Cálculo I

Engenharia

Aula 14 Derivada Implícita Logarítimica e Exponenciais Teorema de L'Hôpital

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Derivadas

➢ Para encerrar os conceitos iniciais sobre as derivadas abordaremos na aula de hoje:

- ✓ Derivada implícita;
- ✓ Derivadas das funções logarítmicas;
- ✓ Derivadas das funções exponenciais;
- ✓ Teorema de L'Hopital aplicado aos limites.

Derivação implícita

Derivada implícita

- A equação $y = f(x)$, em que a variável y aparece sozinha é definida explicitamente;

- Algumas vezes, a variável dependente y não aparece sozinha e não pode ser isolada;

Derivada implícita

- A equação $y = f(x)$, em que a variável y aparece sozinha é definida explicitamente;

- Algumas vezes, a variável dependente y não aparece sozinha e não pode ser isolada;

- **Por exemplo**: $\boldsymbol{yx + y + 1 = x}$

- Mesmo assim é possível derivar a função, denominada derivação implícita.

Definição 4.1.1

"Dizemos que uma equação em x e y define a função implicitamente se o gráfico de $y = f(x)$, coincidir com alguma porção do gráfico da equação."

Exemplo 1

O gráfico da equação $x = y^2$ não é uma função $y = f(x)$, pois não passa no teste da reta vertical. Contudo, pode ser resolvida para y.

Exemplo 1

O gráfico da equação $x = y^2$ não é uma função $y = f(x)$, pois não passa no teste da reta vertical. Contudo, pode ser resolvida para y.

$$f_1(x) = +\sqrt{x}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{x}$$

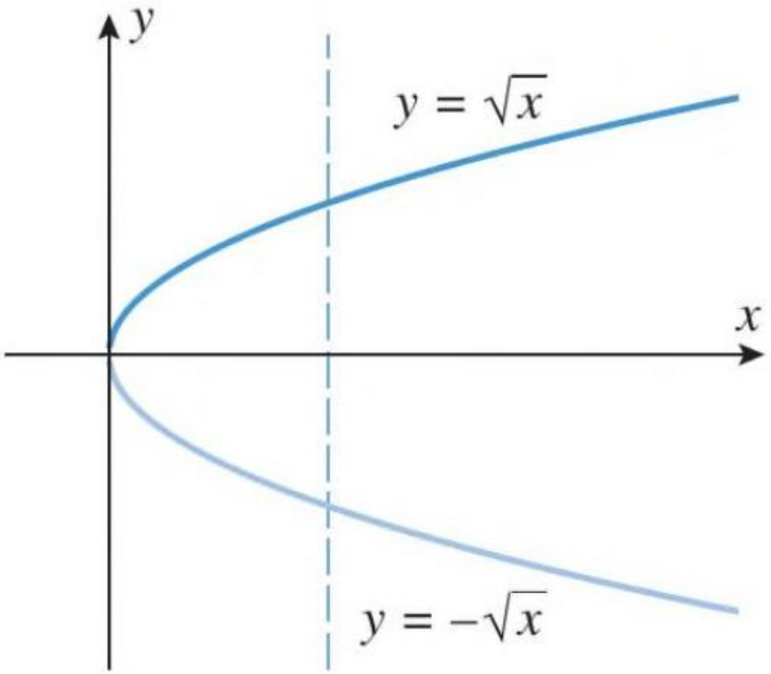
Exemplo 1

O gráfico da equação $x = y^2$ não é uma função $y = f(x)$, pois não passa no teste da reta vertical. Contudo, pode ser resolvida para y.

$$f_1(x) = +\sqrt{x}$$

$$f_2(x) = -\sqrt{x}$$

Assim, $x = y^2$ define implicitamente as funções: f_1 e f_2.



Diferenciação implícita

- Muitas vezes, não é necessário resolver a equação de y em função de x para diferenciar funções definidas explicitamente;

- **Exemplo simples**: $\boldsymbol{xy = 1}$

Exemplo 2

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ na equação: $5y^2 + seny = x^2$

Exercício

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ na equação: $y + seny = x$

Derivada das funções logarítmicas

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - lnx}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-lnx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Derivada das funções logarítmicas

- Estabelecemos que a função $f(x) = lnx$ é diferenciável para $x > 0$;

- Aplicando a definição da derivada:

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-lnx}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

- Substituindo:

$$\boldsymbol{v = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad (h = vx)}$$

$$\boldsymbol{v \to 0 \quad qdo \;\; h \to 0}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

Substituindo:

$$\boldsymbol{v = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad (h = vx)}$$

$$\boldsymbol{v \to 0 \quad qdo \;\; h \to 0}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v\to 0}\frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{v\to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v\to 0}\frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{v\to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v\to 0}(1+v)^{1/v}]$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} lne$$

Derivada das funções logarítmicas

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \lim_{v \to 0} \frac{ln(1+v)}{vx}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{v \to 0} ln(1+v)^{1/v}$$

$$= \frac{1}{x} ln[\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v}]$$

- Mas: $\lim_{v \to 0}(1+v)^{1/v} = e$

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} lne$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}} \qquad x > 0$$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \dfrac{lnx}{lnb}$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \frac{lnx}{lnb}$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}[\frac{lnx}{lnb}]$$

$$= \frac{1}{lnb}\frac{d}{dx}[lnx]$$

Derivada das funções logarítmicas

- Para um logaritmo qualquer: $\log_b x = \dfrac{lnx}{lnb}$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{d}{dx}[\frac{lnx}{lnb}]$$

$$= \frac{1}{lnb}\frac{d}{dx}[lnx]$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x\, lnb}} \qquad x > 0$$

Exemplos

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

a) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \ln\left(\frac{x^2 senx}{\sqrt{1+x}}\right)$

Diferenciação logarítmica

- Técnica útil para derivar funções compostas de produtos, quocientes e potências.

- **Exemplo**: encontrar $\frac{dy}{dx}$ em $y = \frac{x^2 \sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$

Derivadas das funções exponenciais

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;

- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x$$

Derivada das funções exponenciais

- Seja a função $y = b^x$, uma exponencial com base $b > 0$ e $b \neq 0$;

- Aplica-se a definição do logaritmo e deriva-se o resultado implicitamente:

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\, lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\, lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = ylnb$$

Derivada das funções exponenciais

$$y = b^x \quad \Rightarrow \quad \log_b y = x \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\log_b y] = \frac{d}{dx}[x]$$

$$\frac{1}{y\,lnb}\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = ylnb$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[b^x] = b^x lnb}$$

- quando: $b = e = 2{,}71\ldots$

$$\boxed{\frac{d}{dx}[e^x] = e^x}$$

Exemplos Encontrar $\frac{dy}{dx}$ nas funções:

a) $y = 2^x$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = e^{\cos x}$

Derivadas das funções *log* e *exp*

Regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}[lnu] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x\,lnb} \quad x > 0$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b u] = \frac{1}{u\,lnb}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[b^x] = b^x lnb$$

$$\frac{d}{dx}[b^u] = b^u lnb\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\frac{du}{dx}$$

Teorema de L'Hôpital aplicado aos limites

Teorema de L'Hôspital

- É um método para se obter limites utilizando derivadas;
- Usado em programas computacionais para cálculo de muitos limites;

Teorema de L'Hôspital

- É um método para se obter limites utilizando derivadas;
- Usado em programas computacionais para cálculo de muitos limites;
- O Teorema simplifica os cálculos;
- Porém, não é aplicável em qualquer caso.

Formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$

- Um limite da forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$ é denominado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$

- Um limite da forma:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

- Em que $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$ quando $x \to a$ é denominado forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$;
- **Exemplos**:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = 2 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

Formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$

- Contudo, há muitas formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ nas quais, nem o método algébrico, nem o geométrico resolvem o limite;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$

- Contudo, há muitas formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ nas quais, nem o método algébrico, nem o geométrico resolvem o limite;

- **Por exemplo**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$$

Formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$

- Contudo, há muitas formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$ nas quais, nem o método algébrico, nem o geométrico resolvem o limite;

- **Por exemplo**:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$$

- Ao substituir "0" teremos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como resolver esse limite?

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- Os limites da razão $\frac{f(x)}{g(x)}$ nos quais o numerador e o denominador têm como resultados ∞ é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- Os limites da razão $\frac{f(x)}{g(x)}$ nos quais o numerador e o denominador têm como resultados ∞ é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$;

- **Exemplo**: $$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x-1}$$

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- Os limites da razão $\frac{f(x)}{g(x)}$ nos quais o numerador e o denominador têm como resultados ∞ é chamado forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$;

- **Exemplo**: $$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x-1}$$

- Não é óbvio calcular esse limite, pois ambos, numerador e denominador assumem valores sem cota quando $\boldsymbol{x} \to \infty$.

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- **Exemplo**: $$\lim_{x\to\infty}\frac{lnx}{x-1}$$
- Nesse exemplo há uma disputa entre numerador e denominador;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- **Exemplo**: $\lim_{x \to \infty} \frac{lnx}{x-1}$
- Nesse exemplo há uma disputa entre numerador e denominador;
- Se o numerador ganhar, o limite resulta ∞;
- Se o denominador ganhar, a resposta será 0;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- **Exemplo**: $\lim_{x \to \infty} \frac{lnx}{x-1}$
- Nesse exemplo há uma disputa entre numerador e denominador;
- Se o numerador ganhar, o limite resulta ∞;
- Se o denominador ganhar, a resposta será 0;
- Pode ainda haver equilíbrio e o limite resultar em um número finito diferente de zero;

Formas indeterminadas do tipo $\frac{\infty}{\infty}$

- **Exemplo**: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{lnx}{x-1}$
- Nesse exemplo há uma disputa entre numerador e denominador;
- Se o numerador ganhar, o limite resulta ∞;
- Se o denominador ganhar, a resposta será 0;
- Pode ainda haver equilíbrio e o limite resultar em um número finito diferente de zero;
- Como as formas tradicionais não funcionam, o Teorema de L'Hôpital será aplicado.

Teorema de L'Hôpital forma $\frac{0}{0}$

3.6.1 TEOREMA ***(Regra de L'Hôpital para a Indeterminação 0/0)*** *Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

Se existir $\lim_{x \to a} [f'(x)/g'(x)]$, ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teorema de L'Hôpital forma $\frac{\infty}{\infty}$

3.6.2 TEOREMA ***(Regra de L'Hôpital para a Indeterminação ∞/∞)*** *Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis em um intervalo aberto que contenha $x = a$, exceto, possivelmente, em $x = a$, e que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

Se existir $\lim_{x \to a} [f'(x)/g'(x)]$, *ou se esse limite for $+\infty$ ou $-\infty$, então*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Além disso, essa afirmação também vale no caso de um limite com $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Exemplos: Solução pela regra de L'Hôpital

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ln x}{x - 1}$

Outra formas de indeterminação

A. Forma do tipo ($0 \cdot \infty$)

- A relação $0 \cdot \infty$ não é um produto de números;
- Os limites desta forma deverão ser transformados para a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Exemplo: $\lim_{x \to 0^+} x\, lnx$

Outra formas de indeterminação

B. Forma do tipo ($\infty - \infty$)

- Os limites que levam a essa forma são indeterminados, pois os dois termos exercem influências conflitantes;
- Um termo leva na direção positiva e o outro para negativa.
- As formas $\infty - \infty$ podem ser manipuladas para se obter as formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Outra formas de indeterminação

B. Forma do tipo $(\infty - \infty)$

Exemplo: $$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{senx}\right)$$

Outra formas de indeterminação

C. Formas do tipo $(0^0;\ \infty^0; 1^\infty)$

- Essas formas podem ser manipuladas, introduzindo uma variável dependente e tomando-se ln em ambos os lados da equação, para se obter as formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Outra formas de indeterminação

C. Formas do tipo $(0^0;\ \infty^0; 1^\infty)$

- Essas formas podem ser manipuladas, introduzindo uma variável dependente e tomando-se *ln* em ambos os lados da equação, para se obter as formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Exemplo: $\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x}$

Outra formas de indeterminação

C. Formas do tipo (0^0; ∞^0; 1^∞)

- Essas formas podem ser manipuladas, introduzindo uma variável dependente e tomando-se *ln* em ambos os lados da equação, para se obter as formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Exemplo: $$\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x}$$

$$y = (1+x)^{1/x} \quad \Rightarrow \quad lny = ln(1+x)^{1/x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} lny = \lim_{x \to 0^+} ln(1+x)^{1/x}$$

Outra formas de indeterminação

C. Formas do tipo $(0^0;\ \infty^0; 1^\infty)$

- Essas formas podem ser manipuladas, introduzindo uma variável dependente e tomando-se *ln* em ambos os lados da equação, para se obter as formas $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$;

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{1/x}$

$$y = (1+x)^{1/x} \quad \Rightarrow \quad lny = ln(1+x)^{1/x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} lny = \lim_{x \to 0^+} ln(1+x)^{1/x}$$

Continuar como exerc.

$Resp.: e = 2{,}71\ldots$

Para depois desta aula:

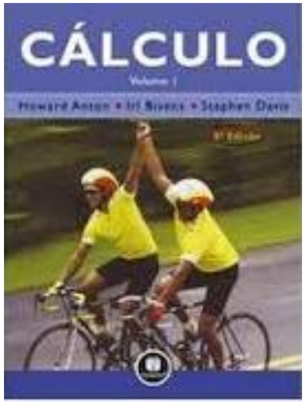
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

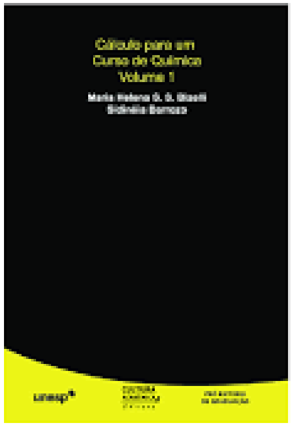
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br