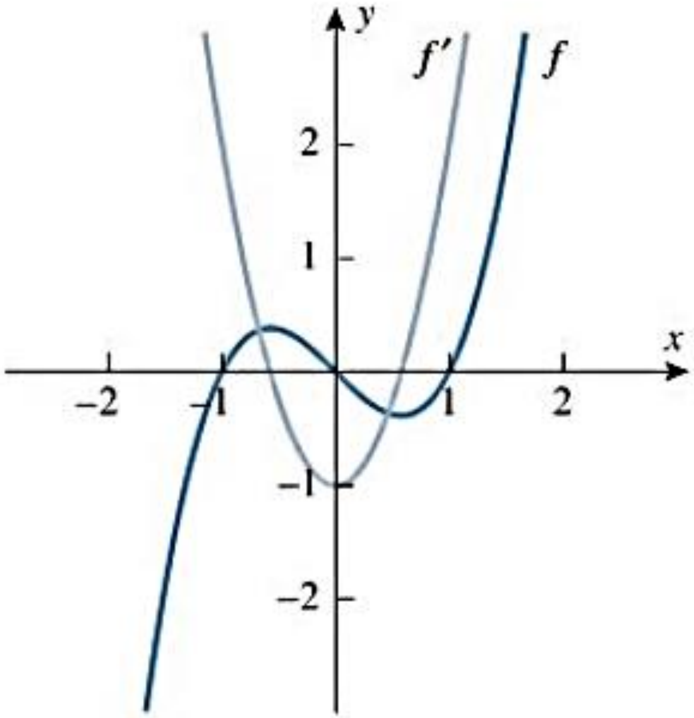


Figura 2.2.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 2

Seja a função $f(x) = x^3 - x$

(a) Encontrar a derivada em relação a x;

(b) Fazer o esboço dos gráficos de f e f'.

- Nota-se que $f'(x)$ é **positiva** onde a reta tangente a $f(x)$ tem inclinação positiva;

- E $f'(x)$ é negativa onde a reta tangente a $f(x)$ tem inclinação negativa.

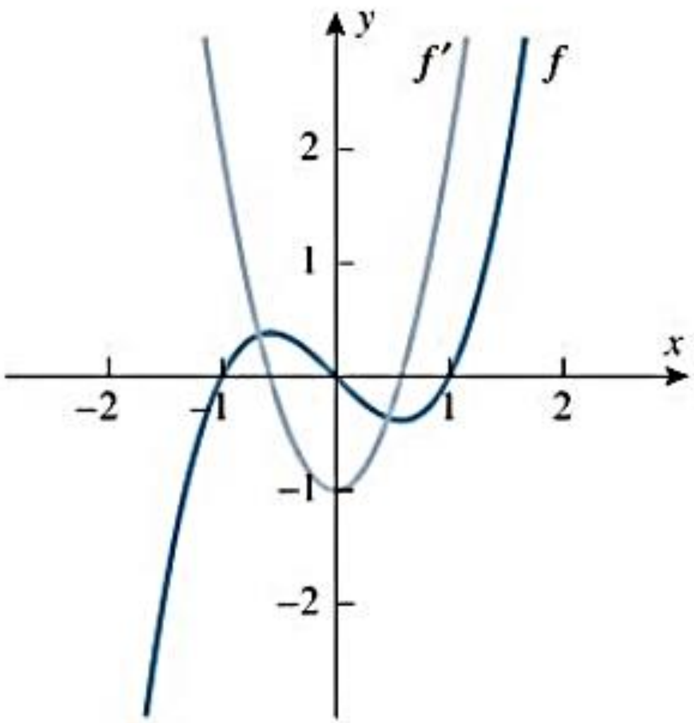


Figura 2.2.3

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciabilidade

2.2.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***diferenciável*** ou ***derivável em*** $\boldsymbol{x_0}$ se existir o limite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

Se f for diferenciável em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então diremos que a função é ***diferenciável em*** $\boldsymbol{(a, b)}$ e, analogamente, em intervalos abertos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Nesse último caso, dizemos que f é ***diferenciável em toda parte.***

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciabilidade

2.2.2 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f é ***diferenciável*** ou ***derivável em*** x_0 se existir o limite

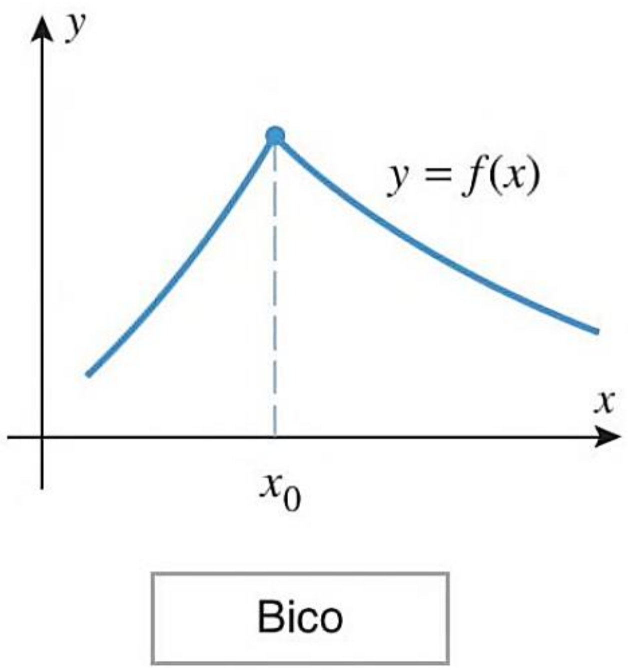
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

Se f for diferenciável em cada ponto do intervalo aberto (a, b), então diremos que a função é ***diferenciável em*** (a, b) e, analogamente, em intervalos abertos da forma $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e $(-\infty, +\infty)$. Nesse último caso, dizemos que f é ***diferenciável em toda parte.***

Se **não existir o limite no ponto**, então a função f **não é** diferenciável.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

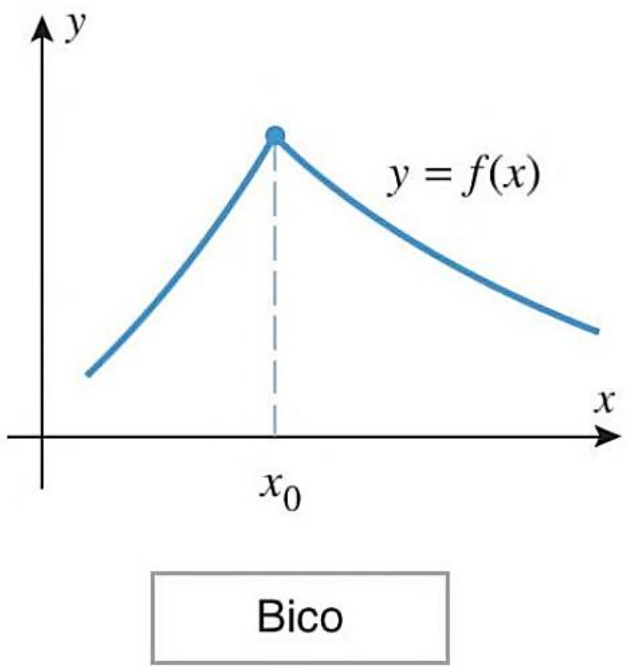
Algumas funções não diferenciáveis

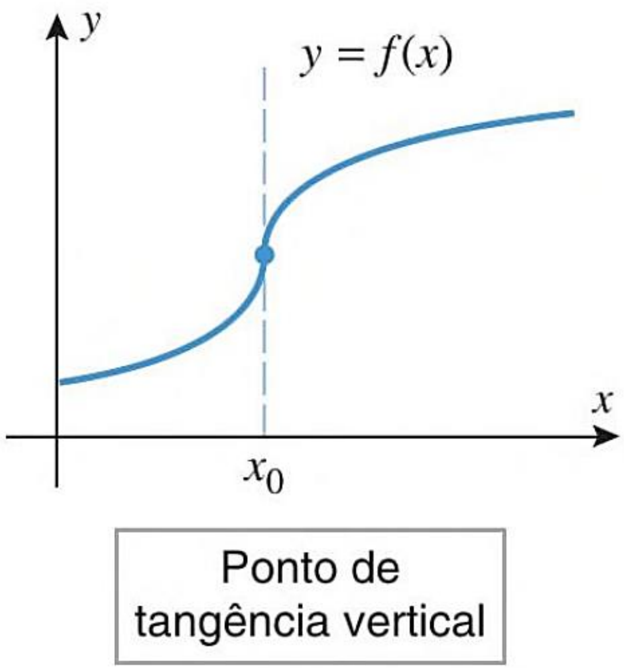


Inclinações das retas secante com limites diferentes

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Algumas funções não diferenciáveis



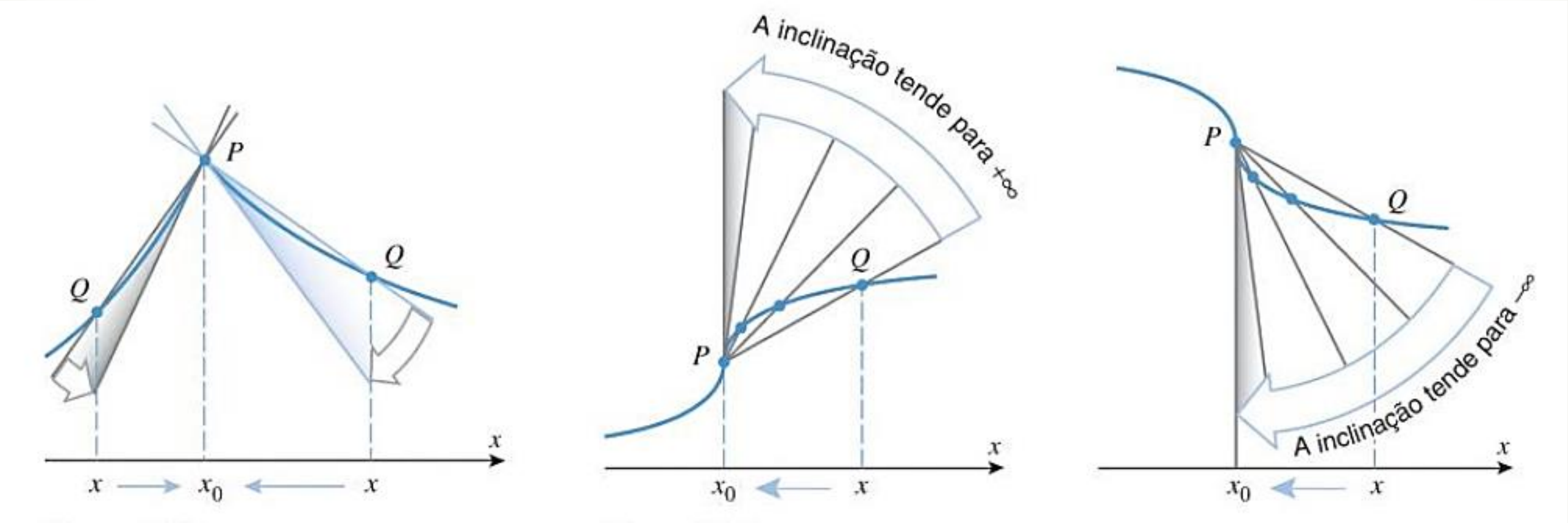


Inclinações das retas secante com limites diferentes

Inclinações das retas secante tendem a $+\infty$ (ou $-\infty$)

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Algumas funções não diferenciáveis



Inclinações das retas secante com limites diferentes

Inclinações das retas secante tendem a $+\infty$ e $-\infty$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciabilidade e continuidade

2.2.3 TEOREMA *Se f for diferenciável no ponto x_0, então f será contínua em x_0.*

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

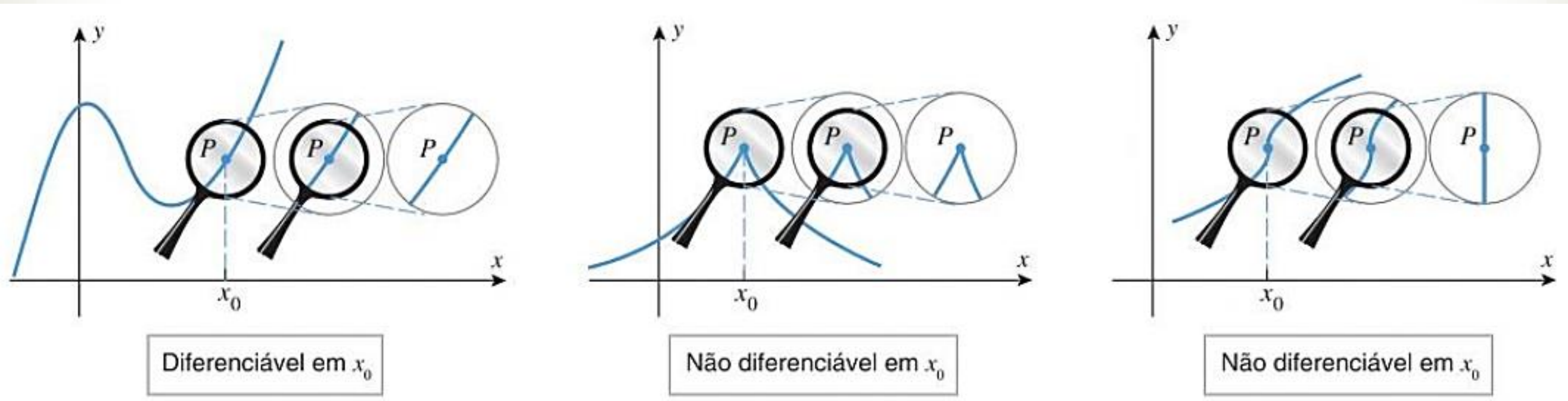
Diferenciabilidade e continuidade

2.2.3 TEOREMA *Se f for diferenciável no ponto x_0, então f será contínua em x_0.*

Se a função f **não é contínua em** x_0, então f **não é** diferenciável **em** x_0.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciabilidade e continuidade



Se f é diferenciável em x_0, então ampliações em torno desse ponto se aproximam de uma reta não vertical.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Outras notações de derivada

Derivação: operação sobre funções que associa a função $\boldsymbol{f'}$ a função $\boldsymbol{f}$;

- Se a variável independente for $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{y = f(x)}$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = D_x[f(x)] = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Outras notações de derivada

Derivação: operação sobre funções que associa a função $\boldsymbol{f'}$ a função $\boldsymbol{f}$;

- Se a variável independente for $\boldsymbol{x}$ em $\boldsymbol{y = f(x)}$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = D_x[f(x)] = y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

- O valor da derivada no ponto x_0 será:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx}[f(x)]|_{x=x_0} = D_x[f(x)]|_{x=x_0} = y'(x_0) = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$$

Incremento

- Se a variável $\boldsymbol{x}$ muda de um valor inicial $\boldsymbol{x_o}$ para algum valor final $\boldsymbol{x_1}$, então a diferença entre o valor final e inicial é chamado **incremento**.

$$\Delta x = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_o}$$

Incremento

- Se a variável $\boldsymbol{x}$ muda de um valor inicial $\boldsymbol{x_o}$ para algum valor final $\boldsymbol{x_1}$, então a diferença entre o valor final e inicial é chamado **incremento**.

$$\boxed{\Delta x = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_o}}$$

- Na expressão da função derivada:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Incremento

- Devemos ajustar a notação da derivada de acordo com as letras de outras grandezas;

- Por exemplo, se $S = f(t)$, espaço em função do tempo:

Incremento

- Devemos ajustar a notação da derivada de acordo com as letras de outras grandezas;

- Por exemplo, se $S = f(t)$, espaço em função do tempo:

$$v(t) = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Técnicas de diferenciação

1 – Derivada de uma constante (c)

Se $f(x) = c$ a sua derivada é:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

$$f'(x) = \frac{d[c]}{dx} = 0$$

1 – Derivada de uma constante (c)

2.3.1 TEOREMA *A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \tag{1}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

1 – Derivada de uma constante (c)

2.3.1 TEOREMA *A derivada de uma função constante é 0; isto é, se c for um número real qualquer, então*

$$\frac{d}{dx}[c] = 0 \tag{1}$$

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}[1] = 0$$

$$\frac{d}{dx}[-3] = 0$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA **(*Regra da Potência*)** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

2 – Derivada de potências de x (x^n)

2.3.2 TEOREMA ***(Regra da Potência)*** *Se n for um número inteiro positivo, então*

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1} \tag{5}$$

Esta regra pode ser ampliada para qualquer potência real $\boldsymbol{r}$.

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}[x^2] =$$

$$\frac{d}{dx}[x^3] =$$

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA (Regra do Múltiplo Constante) *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

3 – Constante vezes a função $(cf(x))$

2.3.4 TEOREMA ***(Regra do Múltiplo Constante)*** *Se f for diferenciável em x e c for um número real qualquer, então cf também será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{8}$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}[4x^8] =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f+g$ e $f-g$ também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas*, e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

4 – Regra da soma e da diferença

2.3.5 TEOREMA ***(Regras da Soma e da Diferença)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então $f+g$ e $f-g$ também o serão e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)] \tag{10}$$

Em palavras, *a derivada de uma soma é igual à soma das derivadas*, e *a derivada de uma diferença é igual à diferença das derivadas.*

Exemplo: $\dfrac{d}{dx}[2x^6 + x^{-9}] =$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA (Regra do Produto) *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \qquad (1)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

5 – Regra do produto $\left(\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]\right)$

2.4.1 TEOREMA ***(Regra do Produto)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x, então o produto $f \cdot g$ também será e*

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] \tag{1}$$

Exemplos:

$$\frac{d}{dx}[(4x^2 - 1)(7x^3 + x)] =$$

$$\frac{d}{dx}[(1 + t)\sqrt{t}\,] =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6 – Regra do quociente$\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

2.4.2 TEOREMA ***(Regra do Quociente)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então f/g será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \tag{2}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

6 – Regra do quociente$\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)$

2.4.2 TEOREMA ***(Regra do Quociente)*** *Se f e g forem diferenciáveis em x e $g(x) \neq 0$, então f/g será diferenciável em x e*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2} \qquad (2)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2-1}{x^4+1}\right] =$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Resumo das regras de derivação

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
$(cf)' = cf'$	$(f-g)' = f' - g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$	$\frac{d}{dx}[x^r] = rx^{r-1}$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Derivada de ordem superior $(f''(x), f'''(x))$

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Derivada de ordem superior $(f''(x), f'''(x))$

$$f', \quad f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{(4)} = (f''')', f^{(5)} = (f^{(4)})', \ldots$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x)]\right] = \frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]\right] = \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Para depois desta aula:

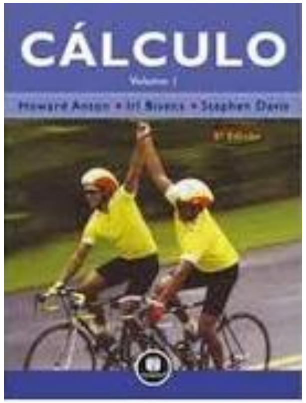
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

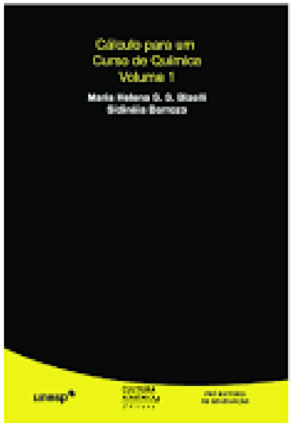
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br