Geometria Analítica
Engenharias

Semana 12 – Aula 1
Superfícies Quádricas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Superfície quádrica

- São superfícies tridimensionais, nas variáveis $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{z}$;

Superfície quádrica

- São superfícies tridimensionais, nas variáveis $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{z}$;
- É definida por uma equação do segundo grau nessas três variáveis;

Superfície quádrica

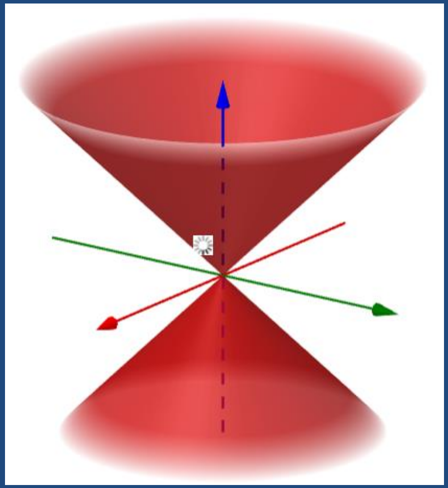
- São superfícies tridimensionais, nas variáveis $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{z}$;
- É definida por uma equação do segundo grau nessas três variáveis;
- A intersecção de um plano coordenado, ou paralelo a este, com uma superfície quádrica resulta em uma cônica, chamada traço;

Superfície quádrica

- São superfícies tridimensionais, nas variáveis $\boldsymbol{x, y\ e\ z}$;
- É definida por uma equação do segundo grau nessas três variáveis;
- A intersecção de um plano coordenado, ou paralelo a este, com uma superfície quádrica resulta em uma cônica, chamada traço;
- Estudaremos as quádricas canônicas, isto é, relacionadas às formas reduzidas das cônicas.

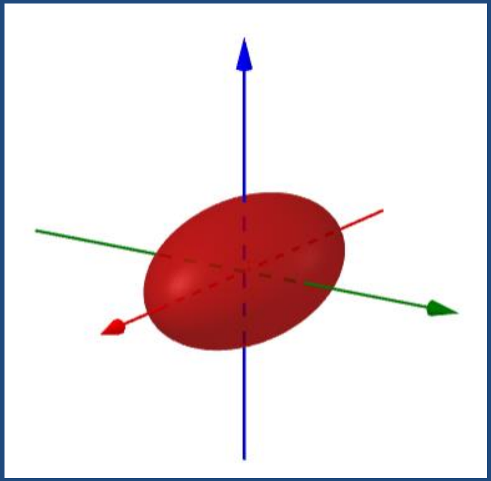
Superfícies quádricas

Cone



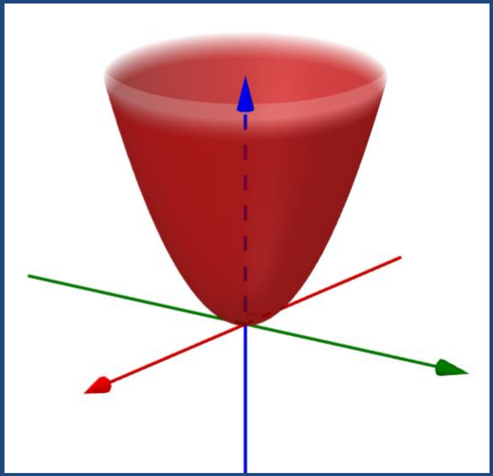
$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Elipsoide



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Paraboloide Elíptico

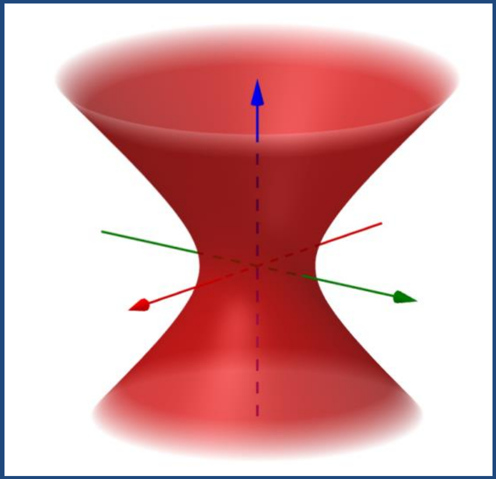


$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Fonte: Geogebra, autor Ricardo Misturini

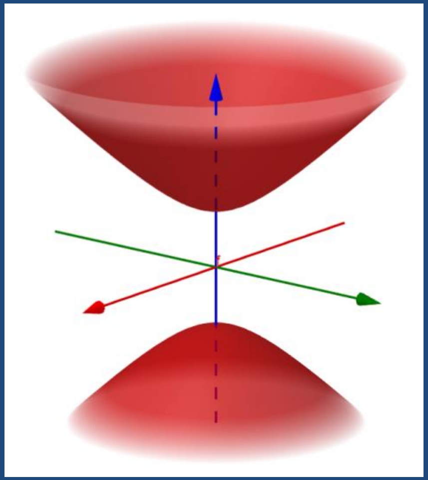
Superfícies quádricas

Hiperboloide de uma folha



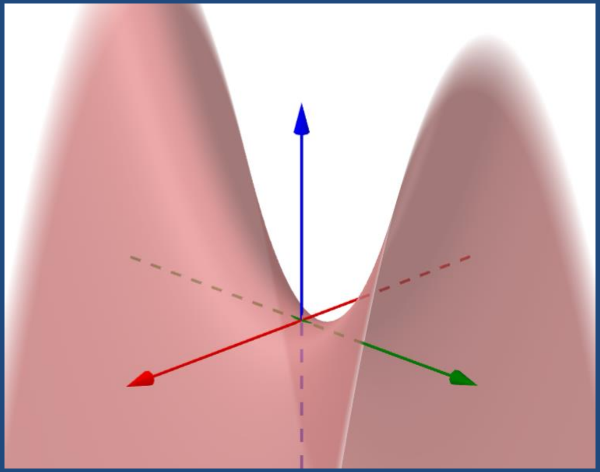
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hiperboloide de duas folhas



$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Paraboloide hiperbólico



$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

Fonte: Geogebra, autor Ricardo Misturini

Superfície quádrica de revolução

- Gerada por uma curva plana, chamada geratriz;

Superfície quádrica de revolução

- Gerada por uma curva plana, chamada geratriz;
- Essa geratriz gira $360°$ em torno de um eixo;

Superfície quádrica de revolução

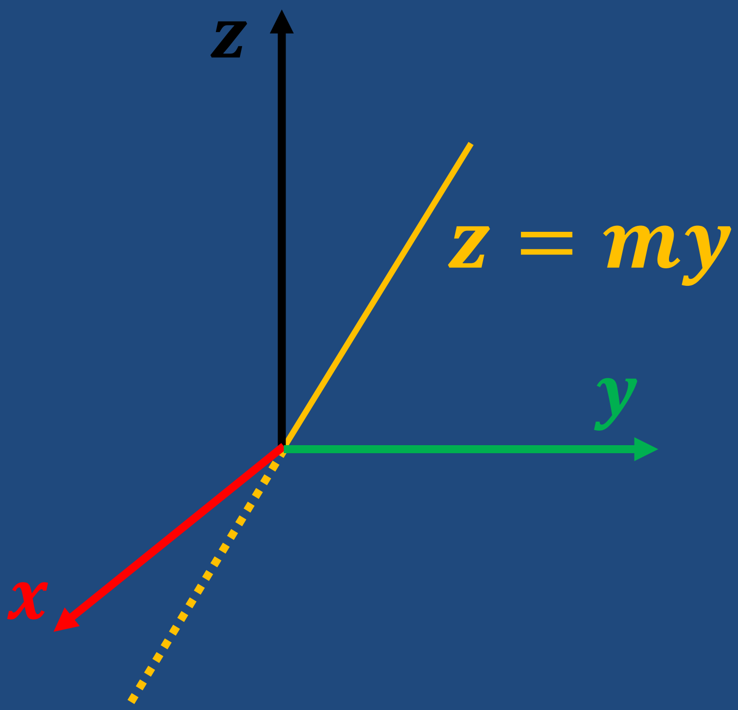
- Gerada por uma curva plana, chamada geratriz;
- Essa geratriz gira $360°$ em torno de um eixo;
- As superfícies quádricas assim formada são conhecidas como superfícies de revolução;

Superfície quádrica de revolução

- Gerada por uma curva plana, chamada geratriz;
- Essa geratriz gira $360°$ em torno de um eixo;
- As superfícies quádricas assim formada são conhecidas como superfícies de revolução;
- Observar que se trata de uma superfície (casca), o que é diferente de um sólido de revolução obtido por integração.

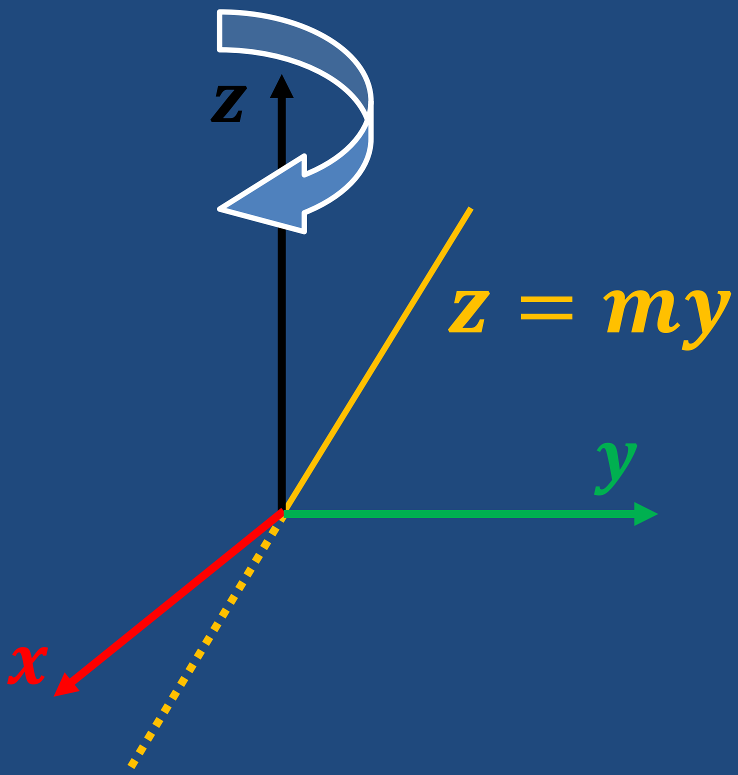
1 – Superfície cônica

- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;



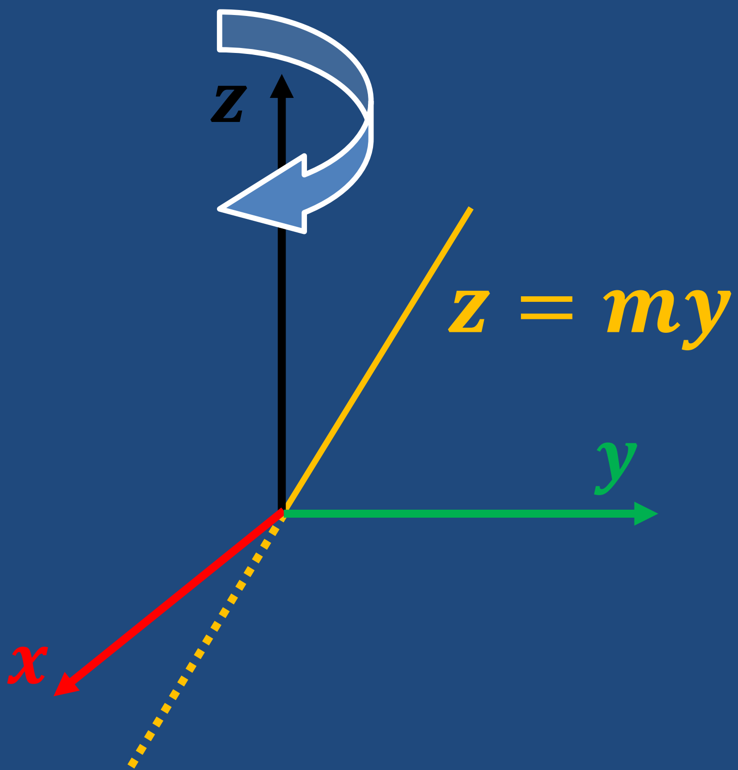
1 – Superfície cônica

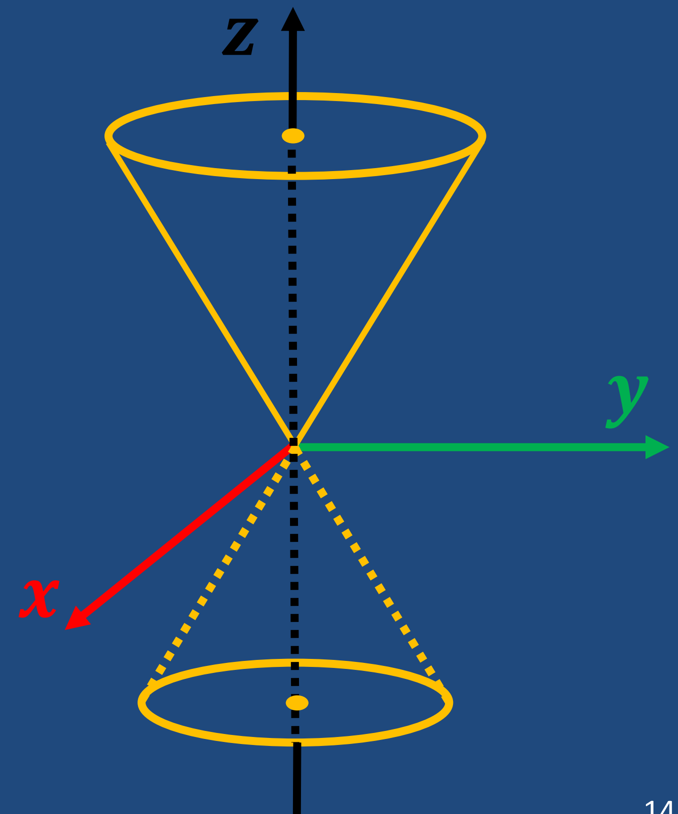
- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;
- A rotação em torno do eixo oz resulta na superfície cônica.



1 – Superfície cônica

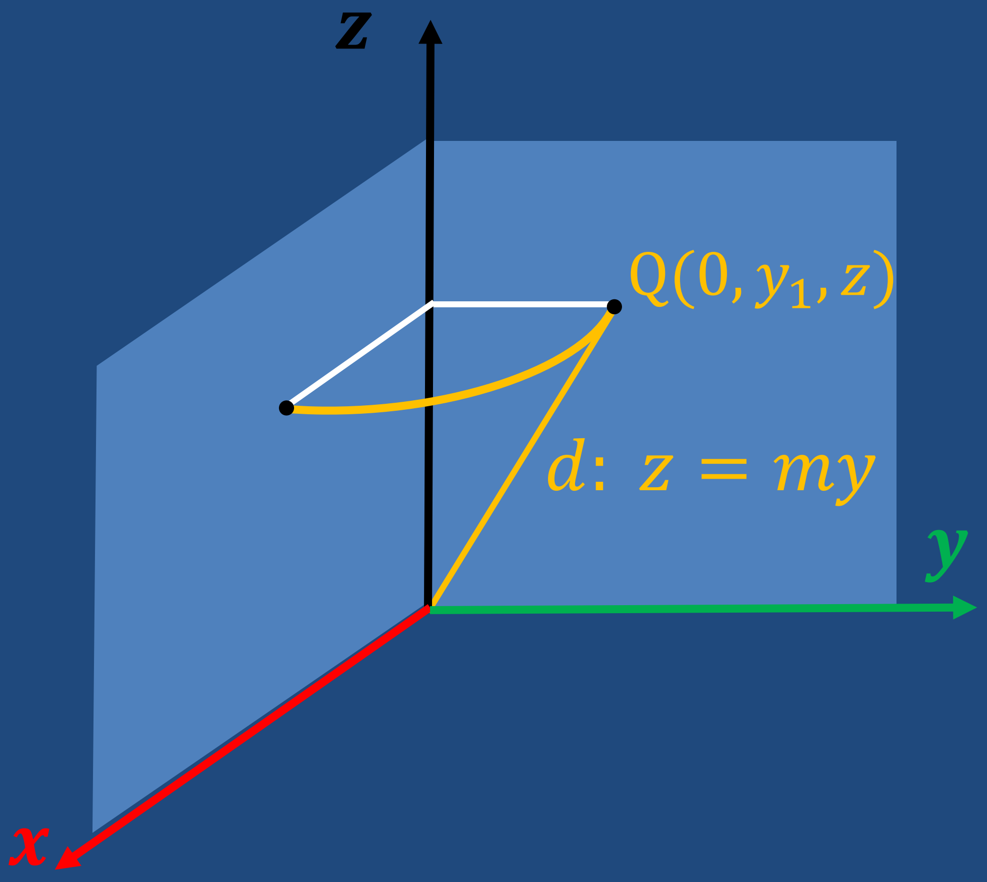
- Seja uma reta g contida no plano yz, representada por $z = my$;
- A rotação em torno do eixo oz resulta na superfície cônica.





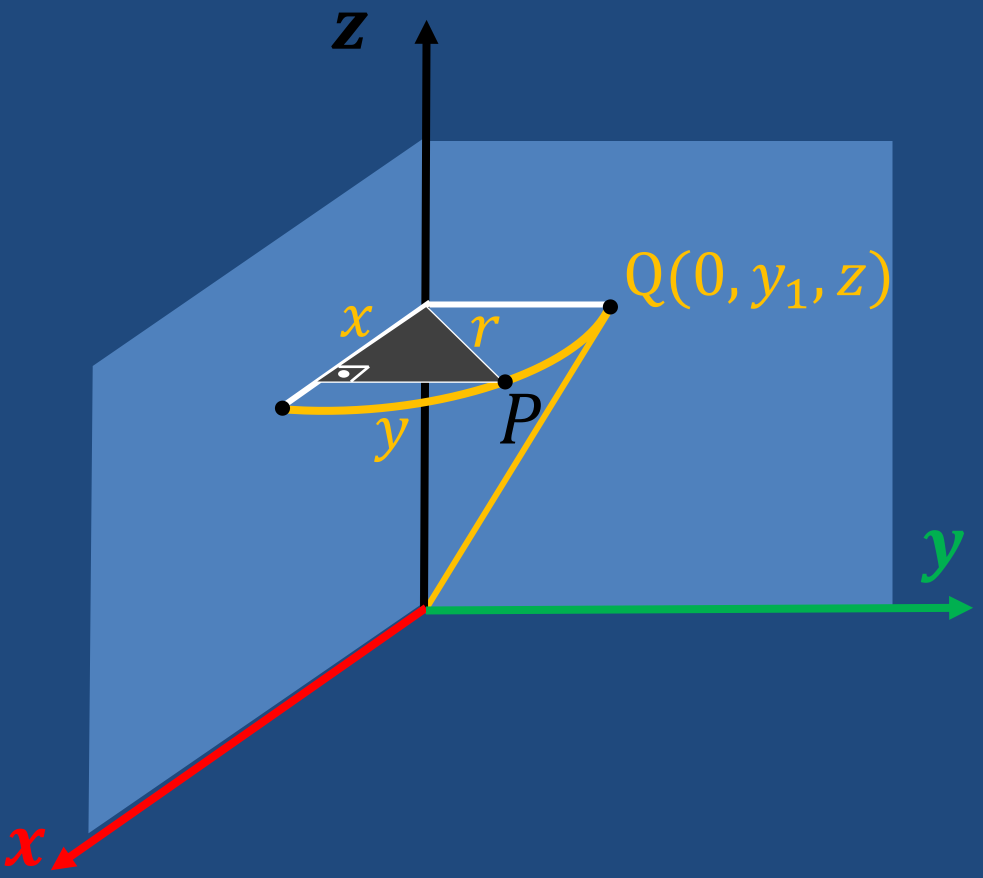
Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



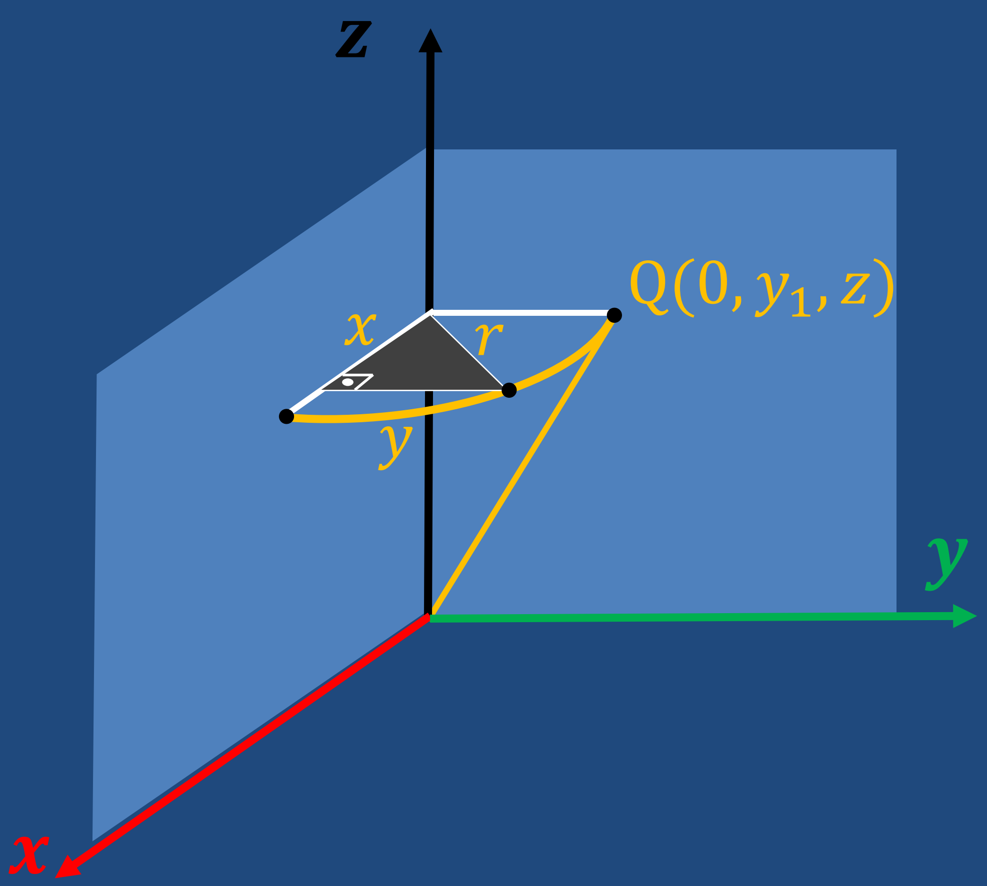
Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Equação do cone

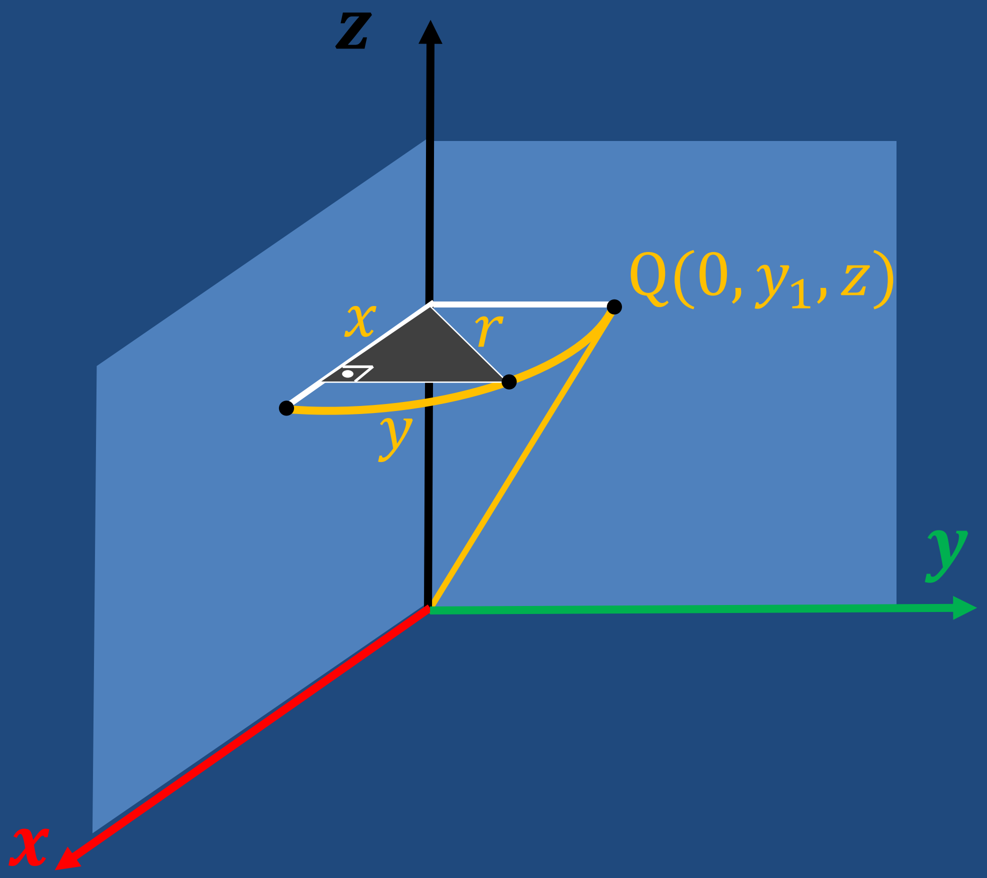
$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Equação do cone



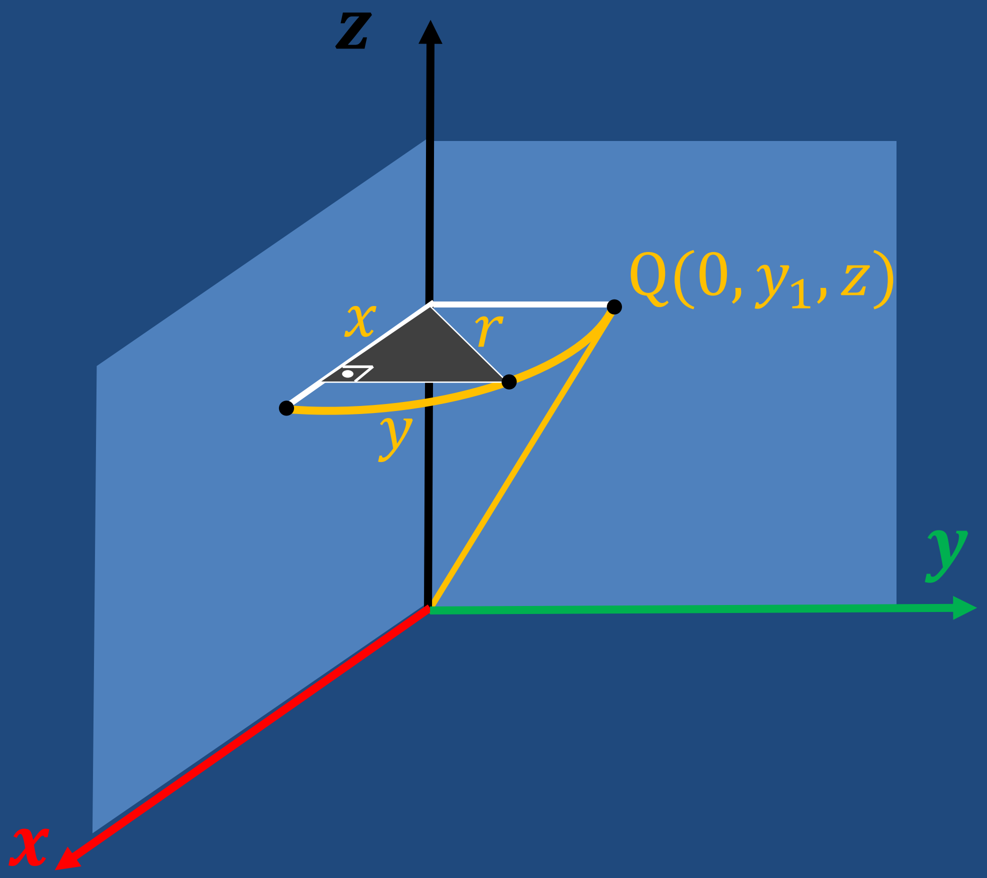
$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

Equação do cone



$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$

Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

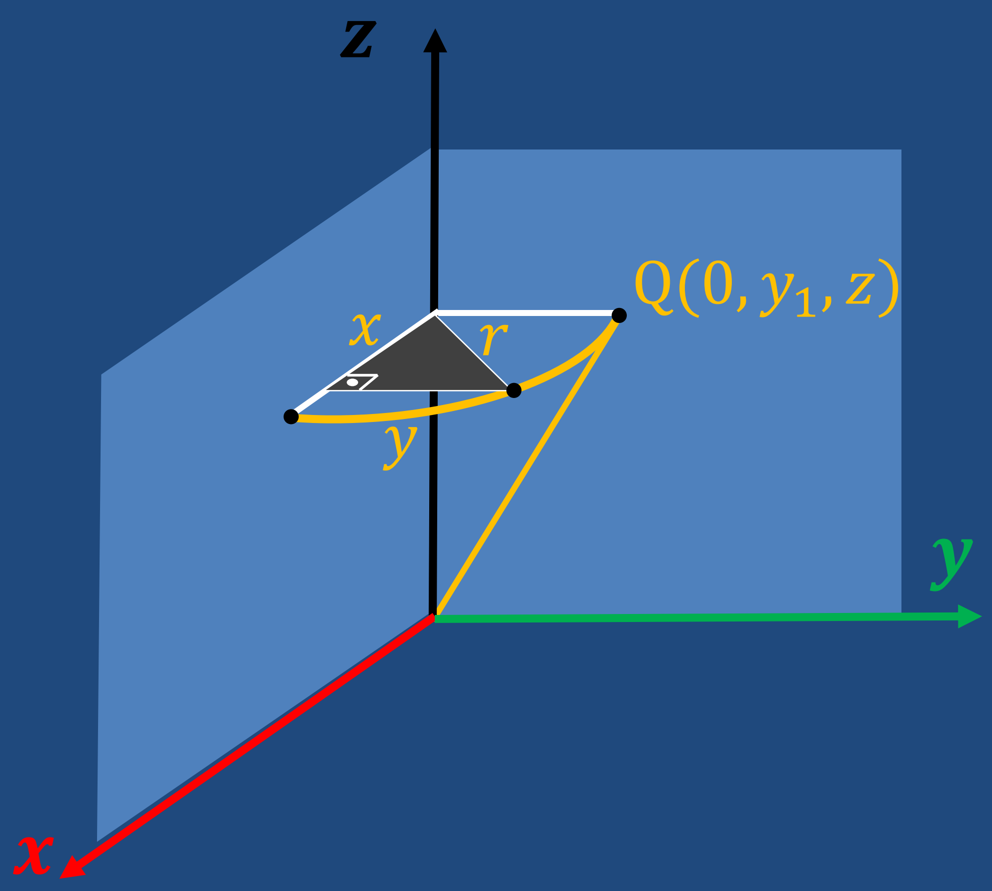
Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Do triângulo retângulo:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

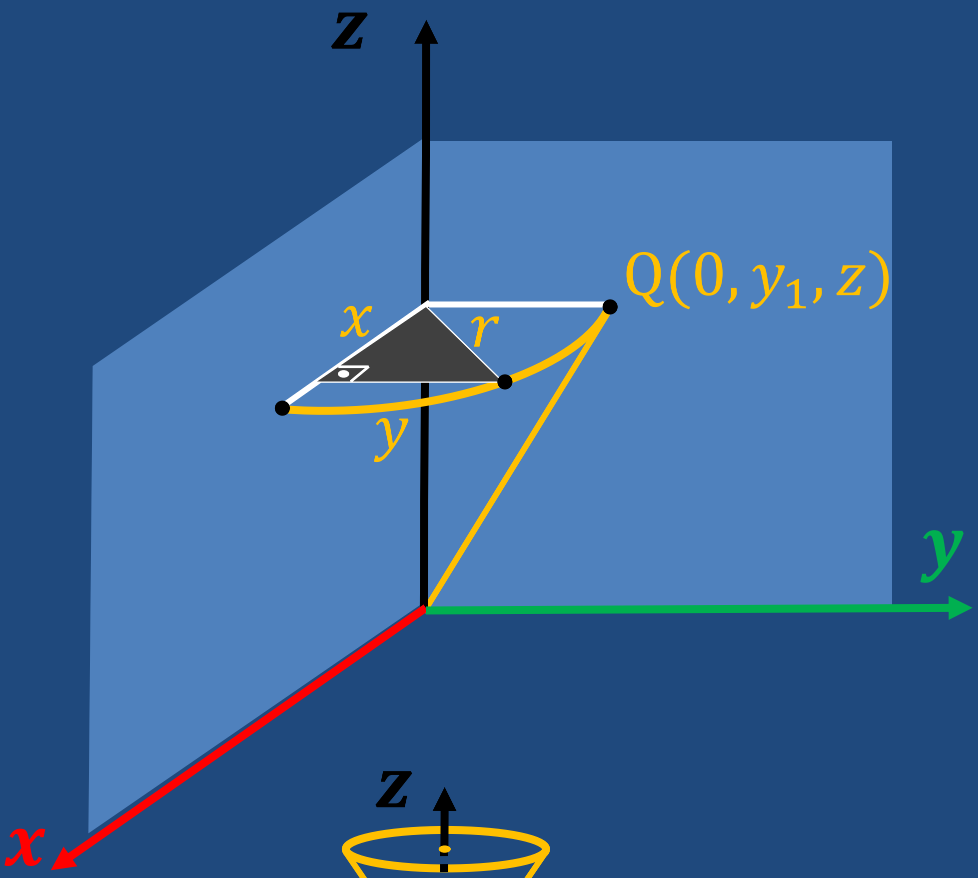
$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Fazendo: $m^2 = {}^{1}/_{a^2}$

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

Equação do cone

$$z = my \quad \rightarrow \quad \frac{z}{m} = y_1$$



Do triângulo retângulo:

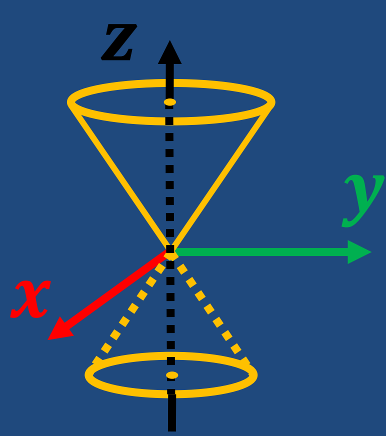
$$r^2 = x^2 + y^2$$

Mas, $r = y_1 = \frac{z}{m}$ então:

$$\frac{z}{m} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z^2 = m^2(x^2 + y^2)$$

Fazendo: $m^2 = {}^{1}/_{a^2}$



Equação do cone

$$z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$$

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;
2. Identifica-se o plano coordenado em que está contida;

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;
2. Identifica-se o plano coordenado em que está contida;
3. Escolhe-se o eixo ao qual será rotacionada de $360°$;

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;
2. Identifica-se o plano coordenado em que está contida;
3. Escolhe-se o eixo ao qual será rotacionada de $360°$;
4. Substitui-se a outra coordenada do plano em que está contida pela raiz que contenha esta coordenada e uma terceira;

Equações de outra cônicas

Se a geratriz (cônica) estiver contida em um dos planos coordenados e girar $360°$ em torno de um dos eixos desse plano, teremos um procedimento para obter a equação da quádrica correspondente a essa cônica, como segue:

1. Toma-se como base a equação da cônica;
2. Identifica-se o plano coordenado em que está contida;
3. Escolhe-se o eixo ao qual será rotacionada de $360°$;
4. Substitui-se a outra coordenada do plano em que está contida pela raiz que contenha esta coordenada e uma terceira;
5. Obtêm-se a equação da quádrica correspondente.

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;

1. $z = my \qquad m = 1/a$

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;
2. Plano coordenado em que está contida;

1. $z = my \qquad m = 1/a$
2. zy

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;
2. Plano coordenado em que está contida;
3. Eixo ao qual será rotacionada;

1. $z = my \qquad m = 1/a$
2. zy
3. oz

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;
2. Plano coordenado em que está contida;
3. Eixo ao qual será rotacionada;
4. Substitui-se a outra coordenada pela raiz;

1. $z = my \qquad m = 1/a$
2. zy
3. oz
4. $y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

Equações de outra cônicas

Aplicando o procedimento na equação do cone

1. Equação da cônica;
2. Plano coordenado em que está contida;
3. Eixo ao qual será rotacionada;
4. Substitui-se a outra coordenada pela raiz;
5. Quádrica correspondente.

1. $z = my \qquad m = 1/a$
2. zy
3. oz
4. $y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$
5. $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

Equações de outra cônicas

Plano em que está contida a cônica	Eixo de giro da cônica	Substituição da coordenada
xy	ox	$y = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$
xy	oy	$x = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$
xz	ox	$z = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$
xz	oz	$x = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$
yz	oy	$z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$
yz	oz	$y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano yoz;

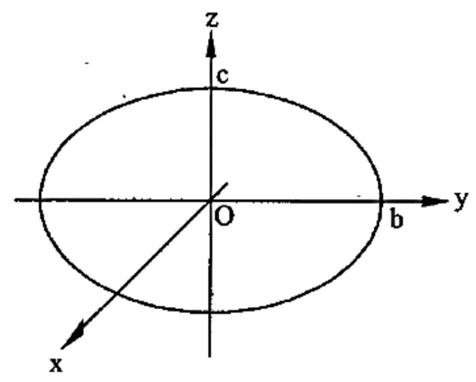


Figura 9.2

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano $\boldsymbol{yoz}$;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de $\boldsymbol{oy}$.

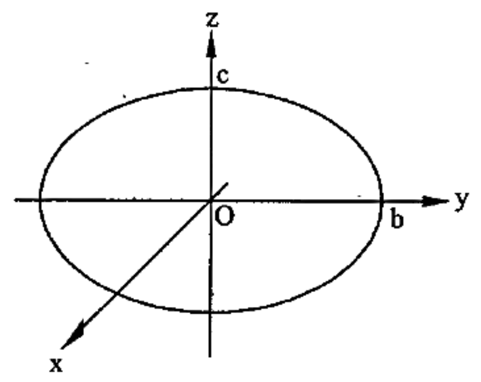


Figura 9.2

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano ***yoz***;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de ***oy***.

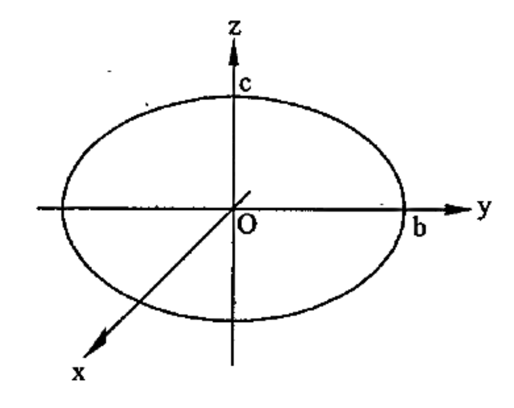


Figura 9.2

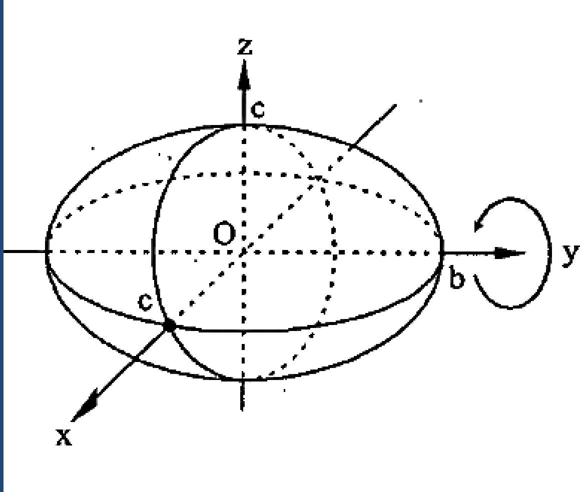


Figura 9.3

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

2 – Elipsoides

- Seja a equação da elipse, contida no plano yoz;
- Obter a superfície quádrica correspondente, girando em torno de oy.

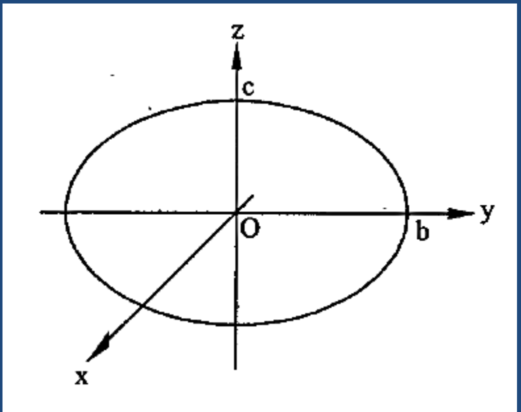


Figura 9.2

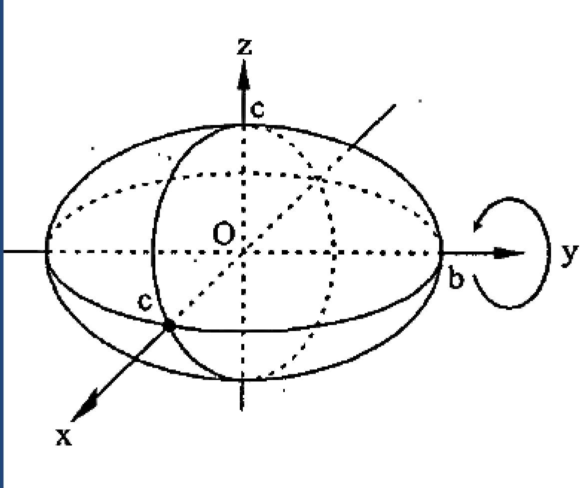


Figura 9.3

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \;\rightarrow\; z = \pm\sqrt{x^2 + z^2} \;\rightarrow\; \boxed{\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

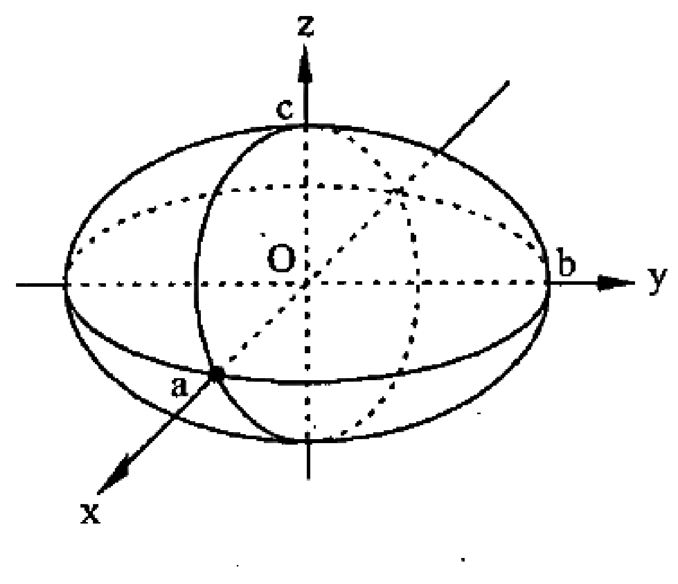


Figura 9.4

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- O traço no plano xoy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

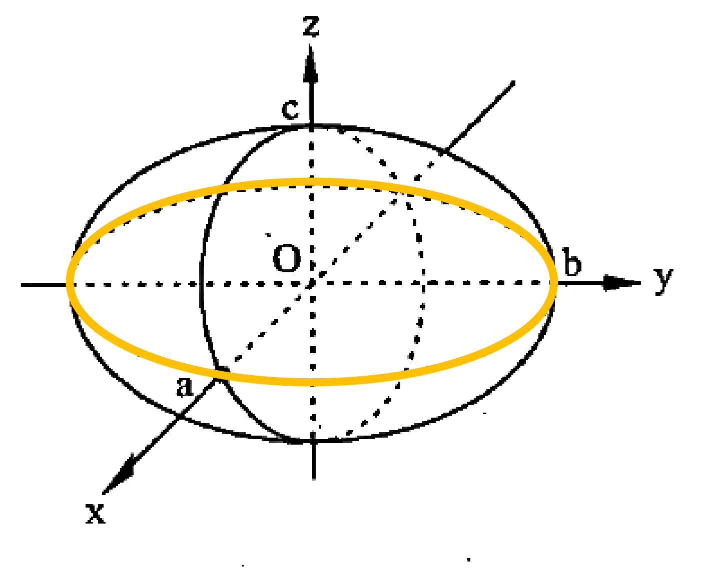


Figura 9.4

2 – Elipsoides

- De maneira geral, a equação do elipsoide é definida pela expressão:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

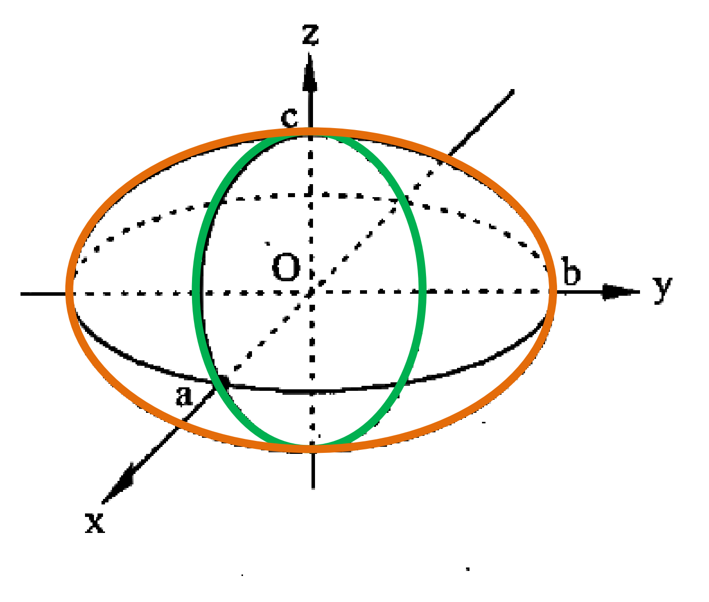


Figura 9.4

- O traço no plano xoy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- O traço no plano xoz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

- O traço no plano yoz:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

2 – Elipsoides -> Esfera

- Na equação geral do elipsoide, se $\boldsymbol{a = b = c}$,

  Tem-se a equação de uma esfera de raio $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = a^2}$$

Exemplo 1

Determinar a equação da esfera de centro $C(0, 0, 0)$ e raio $r = 4$

Exemplo 1

Determinar a equação da esfera de centro $C(0,0,0)$ e raio $r = 4$

$\boldsymbol{Solução}$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 4^2}$$

Exercício 1

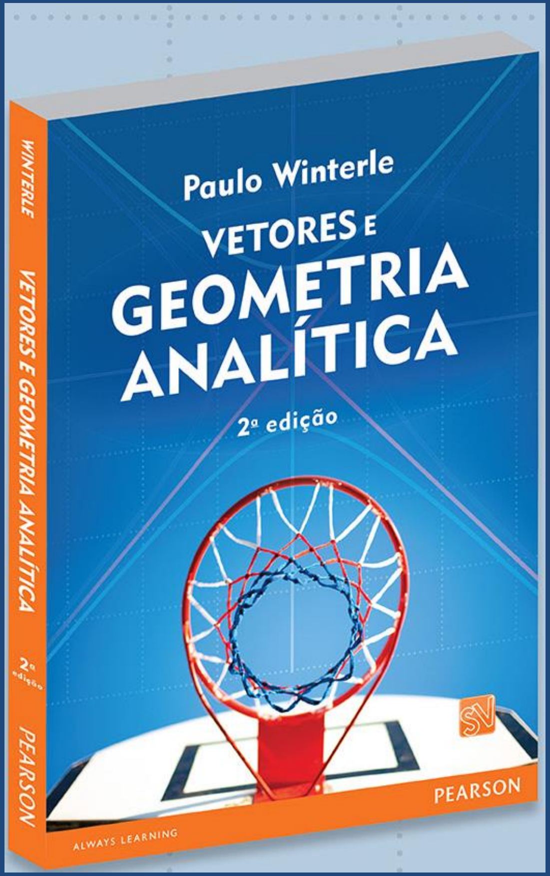
Obter a superfície de revolução ao girar a reta $z = 2y$ e $x = 0$ em torno do eixo oz.

Resp.: $z^2 = 4(x^2 + y^2)$

Exercício 2

Obter a superfície de revolução ao girar a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ em torno do eixo maior. Resp.: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br