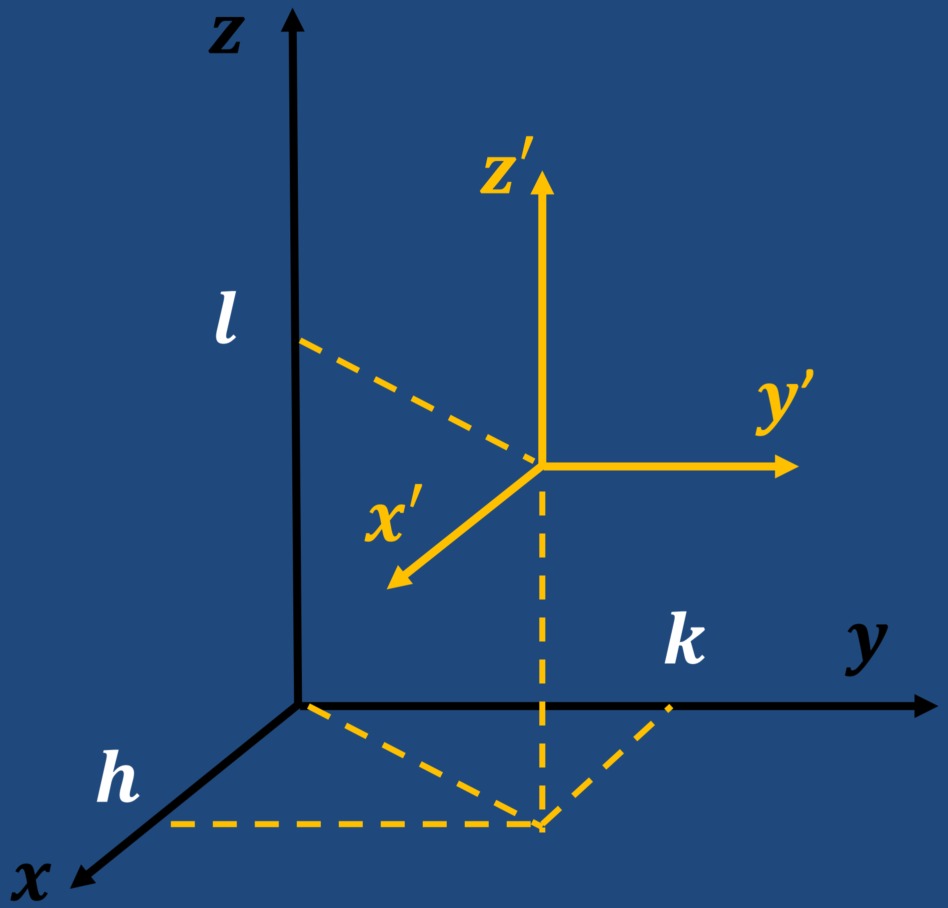
Geometria Analítica
Engenharias

Semana 12 – Aula 2
Translação de eixos
Outras quádricas

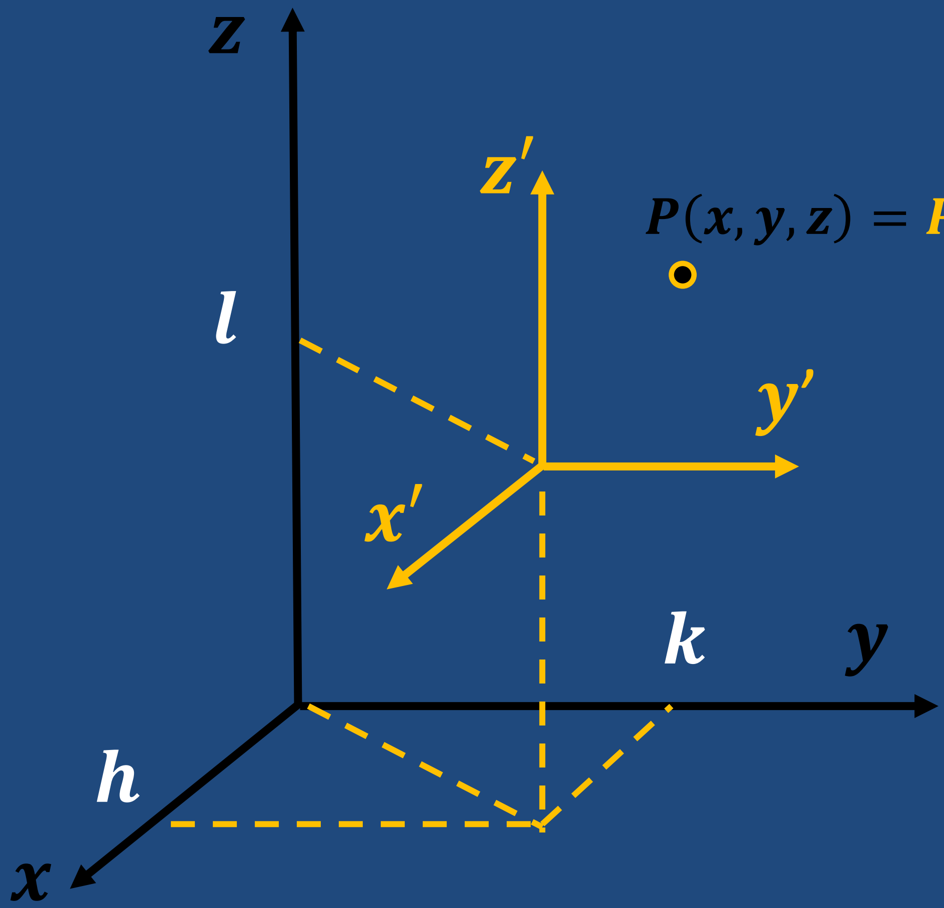
Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Translação de eixos no espaço



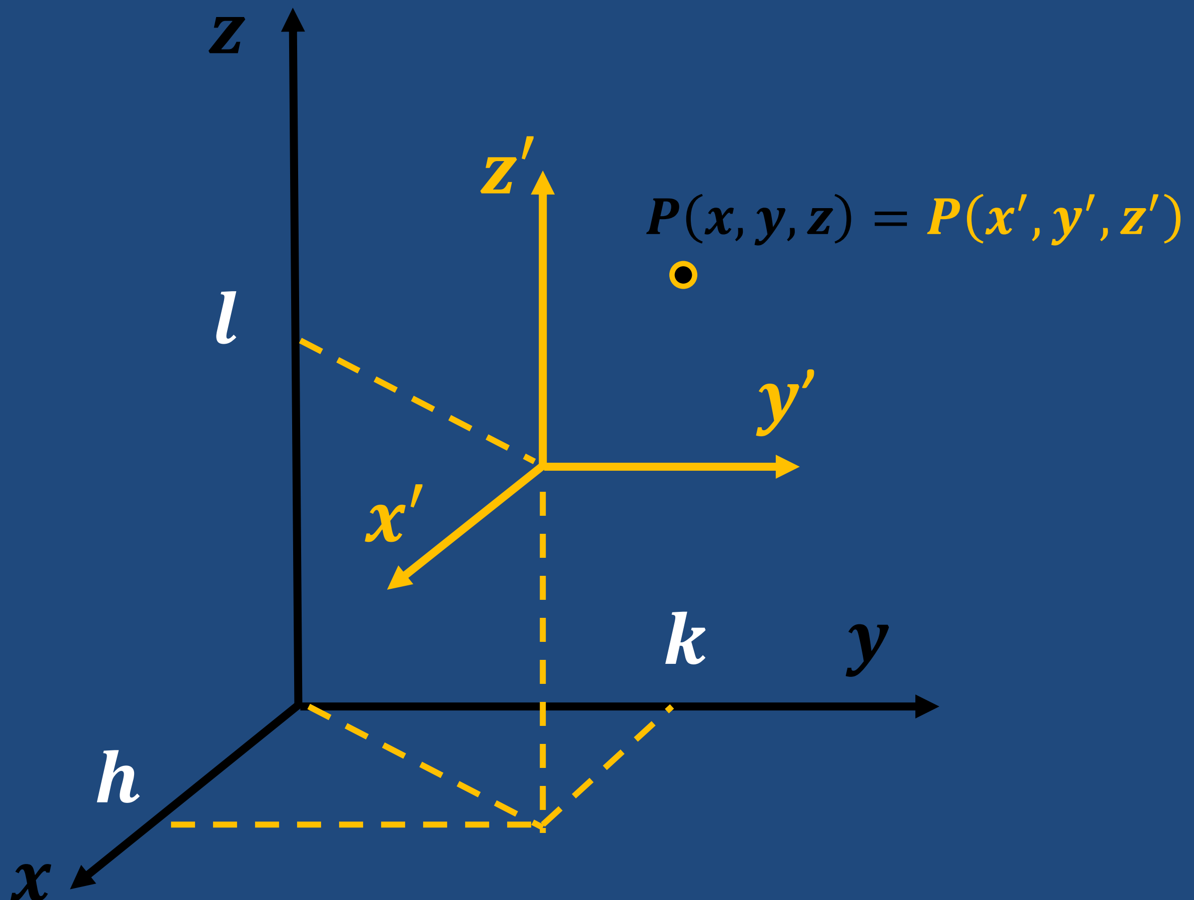
Translação de eixos no espaço



$$P(x, y, z) = P(x', y', z')$$

$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \\ z = l + z' \end{cases}$$

Translação de eixos no espaço



$$\begin{cases} x = h + x' \\ y = k + y' \\ z = l + z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

Relações de transformação

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Solução

$$(\boldsymbol{x'})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{y'})^{\mathbf{2}} + (\boldsymbol{z'})^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}$$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Solução

$$C(2, 4, -1) = C(h, k, l)$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{x'})^2 + (\boldsymbol{y'})^2 + (\boldsymbol{z'})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2,4,-1)$ e raio $r = 3$

Solução

$C(2,4,-1) = C(h,k,l)$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{x'})^2 + (\boldsymbol{y'})^2 + (\boldsymbol{z'})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{l})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Solução

$C(2, 4, -1) = C(h, k, l)$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{x'})^2 + (\boldsymbol{y'})^2 + (\boldsymbol{z'})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{l})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 + (\boldsymbol{y} - \mathbf{4})^2 + (\boldsymbol{z} - (-\mathbf{1}))^2 = \mathbf{3}^2$$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Solução

$$C(2, 4, -1) = C(h, k, l)$$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{x'})^2 + (\boldsymbol{y'})^2 + (\boldsymbol{z'})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{l})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 + (\boldsymbol{y} - \mathbf{4})^2 + (\boldsymbol{z} - (-\mathbf{1}))^2 = \mathbf{3}^2$$

$$\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4} + \boldsymbol{y}^2 - \mathbf{8}\boldsymbol{y} + \mathbf{16} + \boldsymbol{z}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{z} + \mathbf{1} = \mathbf{9}$$

Exemplo 1

Resp.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$

Utilizar as equações de translação para determinar a equação da esfera de centro $C(2, 4, -1)$ e raio $r = 3$

Solução

$C(2, 4, -1) = C(h, k, l)$

$$\begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \\ z' = z - l \end{cases}$$

$$(\boldsymbol{x}')^2 + (\boldsymbol{y}')^2 + (\boldsymbol{z}')^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{h})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{k})^2 + (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{l})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

$$(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})^2 + (\boldsymbol{y} - \mathbf{4})^2 + (\boldsymbol{z} - (-\mathbf{1}))^2 = \mathbf{3}^2$$

$$\boldsymbol{x}^2 - \mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{4} + \boldsymbol{y}^2 - \mathbf{8}\boldsymbol{y} + \mathbf{16} + \boldsymbol{z}^2 + \mathbf{2}\boldsymbol{z} + \mathbf{1} = \mathbf{9}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 2z + 12 = 0$$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;

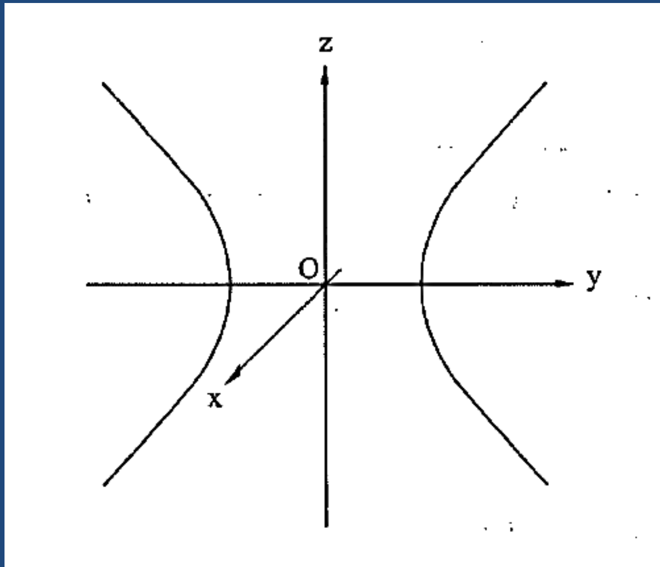


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

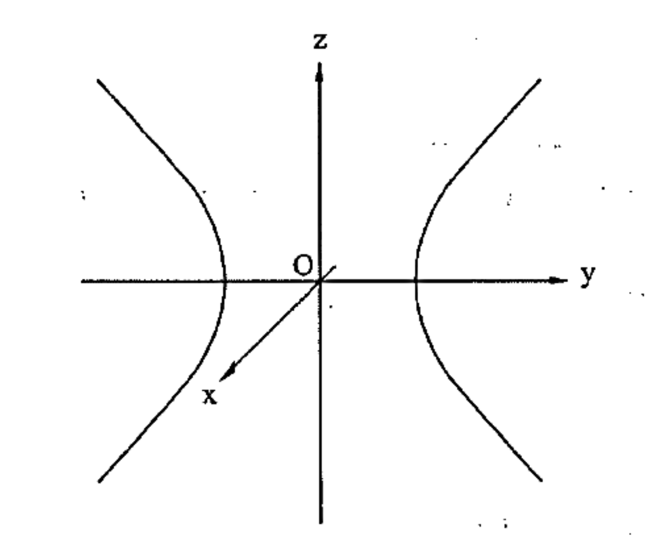


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

3A – Hiperboloide de uma folha

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

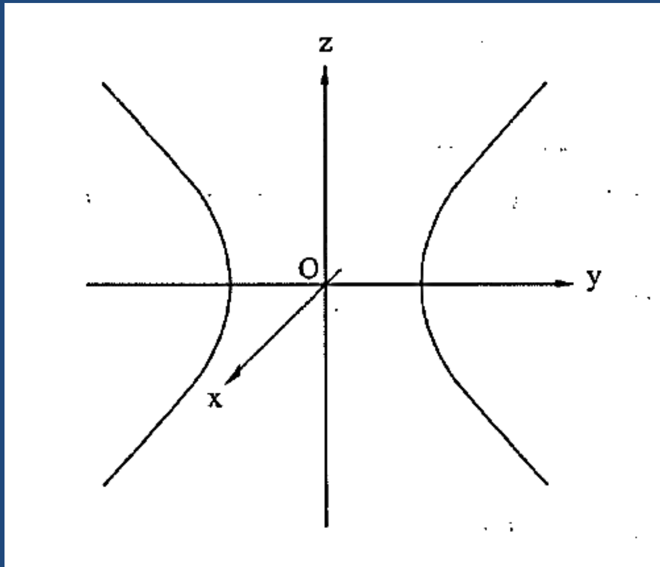


Figura 9.6

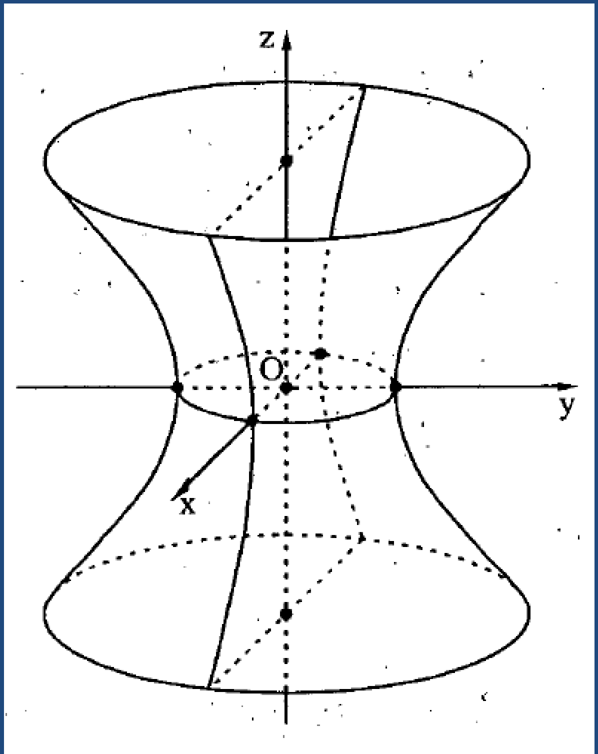


Figura 9.7

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;

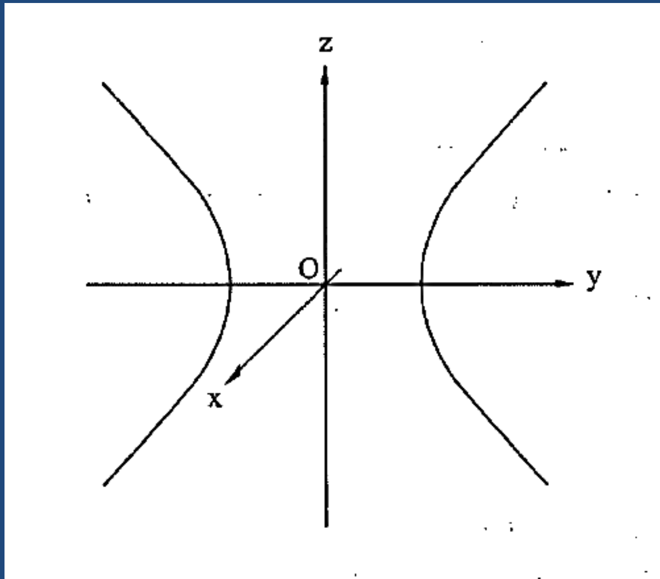


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oy:

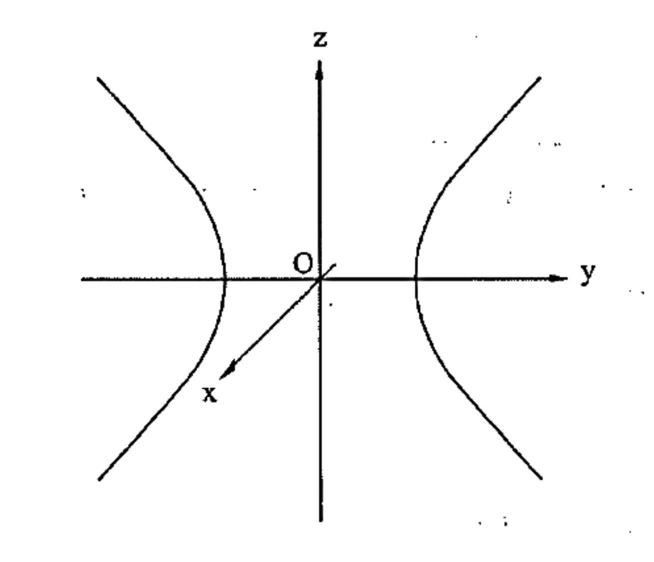


Figura 9.6

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$$

3B – Hiperboloide de duas folhas

- Supondo que a hipérbole está no plano yz;
- Giro em torno de oy:

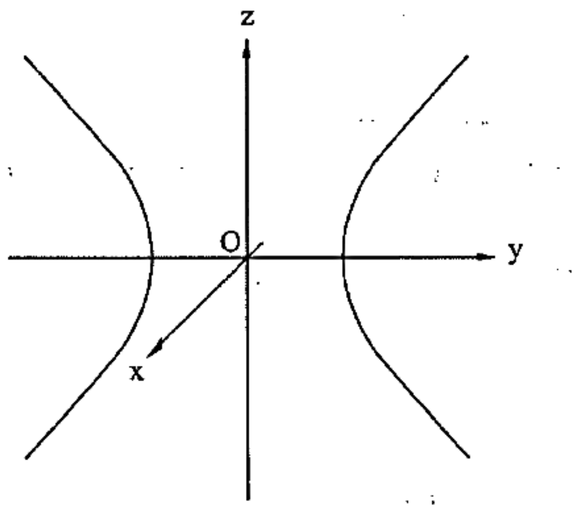


Figura 9.6

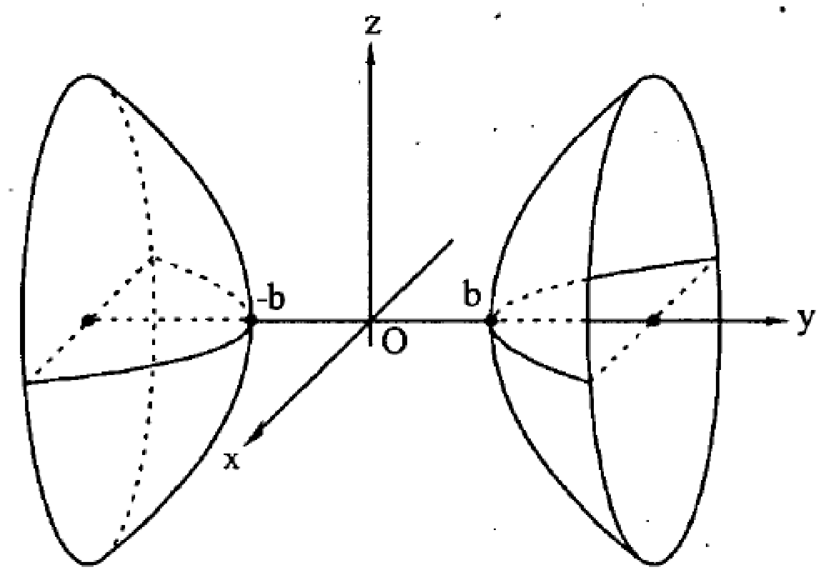


Figura 9.8

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow z=\pm\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow -\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;

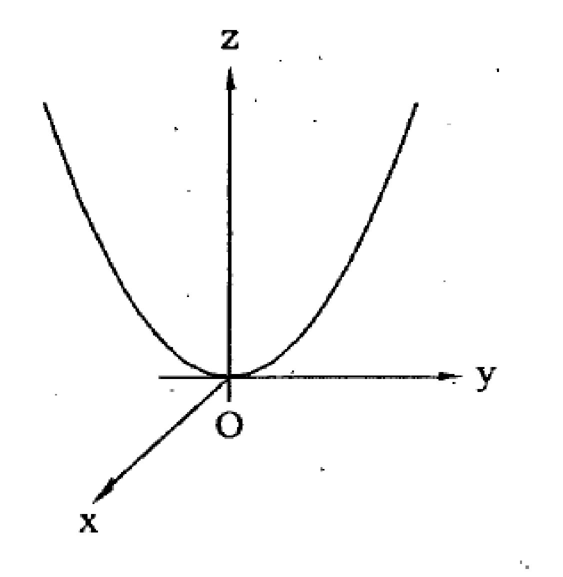


Figura 9.9

$$y^2 = 2pz$$

fazendo: $2p = b^2$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

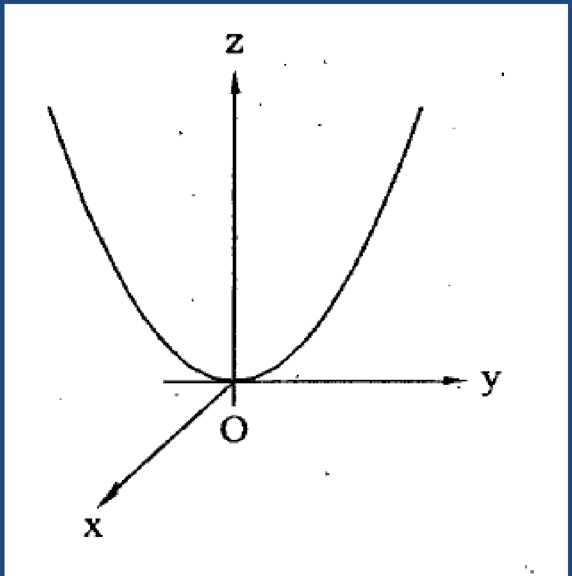


Figura 9.9

$$y^2 = 2pz \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

fazendo: $2p = b^2$

4A – Paraboloide elíptico

- Supondo que a parábola está no plano yz;
- Giro em torno de oz:

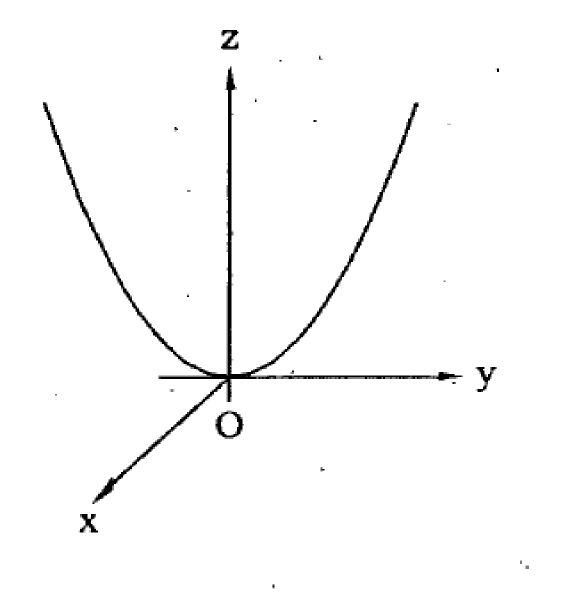


Figura 9.9

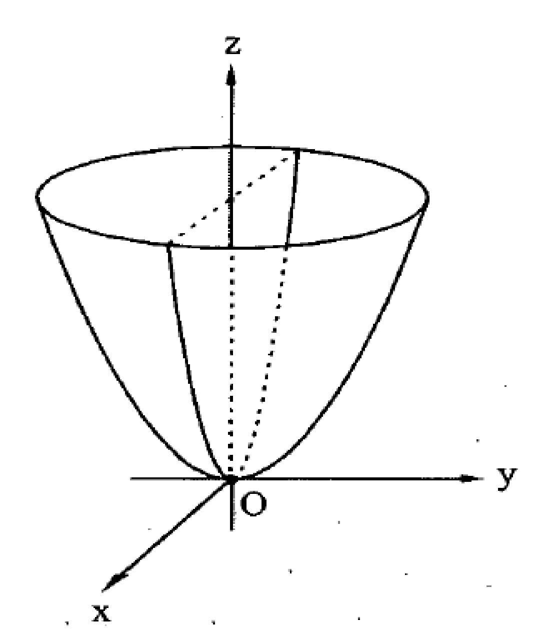


Figura 9.10

$$y^2 = 2pz \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{z = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

fazendo: $2p = b^2$

Exercício 1

Represente o paraboloide elíptico de equação $y = 4x^2 + z^2$. Identificar a equação da elipse em $y = 4$.

Exercício 1

Represente o paraboloide elíptico de equação $y = 4x^2 + z^2$. Identificar a equação da elipse em $y = 4$.

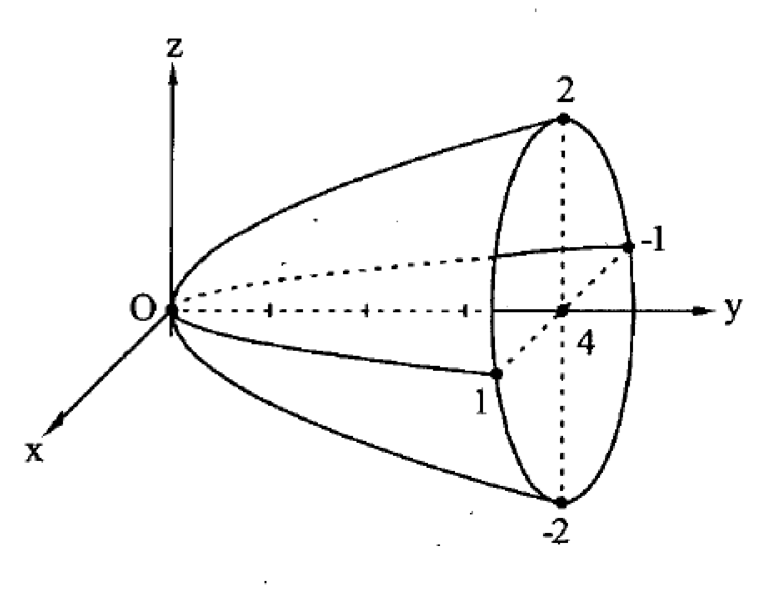


Figura 9.11

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- Supondo que a hipérbole está no plano xy e uma parábola no plano yz; O Giro em torno de oz:

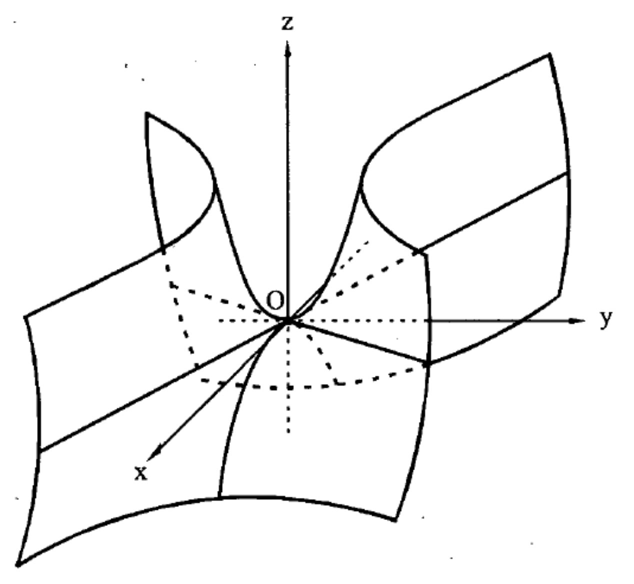


Figura 9.12

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- Supondo que a hipérbole está no plano xy e uma parábola no plano yz; O Giro em torno de oz:

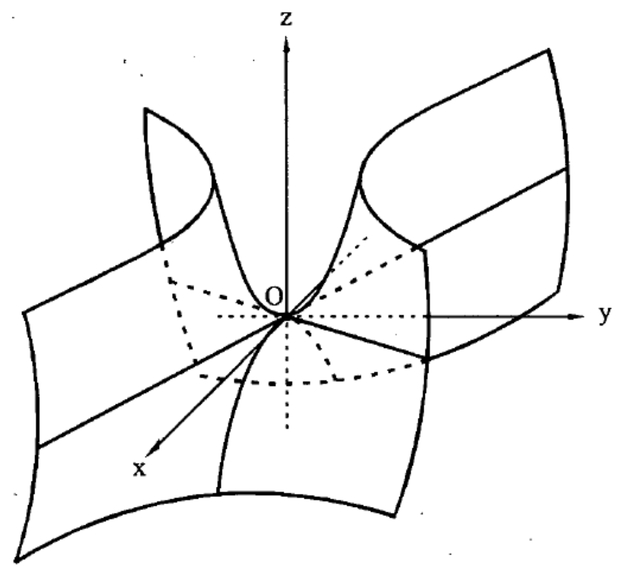


Figura 9.12

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Outras formas:

$$y = \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

$$x = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

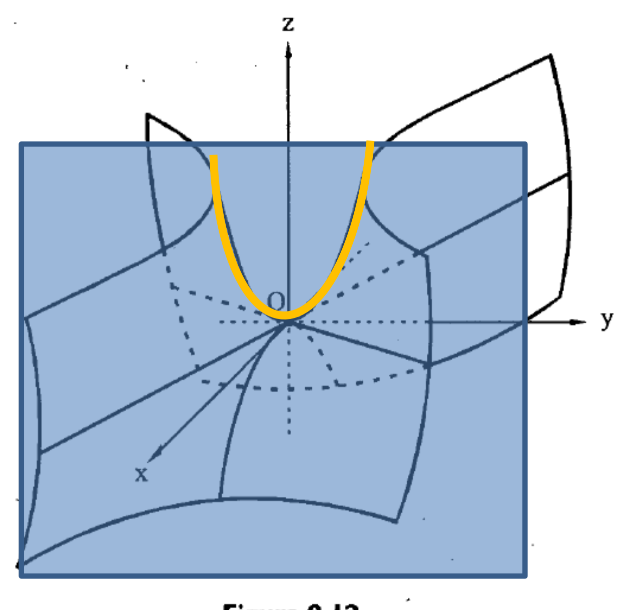


Figura 9.12

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

- O traço nos planos $y = 0$:

$$z = -\frac{x^2}{a^2}$$

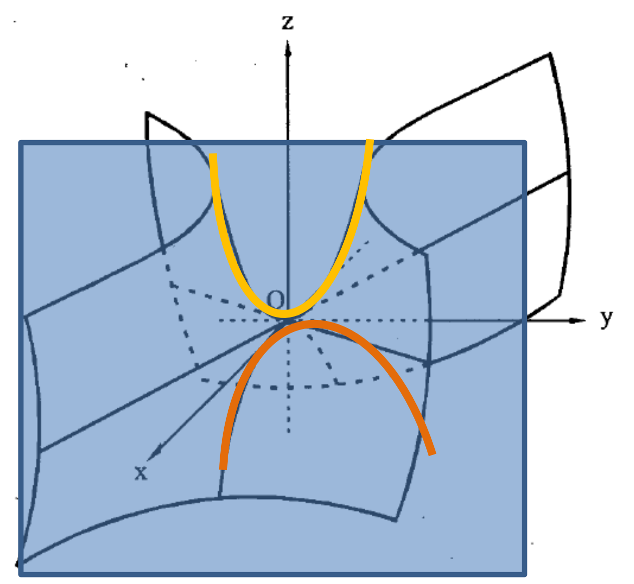


Figura 9.12

4B – Paraboloide hiperbólico (sela)

- O traço nos planos $x = 0$:

$$z = \frac{y^2}{b^2}$$

- O traço nos planos $y = 0$:

$$z = -\frac{x^2}{a^2}$$

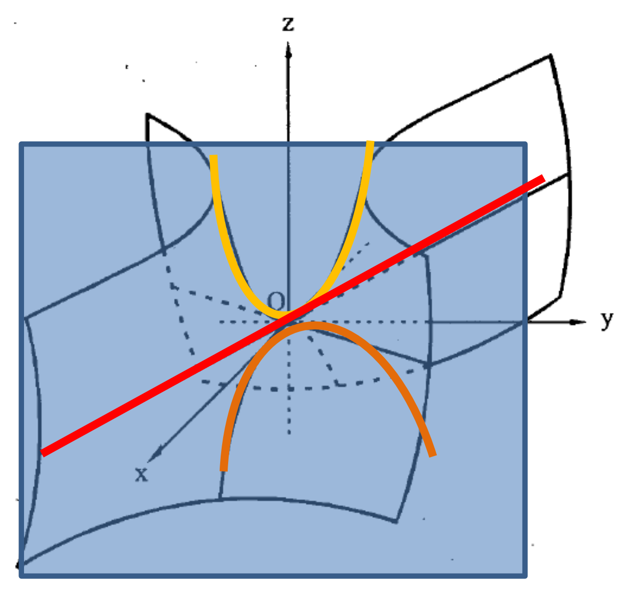


Figura 9.12

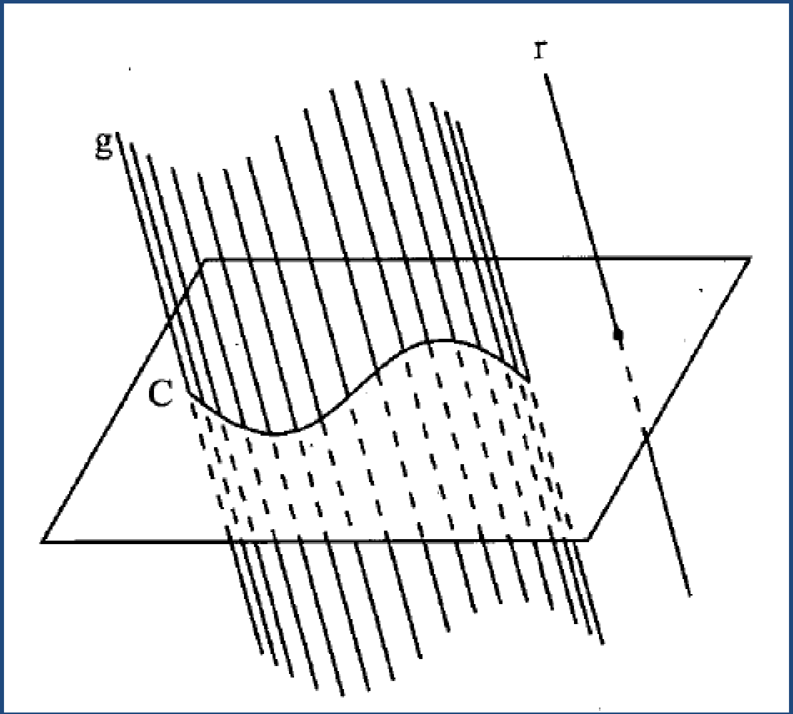
- O traço no plano $z = 0$:

$$0 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = 0$$

Retas (Hipérbole degenerada)

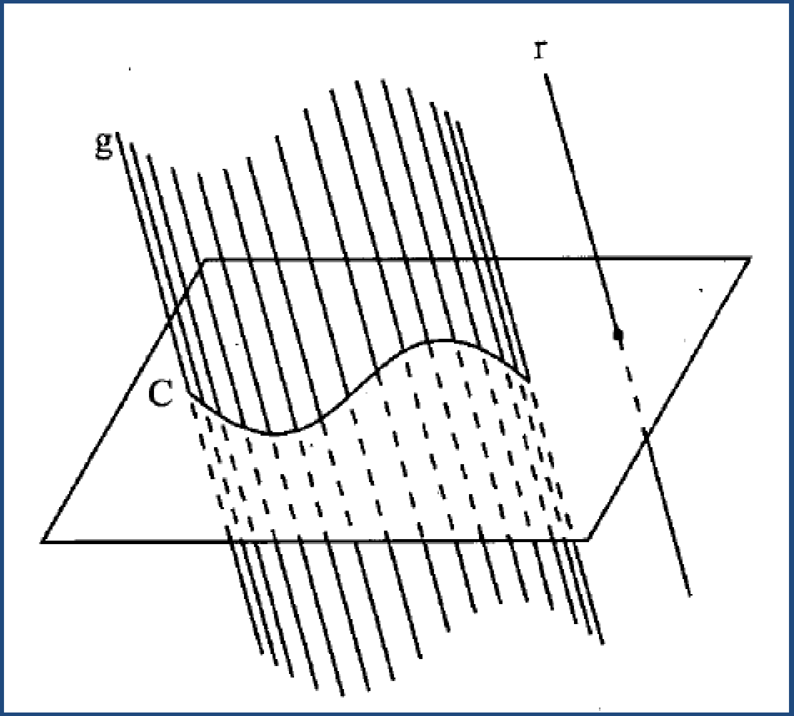
5 – Superfícies cilíndricas

- Seja uma curva plana c e r uma reta fixa não paralela ao plano de c;



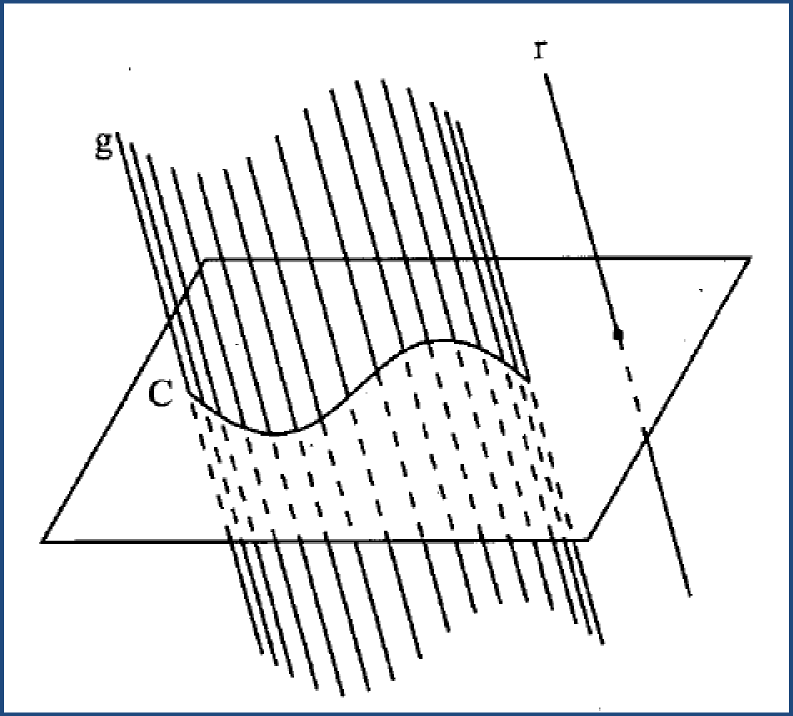
5 – Superfícies cilíndricas

- Seja uma curva plana c e r uma reta fixa não paralela ao plano de c;
- Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta g que se move paralelamente à reta fixa e em contato permanente com a curva;



5 – Superfícies cilíndricas

- Seja uma curva plana c e r uma reta fixa não paralela ao plano de c;
- Superfície cilíndrica é a superfície gerada por uma reta g que se move paralelamente à reta fixa e em contato permanente com a curva;
- A Superfície cilíndrica pode ser vista como um conjunto de infinitas retas paralelas;



Exemplo 2

Seja a parábola $x^2 = 2y$ e $z = 0$, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oz, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

Exemplo 2

Seja a parábola $x^2 = 2y$ e $z = 0$, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oz, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

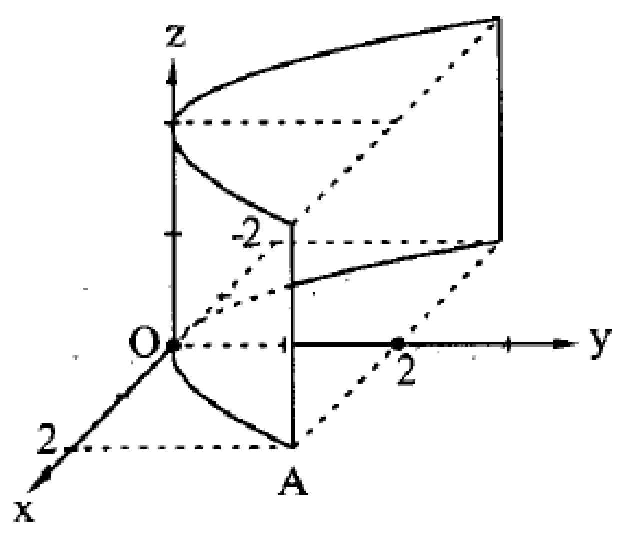


Figura 9.16

$$x^2 = 2y + 0z$$

A própria equação da Diretriz representa a Superfície cilíndrica.

$$\boxed{x^2 = 2y}$$

Exemplo 3

Seja a elipse como diretriz, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oy, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

Exemplo 3

Seja a elipse como diretriz, tomando-se uma reta geratriz paralela ao eixo oy, a superfície cilíndrica estará ao longo deste eixo.

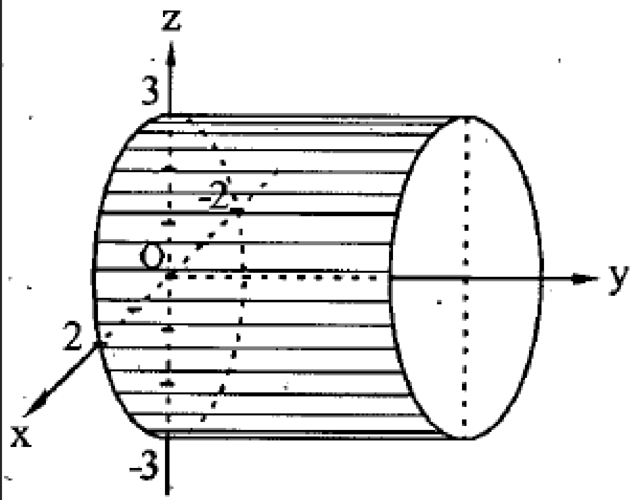


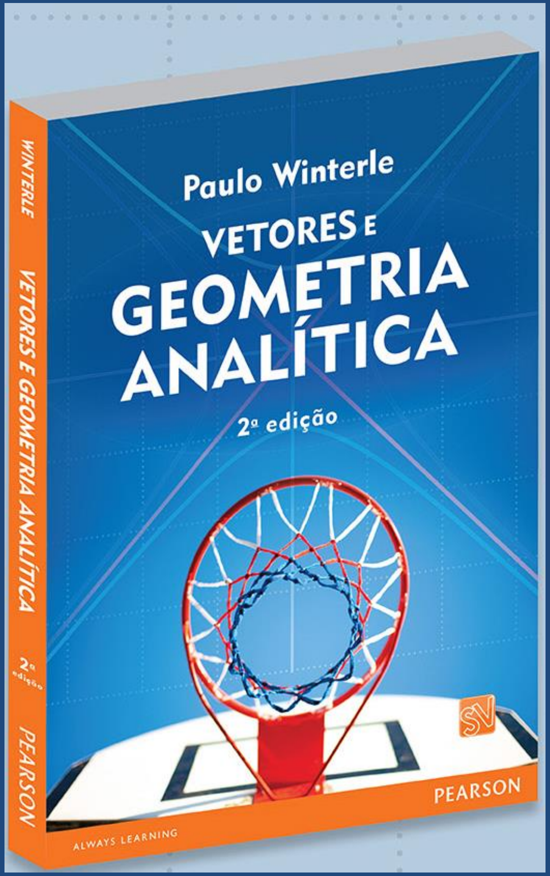
Figura 9.17

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Cilíndro elíptico.

$$\boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1}$$

Referência



WINTERLE, P. Vetores e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Pearson, 2014.

Numeração dos exercícios com base na 2ª ed.

Contato

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br