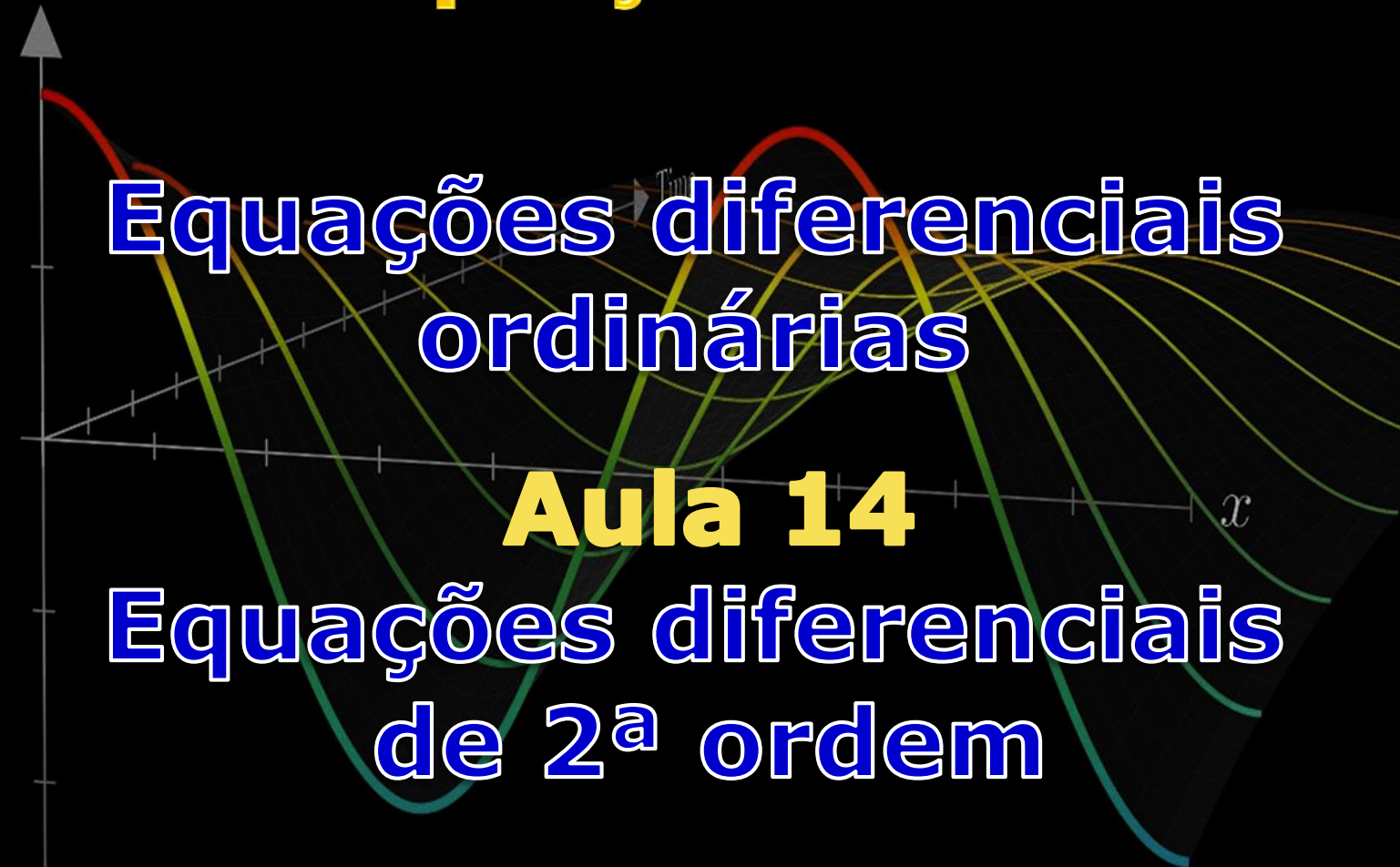


Equações diferenciais



Equações diferenciais
ordinárias

Aula 14

Equações diferenciais
de 2ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Equações homogêneas a coeficientes constantes.
3. Teorema de existência e unicidade.
4. Outros teoremas.

Pré-requisitos

- Equações algébricas do segundo grau.
- Operações com expoentes.



Introdução

Introdução

- As eq. dif. de 2ª ordem possuem estrutura teórica rica relacionada com diversos aspectos sistemáticos de resolução de equações diferenciais.
- Grande parte desses métodos é compreensível no nível da matemática elementar.

Introdução

- As eq. dif. de 2ª ordem possuem estrutura teórica rica relacionada com diversos aspectos sistemáticos de resolução de equações diferenciais.
- Grande parte desses métodos é compreensível no nível da matemática elementar.
- As eq. dif. de 2ª ordem são essenciais para qualquer investigação preliminar em áreas como mecânica de fluidos, condução de calor, movimento oscilatório e fenômenos eletromagnéticos.

**Equações homogêneas
a coeficientes
constantes**

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.
- A função f inclui essas duas variáveis e uma possível derivada de primeira ordem de y .

Equações homogêneas

- Uma eq. dif. de 2ª ordem tem a forma geral:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) \quad (1)$$

- Sendo t a variável independente e y a variável dependente.
- A função f inclui essas duas variáveis e uma possível derivada de primeira ordem de y .
- A equação (1) será linear se apresentar a forma:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (2)$$

- $p, q, e g$ são funções somente da variável t .

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.
- Essas duas condições iniciais indicam um ponto particular (t_0, y_0) e a derivada neste ponto.

Equações homogêneas

- Um problema de valor inicial (PVI) consiste da equação diferencial e um par de condições iniciais.

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Onde y_0 e y'_0 são números reais constantes.
- Essas duas condições iniciais indicam um ponto particular (t_0, y_0) e a derivada neste ponto.
- A eq. dif. de 2ª ordem é homogênea quando $g = 0$:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (3)$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.
- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.
- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

$$\text{Se } y = e^{rt}$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.
- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

$$\text{Se } y = e^{rt} \quad \rightarrow \quad y' = re^{rt}$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.
- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

$$\text{Se } y = e^{rt} \quad \rightarrow \quad y' = re^{rt} \quad \rightarrow \quad y'' = r^2 e^{rt}$$

Equações homogêneas

- Inicialmente, consideremos as funções de t substituídas por coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (4)$$

- A eq. dif. de 2ª ordem a coeficientes constantes (4) pode ser resolvida por cálculos elementares.
- Supondo uma solução do tipo exponencial $y = e^{rt}$ em que r é um parâmetro a ser determinado.

$$\text{Se } y = e^{rt} \rightarrow y' = re^{rt} \rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

- Substituindo-se y e suas derivadas em (4) tem-se:

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad \text{como: } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad \text{como: } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

(Equação característica
da eq. dif. de 2ª ordem)

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad \text{como: } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

(Equação característica
da eq. dif. de 2ª ordem)

- A equação característica é uma equação algébrica do segundo grau em r .

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad \text{como: } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

(Equação característica
da eq. dif. de 2ª ordem)

- A equação característica é uma equação algébrica do segundo grau em r .
- Pode apresentar duas raízes reais distintas, raízes repetidas ou raízes complexas conjugadas.

Equações homogêneas

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0 \quad \text{como: } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

(Equação característica
da eq. dif. de 2ª ordem)

- A **equação característica** é uma equação algébrica do segundo grau em r .
- Pode apresentar duas raízes reais distintas, raízes repetidas ou raízes complexas conjugadas.
- Para o caso de raízes reais distintas, tem-se duas soluções para a equação diferencial.

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_1 da eq. característica.**

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_1 da eq. característica.**

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$y = e^{rt} \quad (\text{solução proposta})$$

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_1 da eq. característica.**

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$y = e^{rt} \quad (\text{solução proposta})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_1 da eq. característica.**

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$y = e^{rt} \quad (\text{solução proposta})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

$$y_1 = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{r_2 t} \quad (\text{soluções para eq. dif.})$$

Equações homogêneas

- **Raízes reais distintas r_1 e r_2** da eq. característica.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$y = e^{rt} \quad (\text{solução proposta})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

$$y_1 = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{r_2 t} \quad (\text{soluções para eq. dif.})$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

**Solução geral
da eq. dif. de
2ª ordem.**

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Solução geral

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Solução geral

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{Solução geral}$$

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Independentemente dos valores das condições iniciais é sempre possível determinar as constantes C_1 e C_2 .

Equações homogêneas

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} \quad \text{Solução geral}$$

- Uma solução particular pode ser encontrada substituindo-se as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad y'(t_0) = y'_0$$

- Independentemente dos valores das condições iniciais é sempre possível determinar as constantes C_1 e C_2 .
- Além disso, existe apenas uma escolha possível para cada par de condições iniciais.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad \text{e} \quad r_2 = -3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5re^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad \text{e} \quad r_2 = -3 \Rightarrow y_1 = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-3t}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 3$$

✓ Propor a solução do tipo exponencial:

$$y = e^{rt} \Rightarrow y' = re^{rt} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rt}$$

✓ Substituir a proposta na eq. dif. de 2ª ordem.

$$r^2 e^{rt} + 5r e^{rt} + 6e^{rt} = 0 \quad \text{mas, } e^{rt} \neq 0 \quad \forall t$$

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r + 2)(r + 3) = 0$$

$$r_1 = -2 \quad \text{e} \quad r_2 = -3 \Rightarrow y_1 = e^{-2t} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{-3t}$$

$$y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t}$$

Solução geral
da eq. dif.

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

Solução do PVI

Exemplo 1: Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

✓ Derivar a solução geral e compor um sistema:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} \\ y' = -2C_1 e^{-2t} - 3C_2 e^{-3t} \end{cases} \Rightarrow \text{Inserindo: } y(0) = 2 \text{ e } y'(0) = 3$$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = -2C_1 - 3C_2 \end{cases}$$

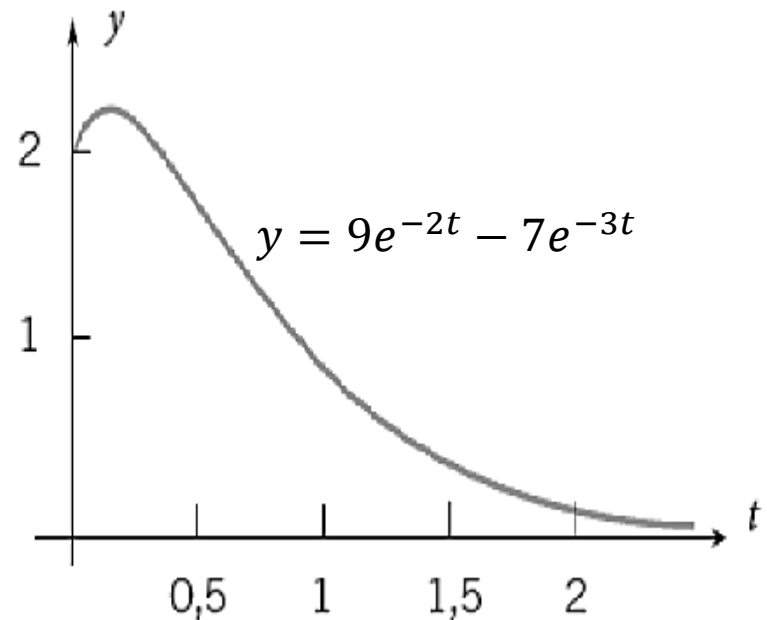
$$\begin{cases} C_1 = 2 - C_2 \\ 3 = -2(2 - C_2) - 3C_2 \end{cases}$$

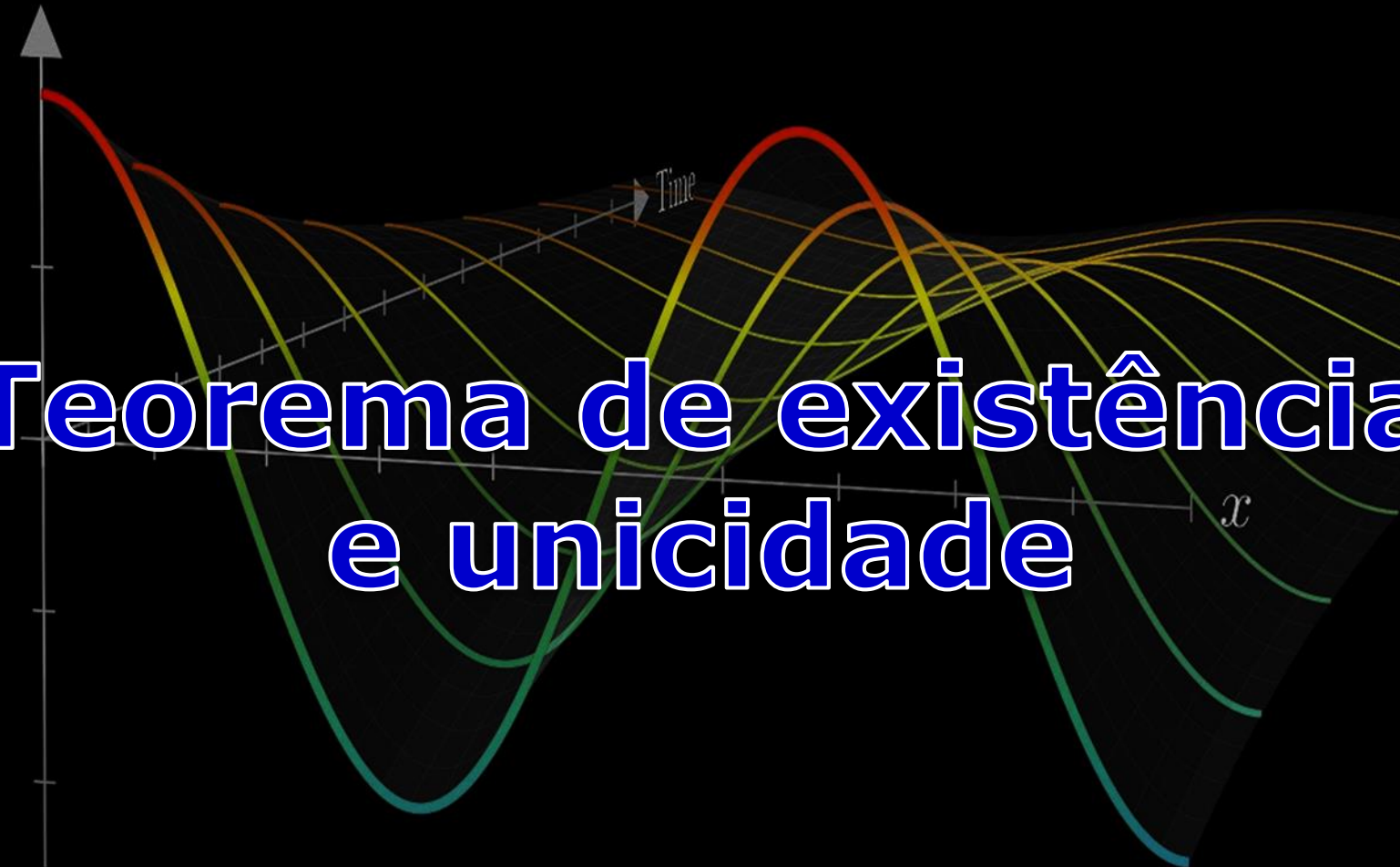
$$\begin{cases} C_1 = 9 \\ C_2 = -7 \end{cases}$$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

Solução do PVI

**Gráfico da
solução do PVI**





The background features a 3D plot of a surface with a family of curves. The surface is represented by a grid of lines. A series of curves, colored in a gradient from red to green, are plotted on the surface. These curves represent solutions to a differential equation. The axes are labeled 'Time' (vertical) and 'x' (horizontal). The curves start at different points on the 'x' axis and evolve over 'Time'. The text 'Teorema de existência e unicidade' is overlaid on the plot.

Teorema de existência e unicidade

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_0$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I .

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_0$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_0$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_0$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*
- *$y = \phi(t)$ é pelo menos duas vezes diferenciável.*

Teorema 3.2.1 (Existência e unicidade)

Seja o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \mid y(t_0) = y_0 \text{ e } y'(t_0) = y'_0$$

Onde p , q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto $t = t_0$.

Então, existe exatamente, uma solução $y = \phi(t)$ deste problema em todo intervalo I .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução.*
- *A solução é única.*
- *A solução* está definida em todo intervalo onde os coeficientes são contínuos.*
- *$y = \phi(t)$ é pelo menos duas vezes diferenciável.*

* Para a maioria dos problemas não é possível escrever solução útil.



Outros teoremas

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Consequências do princípio da superposição

- *Iniciando com duas soluções é possível construir uma família de soluções.*

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Então, a combinação linear $y = C_1y_1 + C_2y_2$ também será solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2 .

Consequências do princípio da superposição

- *Iniciando com duas soluções é possível construir uma família de soluções.*
- *Se as constantes satisfazem as condições iniciais, necessariamente devem satisfazer o **sistema das soluções e das condições iniciais** a seguir...*

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

➤ Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2 ; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2 ; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.
- O **determinante** desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2 ; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.
- O **determinante** desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}$$

Teorema 3.2.2 (Princípio da superposição)

- Sistema das soluções e condições iniciais:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(t_0) + C_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = C_1 y'_1(t_0) + C_2 y'_2(t_0) \end{cases}$$

- As incógnitas são as constantes C_1 e C_2 ; Os coeficientes são $y_1(t_0)$ e $y_2(t_0)$ e suas derivadas.
- O **determinante** desses coeficientes deverá ser $\neq 0$ para que as constantes C_1 e C_2 tenham valor único.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} \quad \text{Wronskiano}$$

$$W = y_1(t_0) y'_2(t_0) - y'_1(t_0) y_2(t_0)$$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 3.1 e 3.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.1 e 3.2 do Boyce.

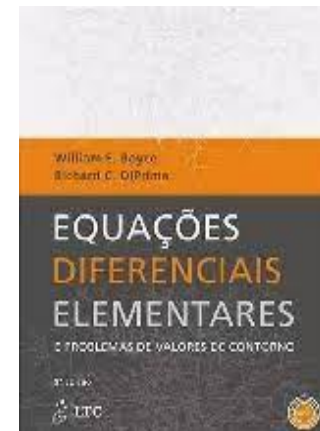
Próxima aula:

- Eq. dif. de 2ª ordem, raízes repetidas e complexas.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.