Cálculo I

Engenharia

Aula 13 Derivada de Funções trigonométricas

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Derivadas das funções trigonométricas

- Para as seis funções trigonométricas básicas:

$$\boldsymbol{senx} \qquad \boldsymbol{cosx} \qquad \boldsymbol{tgx = \frac{senx}{cosx}}$$

$$cossecx = \frac{1}{senx} \qquad secx = \frac{1}{cosx} \qquad cotgx = \frac{cosx}{senx}$$

- A variável independente ***x*** será definida em unidades de radianos.

Derivadas do *senx* a partir da definição

- Seja $f(x) = \text{sen}x$

- Utilizaremos dois limites fundamentais (Teorema 2.6.4):

$$\lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1 \qquad e \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1 - cosh}{h} = 0$$

Derivadas do *senx* a partir da definição

- Seja $f(x) = \text{sen}x$

- Utilizaremos dois limites fundamentais (Teorema 2.6.4):

$$\lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1 \qquad e \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1 - cosh}{h} = 0$$

- Pela definição:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h} \qquad \dots$$

Derivadas do *senx* e *cosx*

- Como resultado da definição:

$$\frac{d}{dx}[\text{sen}x] = cosx$$

- Por raciocínio análogo obtém-se:

$$\frac{d}{dx}[\text{cos}x] = -senx$$

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $f(x) = x\,senx$

Demais funções trigonométricas

- As outras quatro funções trigonométricas podem ser derivadas através das regras do quociente, produto e dos resultados para ***senx*** e ***cosx***.

$$tgx = \frac{senx}{cosx}$$

$$cossecx = \frac{1}{senx}$$

$$secx = \frac{1}{cosx}$$

$$cotgx = \frac{cosx}{senx}$$

Exemplo 2

Encontrar a derivada da função $tgx = \frac{senx}{cosx}$

Exercício

Encontrar a derivada da função $secx = \frac{1}{cosx}$

Derivadas das funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = senx$$

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen} x] = cosx$$

Derivadas das funções trigonométricas

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = sen x$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen} x] = cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = tg(x)\sec(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cossec} x] = -cossec(x)cotg(x)$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg} x] = sec^2 x = (sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx}[\text{cotg} x] = -cossec^2 x = (cossec x)^2$$

Prof. Henrique A M Faria

Regra da cadeia em derivadas

Regra da cadeia em derivadas

- Nesta seção encontraremos a regra para derivar uma função composta $f \circ g$.

- Considere o problema de calcular:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^2+1\right)^{100}\right]$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

$$\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \quad e \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad \textit{em que}: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

$$\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \quad e \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

3. Mas queremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + 1\right)^{100}\right]$$

Regra da cadeia em derivadas

1. Escrevemos a função como uma composta:

$$\boldsymbol{h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) \quad em\ que: \begin{cases} g(x) = x^2 + 1 \\ f(x) = x^{100} \end{cases}}$$

2. Introduzimos duas novas variáveis:

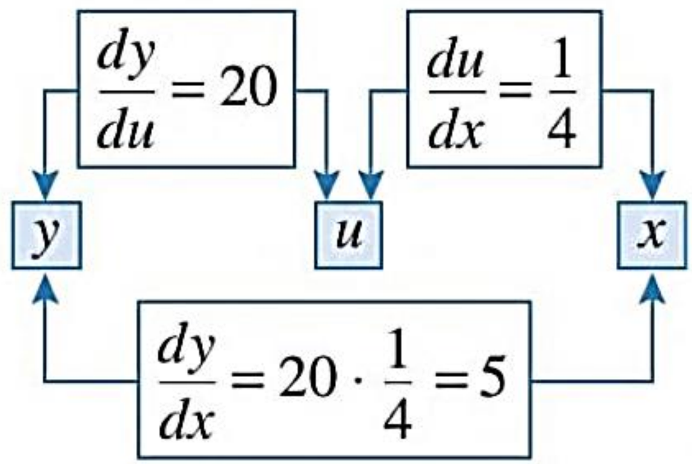
$$\boldsymbol{\begin{cases} u = g(x) = x^2 + 1 \\ y = (u)^{100} \end{cases} \qquad \frac{dy}{du} = 100u^{99} \quad e \quad \frac{du}{dx} = 2x}$$

3. Mas queremos:

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[\big(x^2 + 1\big)^{100}\Big] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 100\big(x^2 + 1\big)^{99} 2x}$$

Regra da cadeia em derivadas

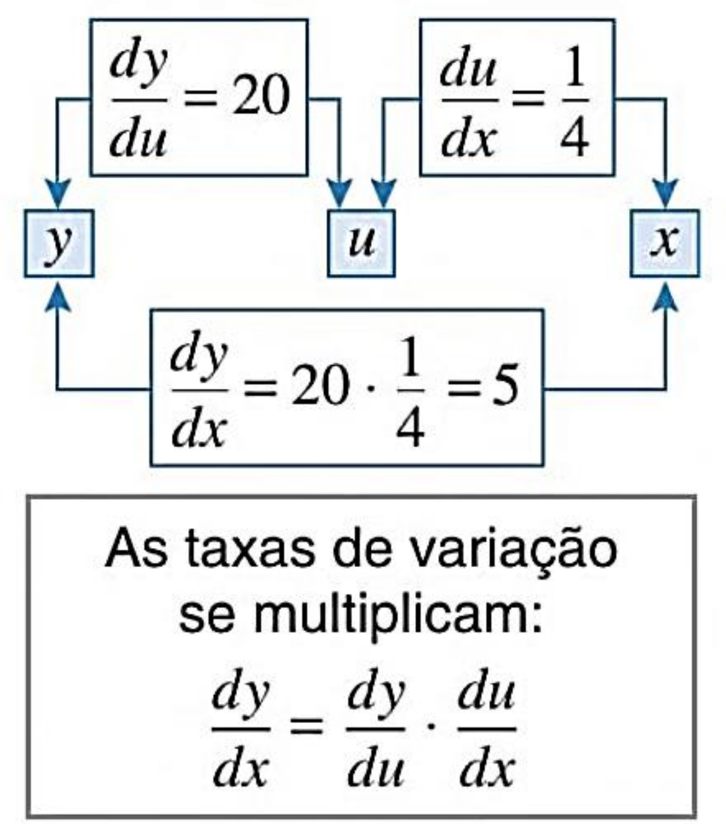
- Entendendo a derivada como taxa de variação:



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

- Entendendo a derivada como taxa de variação:



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

2.6.1 TEOREMA (***Regra da cadeia***) *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto g(x), então a composição $f \circ g$ será diferenciável no ponto x. Além disso, se*

$$y = f(g(x)) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \tag{1}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

2.6.1 TEOREMA (*Regra da cadeia*) *Se g for diferenciável no ponto x e f for diferenciável no ponto g(x), então a composição f ∘ g será diferenciável no ponto x. Além disso, se*

$$y = f(g(x)) \quad \text{e} \quad u = g(x)$$

então $y = f(u)$ e

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}} \tag{1}$$

"Derivada da função de fora $\boldsymbol{f(x)}$ vezes a derivada da função de dentro $\boldsymbol{g(x)}$".

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Regra da cadeia em derivadas

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

A derivada de $f(g(x))$ é a derivada da função de fora calculada na função de dentro vezes a derivada da função de dentro.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{Derivada da função de fora calculada na função de dentro}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{Derivada da função de dentro}}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 1

Encontrar a derivada da função $y = cos(x^3)$

Exercício

Encontrar a derivada da função $y = \frac{d}{dx}[\sqrt{x^2 + 1}]$

Fórmulas generalizadas de derivação

- Se a regra da cadeia for escrita: $$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}$$

FÓRMULAS GENERALIZADAS DE DERIVAÇÃO

$$\frac{d}{dx}[u^r] = ru^{r-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{sen } u] = \cos u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\cos u] = -\text{sen } u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\text{tg } u] = \sec^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cotg } u] = -\text{cossec}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = \sec u \text{ tg } u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}[\text{cossec } u] = -\text{cossec } u \text{ cotg } u \frac{du}{dx}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo 2

Encontrar a derivada da função:

$$y = sen(\sqrt{1 + cosx})$$

Taxas relacionadas

Taxas relacionadas

- Problemas em que uma certa quantidade varia em relação a outras taxas de variação.

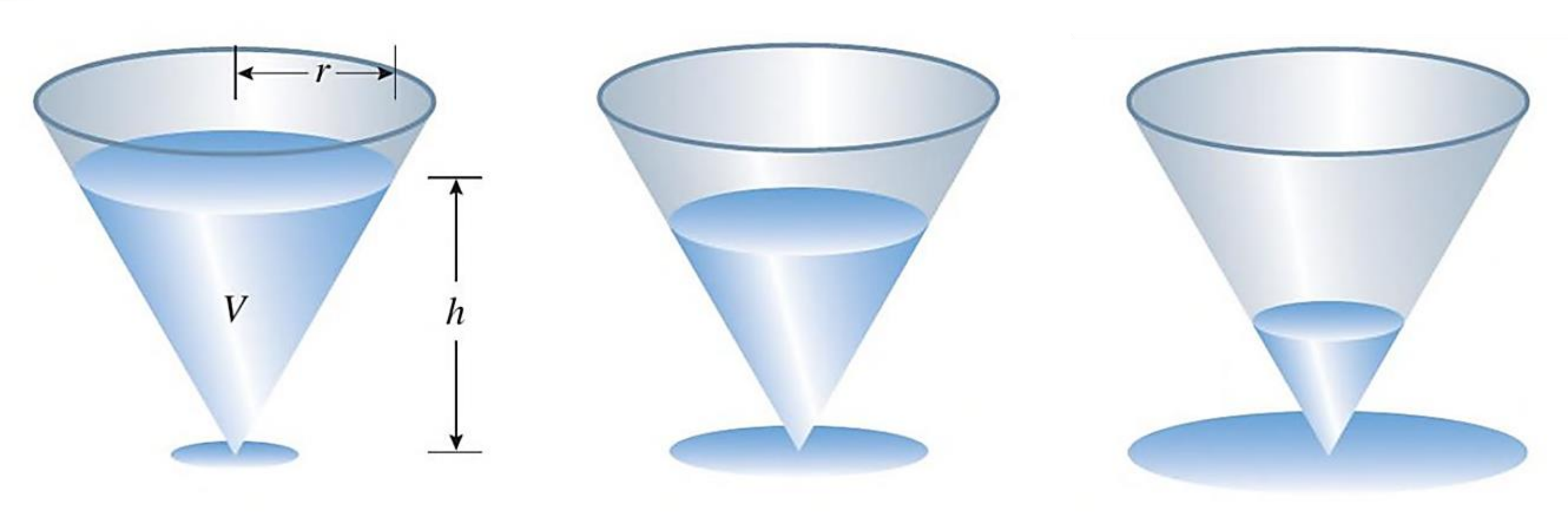
Exemplo (Filtro cônico)

- Seja um líquido escoando por um filtro cônico;

- Estaremos interessados em encontrar a taxa de variação do volume em relação ao tempo.

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)



Volume do cone:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{Mas: } r = r(t) \text{ e } h = h(t)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\left\{r^2\frac{d}{dt}h + h.2r.\frac{d}{dt}r\right\}$$

Taxas relacionadas

Exemplo (Filtro cônico)

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\frac{d}{dt}[r^2h]$$

$$\frac{d}{dt}V = \frac{1}{3}\pi\left\{r^2\frac{d}{dt}h + h.2r.\frac{d}{dt}r\right\}$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3}\left\{r^2\frac{dh}{dt} + 2rh\frac{dr}{dt}\right\}}$$

Exemplo

O óleo derramado por um navio tanque se espalha em forma circular cujo raio cresce a uma taxa constante de $\mathbf{0,5\ m/s}$.

Com que velocidade a área estará crescendo quando o raio for de $\mathbf{30\ m}$?

Resp.: $\frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} \cong \mathbf{94\ m^2/s}$

Taxas relacionadas

Uma Estratégia para Resolver Problemas de Taxas Relacionadas

Passo 1 Associe uma letra a cada quantidade que varia com o tempo e às demais que possam ser relevantes ao problema. Dê uma definição para cada letra.

Passo 2 Identifique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Interprete cada taxa como uma derivada.

Passo 3 Encontre uma equação que relacione as variáveis cujas taxas de variação foram identificadas no Passo 2. Para isso, muitas vezes é conveniente esboçar uma figura devidamente etiquetada que ilustre as relações.

Passo 4 Derive ambos os lados da equação obtida no Passo 3 em relação ao tempo para obter uma relação entre as taxas de variação conhecidas e a taxa de variação desconhecida.

Passo 5 *Depois* de completar o Passo 4, substitua todos os valores conhecidos das taxas de variação e das variáveis, e só então resolva a equação para a taxa de variação desconhecida.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

Aproximação local

- Na seção 3.2 vimos que se uma função for diferenciável em $\boldsymbol{x_o}$, então uma pequena parte de seu gráfico em torno do ponto $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ se aproxima de uma reta não vertical.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

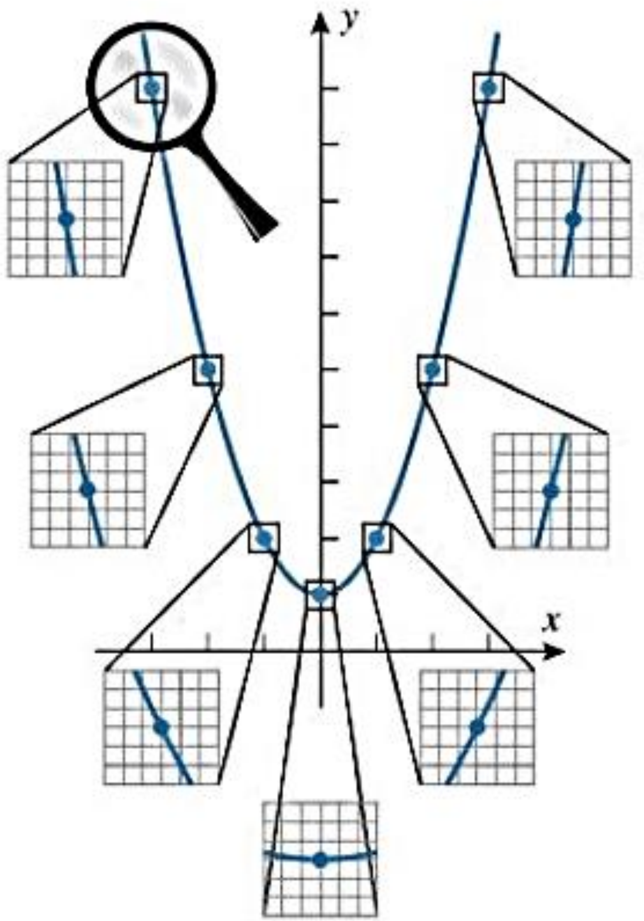
- Na seção 3.2 vimos que se uma função for diferenciável em $\boldsymbol{x_o}$, então uma pequena parte de seu gráfico em torno do ponto $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ se aproxima de uma reta não vertical.

- Por **exemplo**, no gráfico $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ a reta que melhor se aproxima de $\boldsymbol{f}$ em $\boldsymbol{P(x_o, f(x_o))}$ é a reta tangente:

$$\boldsymbol{y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)}$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

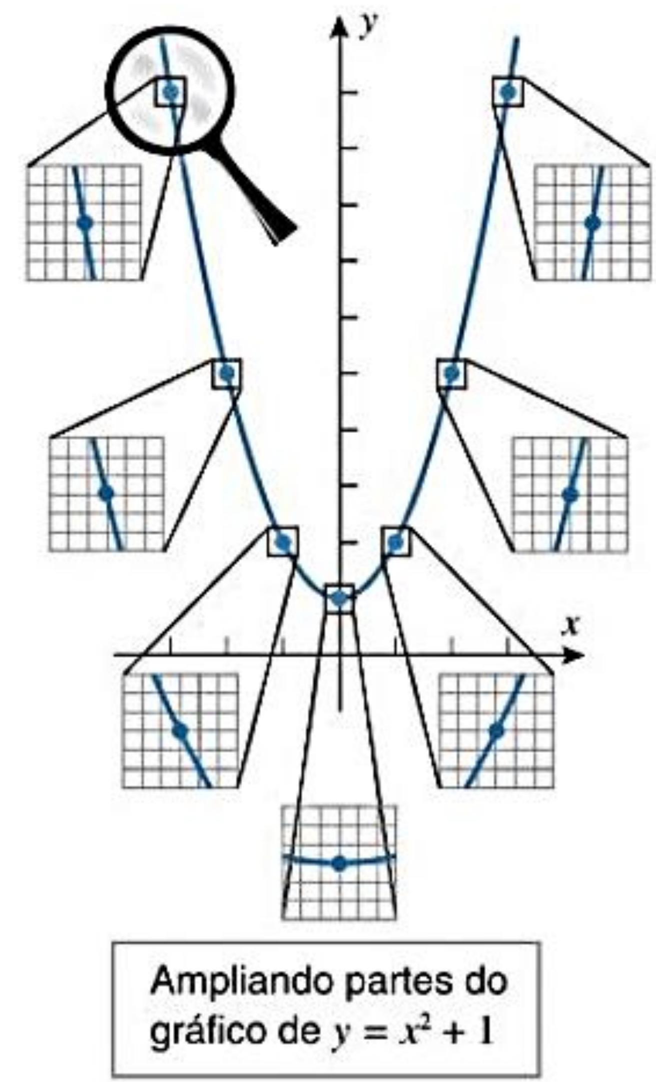


Ampliando partes do gráfico de $y = x^2 + 1$

- Exemplo, $y = x^2 + 1$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local

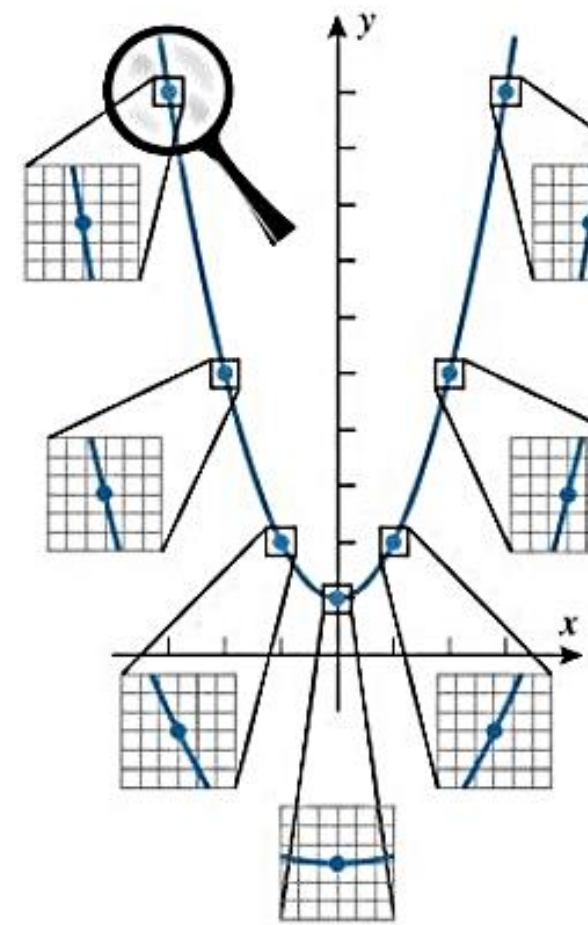


- Exemplo, $y = x^2 + 1$
- Então, para valores de x muito próximos de x_o, tem-se:

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Aproximação local



Ampliando partes do gráfico de $y = x^2 + 1$

- Exemplo, $y = x^2 + 1$
- Então, para valores de x muito próximos de x_o, tem-se:

$$f(x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

- Esse tratamento é denominado **aproximação local de f em x_o**. Também expresso por:

$$f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x_o)(\Delta x)$$

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

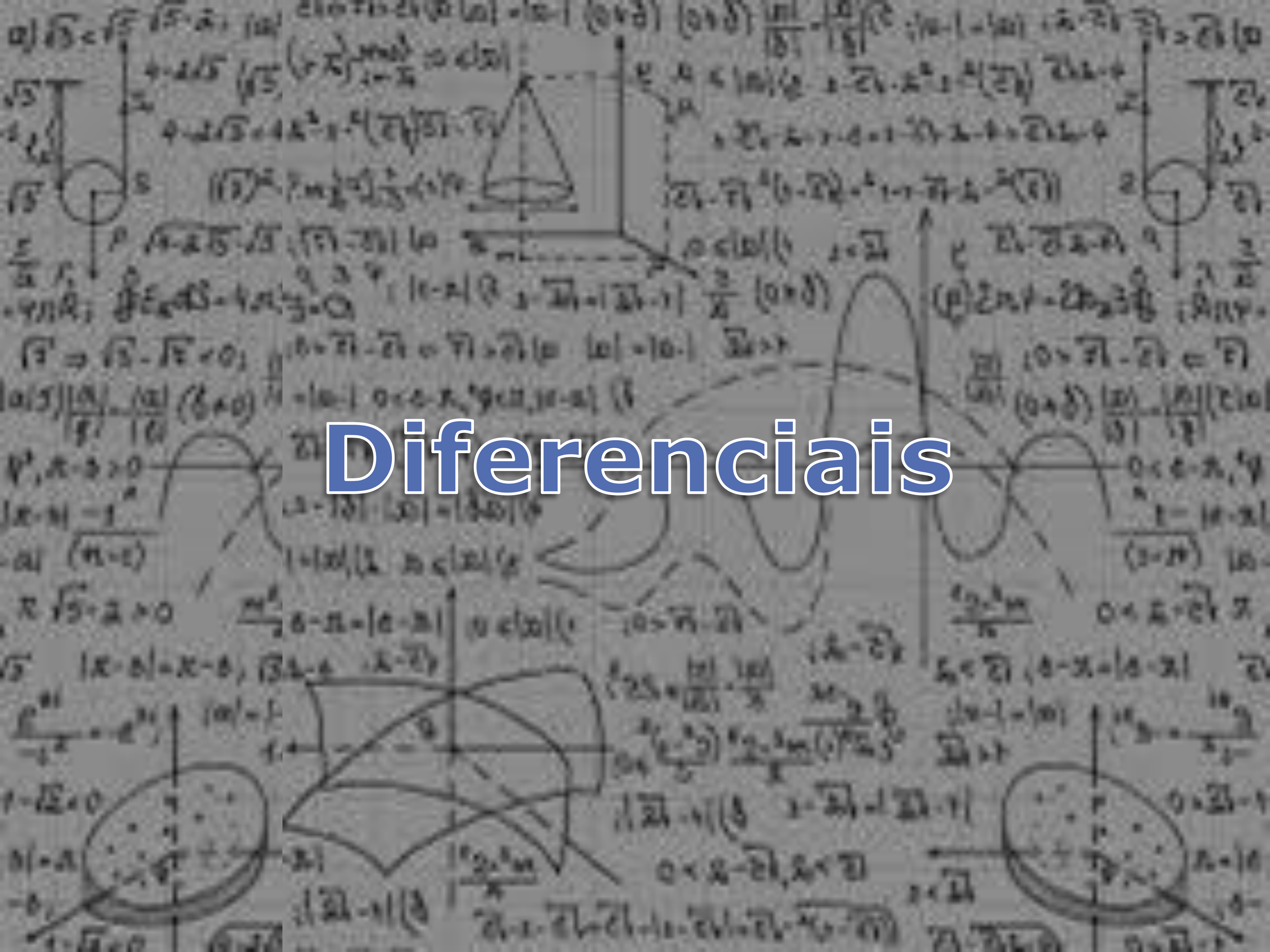
(a) Encontrar a aproximação linear local de
$f(x) = \sqrt{x}$ em $x_o = 1$;

(b) Use a aproximação de (a)
para estimar a raiz $\sqrt{1,1}$,
com duas casas decimais.

Resp.: $a)\ \sqrt{x} \approx 1 + (x-1)/2$

b) $\sqrt{1,1} \approx 1,05$

Diferenciais



Diferenciais

- No desenvolvimento do Cálculo a notação de Leibniz (dy/dx) acabou prevalecendo sobre a notação de Newton;
- Uma das razões é por sugerir formas como a **regra da cadeia**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Diferenciais

- No desenvolvimento do Cálculo a notação de Leibniz (dy/dx) acabou prevalecendo sobre a notação de Newton;
- Uma das razões é por sugerir formas como a **regra da cadeia**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

- Nesta seção iremos definir os símbolos "$\boldsymbol{dy}$" e "$\boldsymbol{dx}$", chamados de **diferenciais**, de modo que dy/dx possa ser tratados como um razão.

Diferenciais

- Seja uma função $\boldsymbol{f}$ diferenciável em um ponto $\boldsymbol{x}$;
- Sendo $\boldsymbol{dx}$ definido como variável independente, que poderá assumir qualquer valor real;

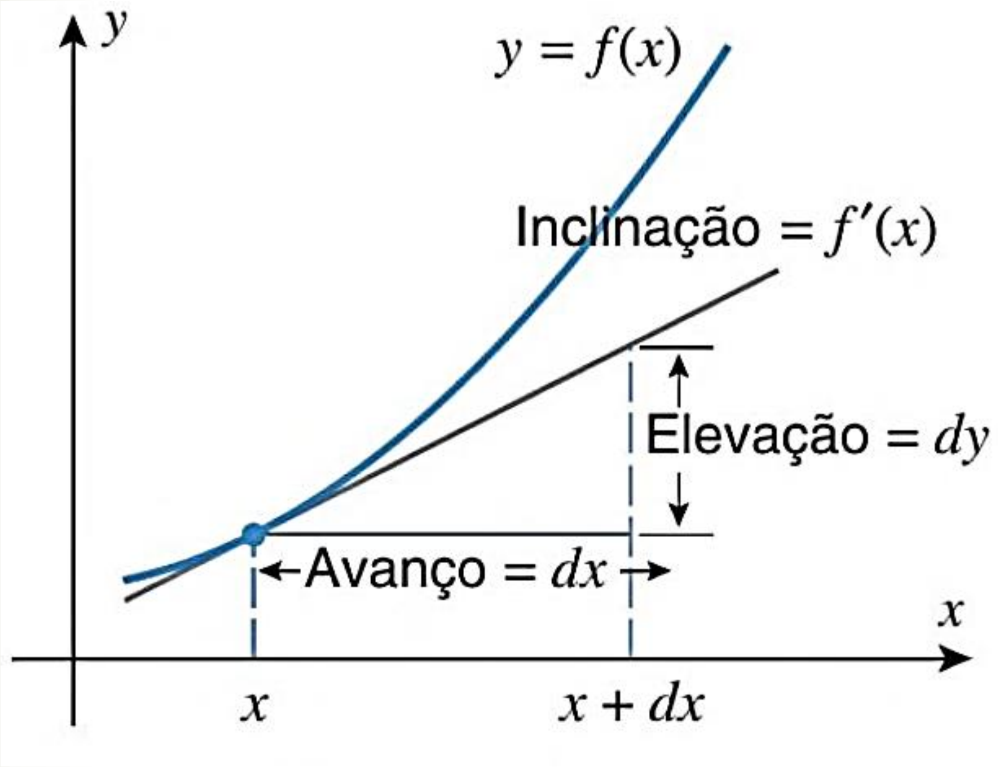
Diferenciais

- Seja uma função ***f*** diferenciável em um ponto ***x***;
- Sendo ***dx*** definido como variável independente, que poderá assumir qualquer valor real;
- Definimos então que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \Longrightarrow \qquad dy = f'(x)dx$$

Diferenciais

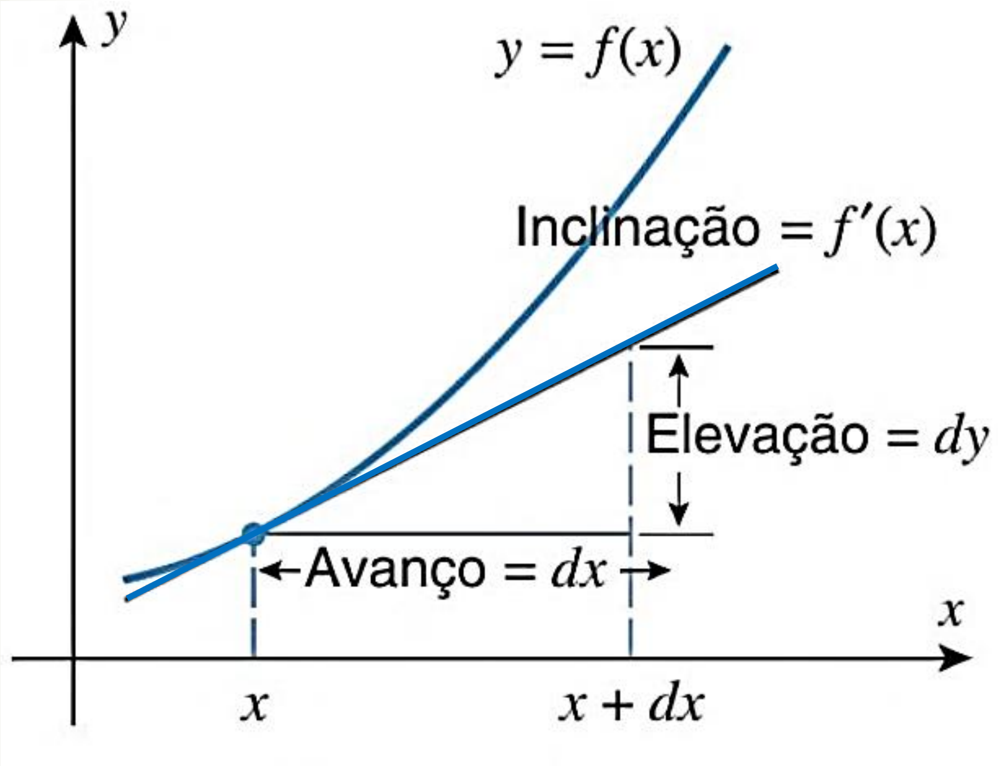
- Geometricamente, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente gráfico de f em x;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciais

- Geometricamente, $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente gráfico de f em x;



- As **diferenciais** podem ser vistas como **elevação e avanço dessa reta tangente**.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplo

Expresse a derivada em relação a $\boldsymbol{x}$ de $y = x^2$ na forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx.

Exemplo

Expresse a derivada em relação a $\boldsymbol{x}$ de $y = x^2$ na forma diferencial e discuta a relação entre dy e dx.

- O avanço de uma unidade em dx produz uma avanço de duas unidades em dx ao longo da reta tangente.

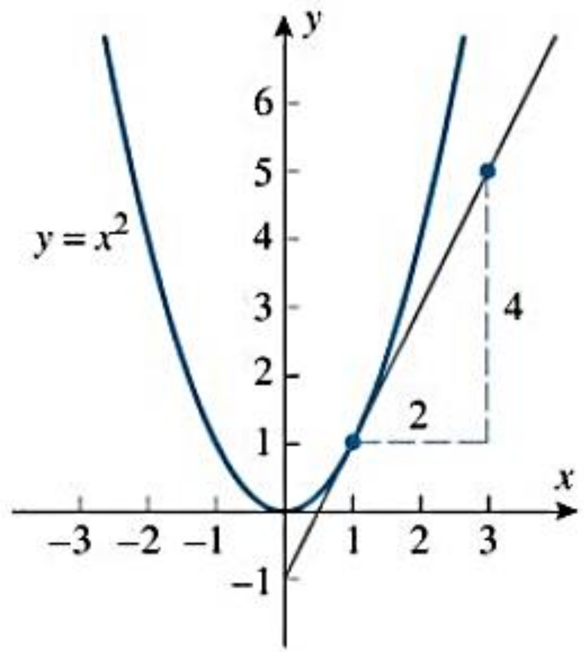
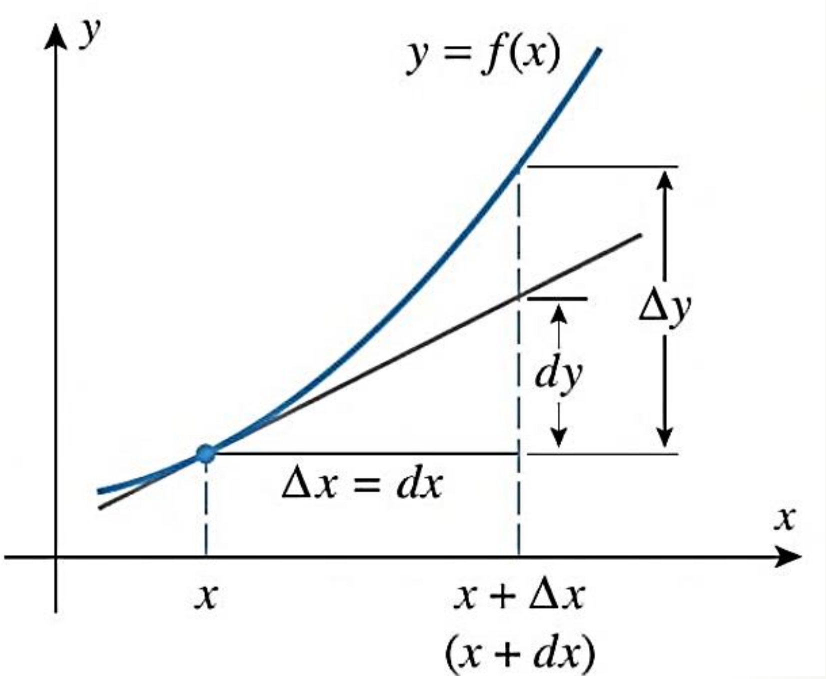


Figura 3.5.6

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

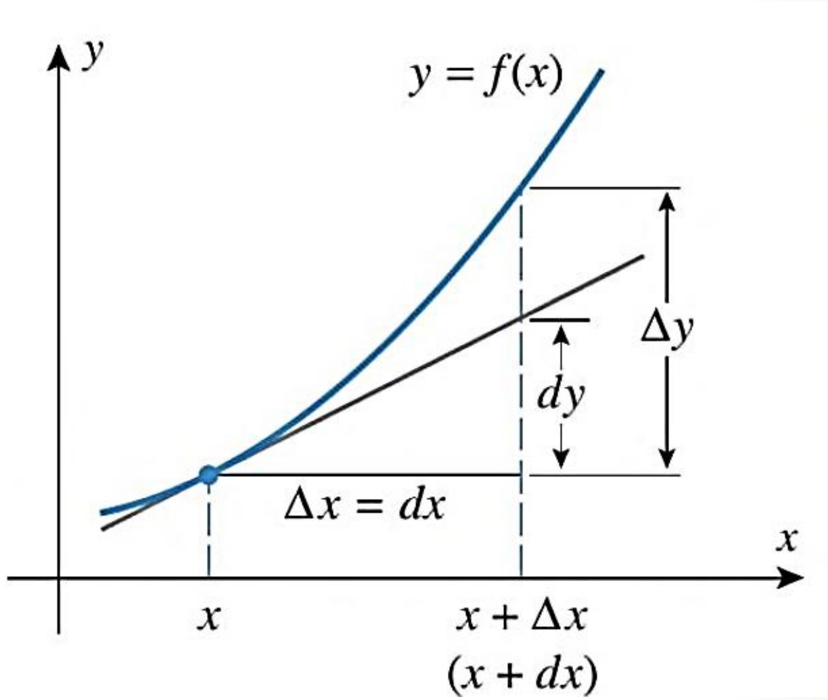
- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta\boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

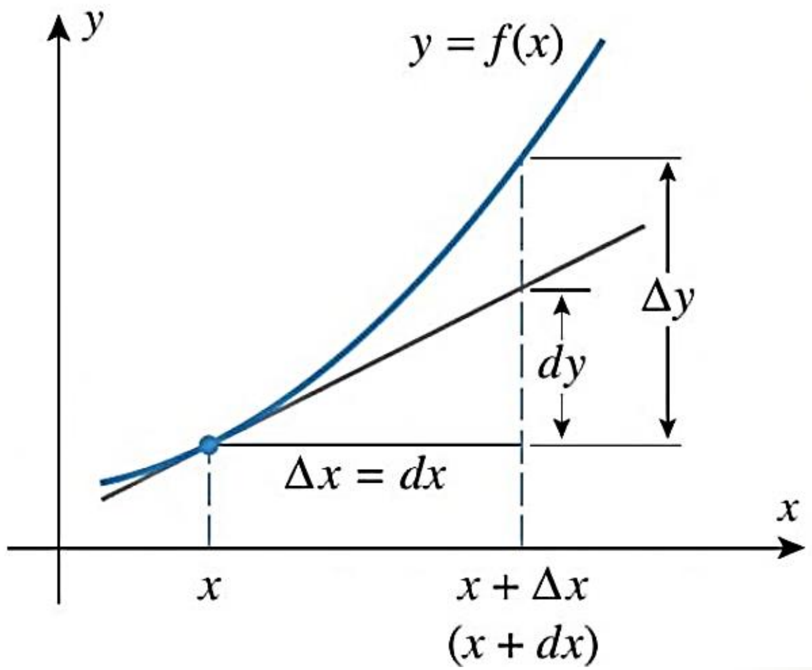
- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta\boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$;
- Δy: variação em $\boldsymbol{y}$ quando se percorre a curva $y = f(x)$;



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferença entre incremento e diferencial

- Seja $\boldsymbol{dx} = \Delta \boldsymbol{x}$;
- Caminha-se de $\boldsymbol{x}$ até $\boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x}$;
- $\Delta \boldsymbol{y}$: variação em $\boldsymbol{y}$ quando se percorre a curva $y = f(x)$;
- $\boldsymbol{dy}$: variação em $\boldsymbol{y}$ quando se caminha ao longo da reta tangente.



Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Diferenciais

FÓRMULA PARA DERIVADA	FÓRMULA PARA DIFERENCIAL
$\frac{d}{dx}[c] = 0$	$d[c] = 0$
$\frac{d}{dx}[cf] = c\frac{df}{dx}$	$d[cf] = c\,df$
$\frac{d}{dx}[f+g] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$	$d[f+g] = df + dg$
$\frac{d}{dx}[fg] = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$	$d[fg] = f\,dg + g\,df$
$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$	$d\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$

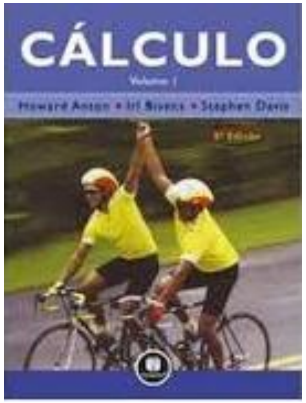
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Para depois desta aula:

- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

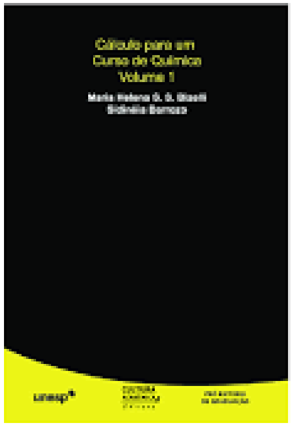
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br