

# Cálculo I

## Engenharia

### Aula 15 Derivada

### Crescimento, decrescimento, concavidade e ponto de inflexão

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)

# Introdução

- ✓ Recursos computacionais são úteis para visualizar gráficos de funções;
- ✓ Porém, nos problemas que requerem precisão de análise a aplicação da derivada é mais vantajosa;
- ✓ Neste capítulo desenvolveremos formas matemáticas para encontrar a forma exata do gráfico de funções.

# A - Funções crescentes e decrescentes

- ✓ Os termos crescente, decrescente e constante descrevem o comportamento de funções;
- ✓ O procedimento é feito varrendo-se o gráfico, em um intervalo, da esquerda para direita;
- ✓ Se funções representam modelos, a análise do crescimento fornece uma relação de proporcionalidade entre as variáveis.

# Definição 5.1.1 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

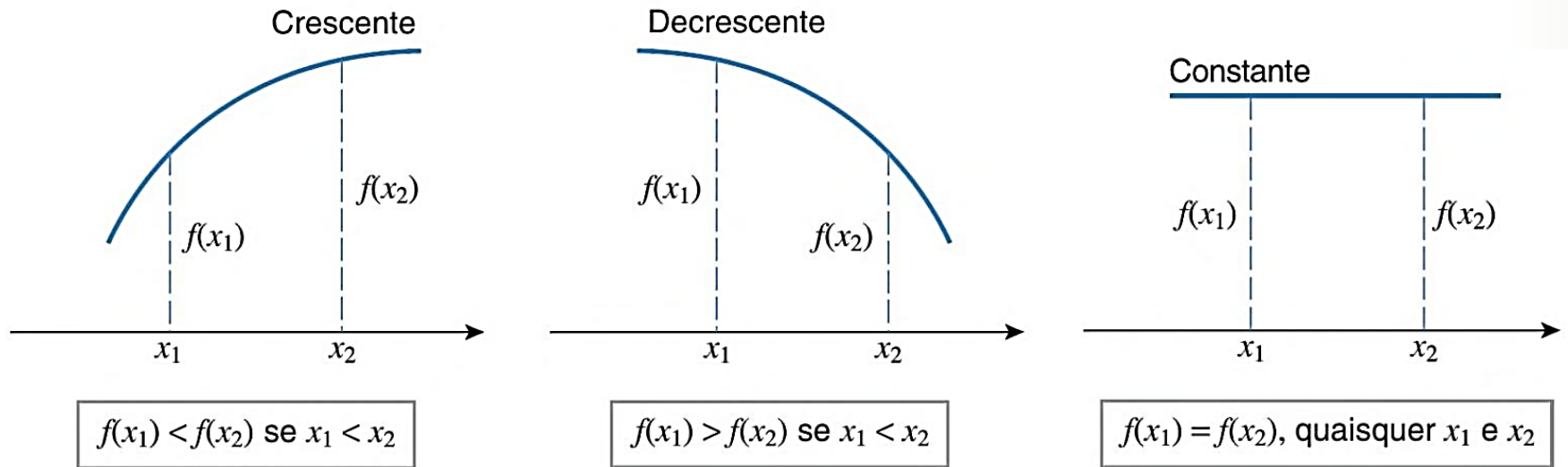
**4.1.1 DEFINIÇÃO** Seja  $f$  definida em um intervalo, e sejam  $x_1$  e  $x_2$  pontos do intervalo.

(a)  $f$  é *crescente* no intervalo se  $f(x_1) < f(x_2)$  sempre que  $x_1 < x_2$ .

(b)  $f$  é *decrescente* no intervalo se  $f(x_1) > f(x_2)$  sempre que  $x_1 < x_2$ .

(c)  $f$  é *constante* no intervalo se  $f(x_1) = f(x_2)$ , quaisquer que sejam os pontos  $x_1$  e  $x_2$ .

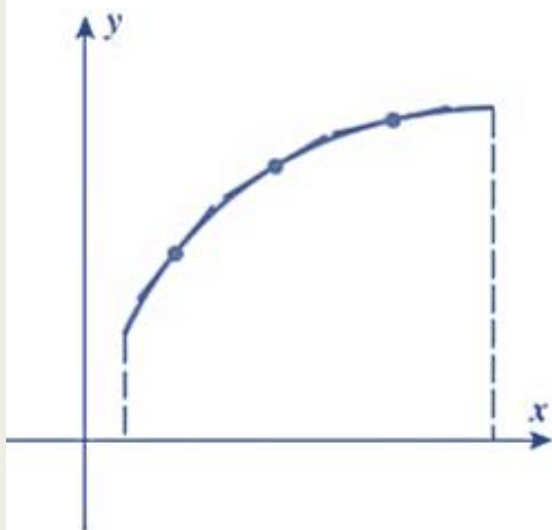
# A - Funções crescentes e decrescentes



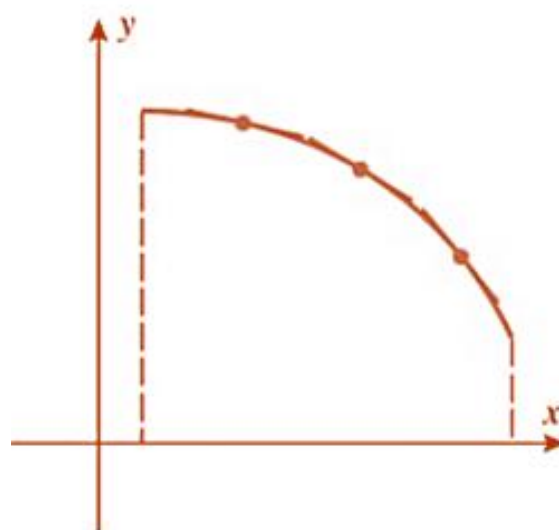
# A - Funções crescentes e decrescentes

- ✓ As figuras anteriores sugerem que:
  - Uma função  $f$  seja **crescente** nos intervalos em que as **retas tangentes** são **positivas**;
  - Ou que  $f$  seja **decrescente** nos intervalos em que as **retas tangentes** são **negativas**;
  - E ainda constante se a tangente for nula.

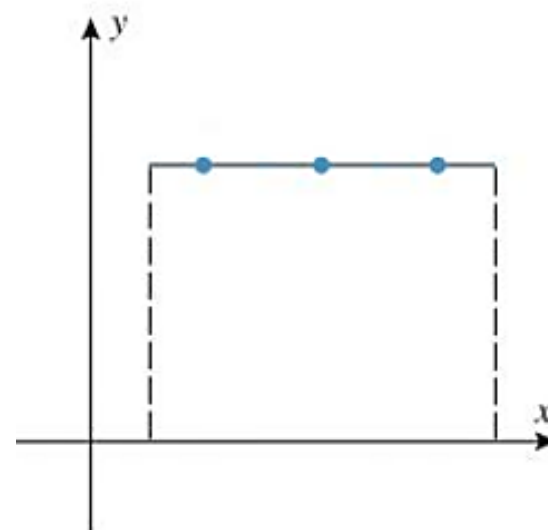
# A - Funções crescentes e decrescentes



Cada reta tangente tem  
inclinação positiva



Cada reta tangente tem  
inclinação negativa



Cada reta tangente tem  
inclinação zero

# Teorema 5.1.2 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

**4.1.2 TEOREMA** *Seja  $f$  uma função contínua em um intervalo fechado  $[a, b]$  e diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ .*

(a) *Se  $f'(x) > 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é crescente em  $[a, b]$ .*

(b) *Se  $f'(x) < 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é decrescente em  $[a, b]$ .*

(c) *Se  $f'(x) = 0$  com qualquer valor de  $x$  em  $(a, b)$ , então  $f$  é constante em  $[a, b]$ .*



# Crescimento e decrescimento

- Análise pela derivada

Seja uma função  $f$  contínua no intervalo  $[a, b]$  e que possui derivadas no intervalo  $(a, b)$ .

- Se  $f' > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ crescente}$

- Se  $f' < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f \text{ decrescente}$

# Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.

# Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

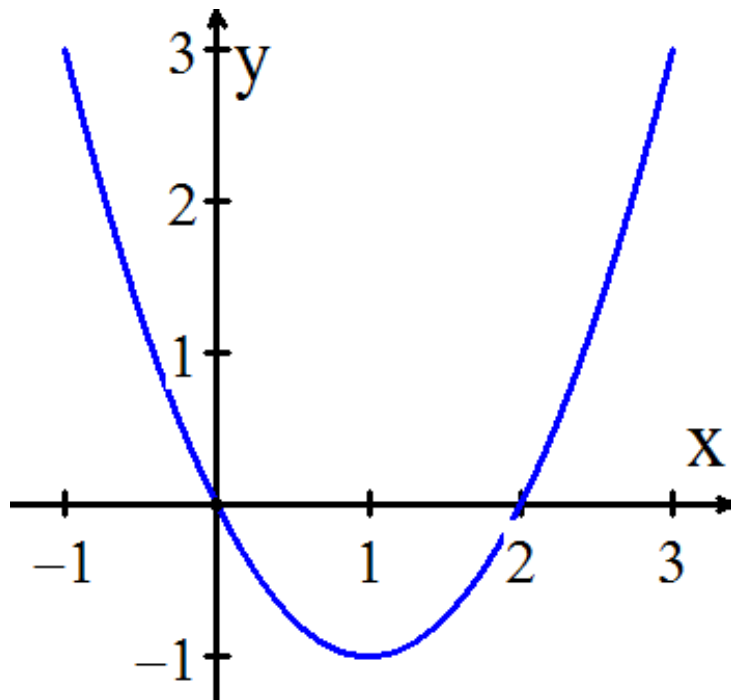
Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.

x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

# Exemplo 1

$$f(x) = x^2 - 2x$$

Determinar os intervalos onde a função  $f$  cresce ou decresce.



x	y
-1	3
0	0
1	-1
2	0
3	3

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

$x$	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

# Exemplo 1

Determinação do crescimento pela derivada

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$f'(x) = 2x - 2$$

**$f(x)$  é decrescente  $(-\infty, 1)$**

**$f(x)$  é crescente  $(1, \infty)$**

$x$	$f'(x)$
-2	-6
-1	-4
0	-2
1/2	-1
1	0
2	2
3	4

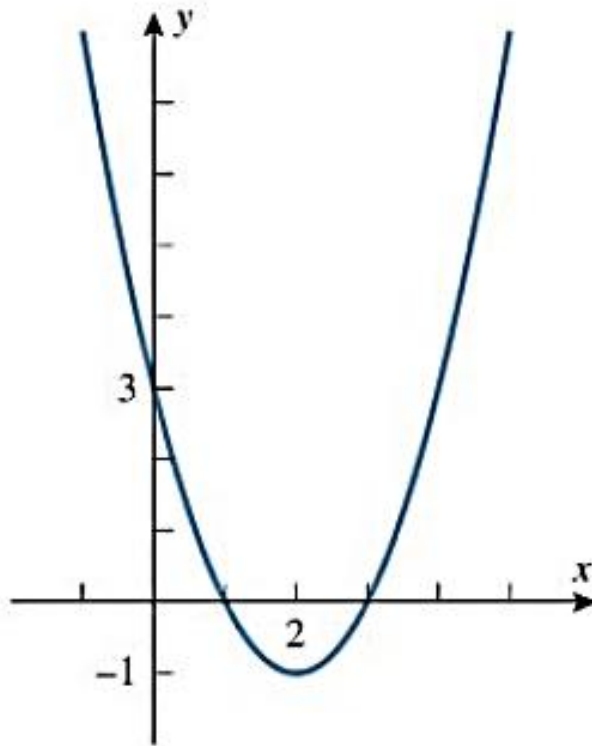
## Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:

(a)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$

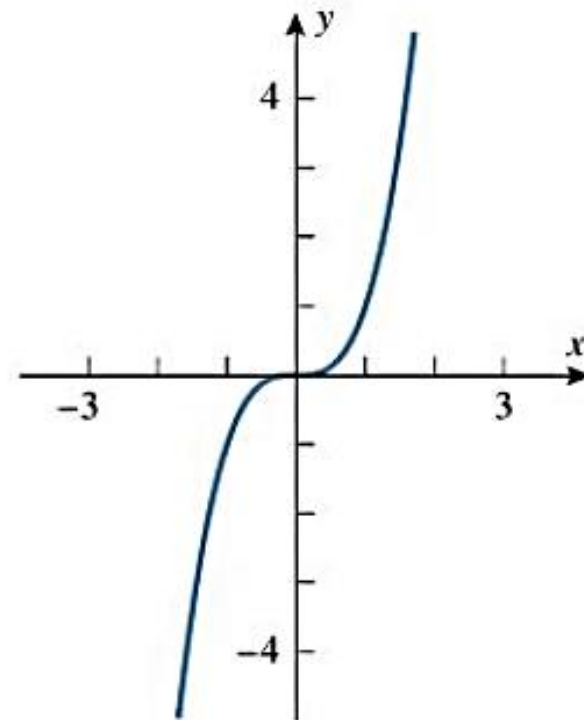
(b)  $f(x) = x^3$



# Exercício – encontre os intervalos de crescimento e decrescimento das funções:



$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



$$f(x) = x^3$$

# B - Concavidade

- ✓ O sinal da derivada, embora, revele o crescimento ou decrescimento não revela a direção da curvatura do gráfico;
- ✓ Uma curva pode ser côncava para cima (segura água) ou côncava para baixo (derrama água);
- ✓ Como podemos ver nas figuras.

# B - Concavidade



Inclinação crescente



Inclinação decrescente

# B - Concavidade



Inclinação crescente



Inclinação decrescente



## Definição 5.1.3 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

**4.1.3 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que  $f$  é *côncava para cima* no intervalo aberto se  $f'$  for crescente nesse intervalo, e dizemos que  $f$  é *côncava para baixo* no intervalo aberto se  $f'$  for decrescente nesse intervalo.

## Definição 5.1.3 (8ª ed. Anton)

**4.1.3 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for diferenciável em um intervalo aberto, então dizemos que  $f$  é *côncava para cima* no intervalo aberto se  $f'$  for crescente nesse intervalo, e dizemos que  $f$  é *côncava para baixo* no intervalo aberto se  $f'$  for decrescente nesse intervalo.

## Teorema 5.1.4 (8ª ed. Anton)

**4.1.4 TEOREMA** Seja  $f$  duas vezes diferenciável em um intervalo aberto.

- (a) Se  $f''(x) > 0$  em qualquer  $x$  do intervalo aberto, então  $f$  é *côncava para cima* nesse intervalo.
- (b) Se  $f''(x) < 0$  em qualquer  $x$  do intervalo aberto, então  $f$  é *côncava para baixo* nesse intervalo.

## Exemplo 4 - Identificar os intervalos de concavidade da função:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



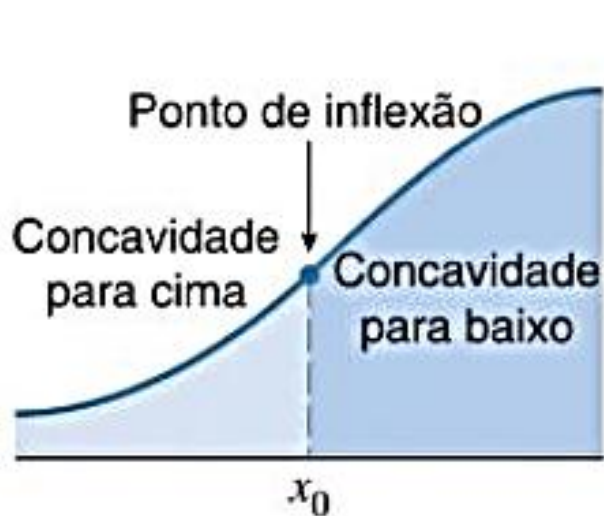
# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



# C - Ponto de inflexão

- ✓ O ponto de inflexão é o ponto em que uma curva muda de côncava para cima para côncava para baixo, ou vice-versa;



# Definição 5.1.5 (8<sup>a</sup> ed. Anton)

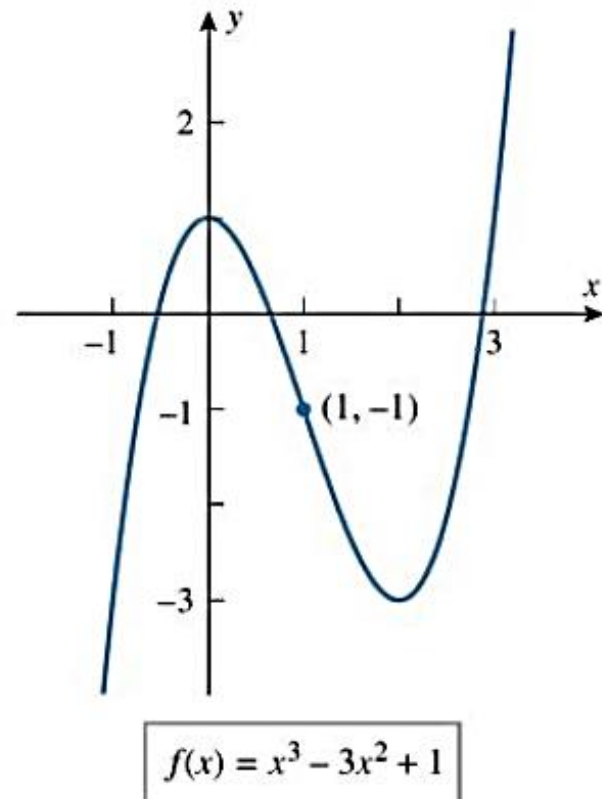
**4.1.5 DEFINIÇÃO** Se  $f$  for contínua em um intervalo aberto contendo o ponto  $x_0$  e se  $f$  mudar de concavidade no ponto  $(x_0, f(x_0))$ , então diremos que o ponto  $x_0$  do domínio, ou o ponto  $(x_0, f(x_0))$  do gráfico, é um *ponto de inflexão* de  $f$  (Figura 4.1.9).

**Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

**Exemplo 5 – Use as derivadas para determinar os intervalos de crescimento, a concavidade e os pontos de inflexão da função:**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

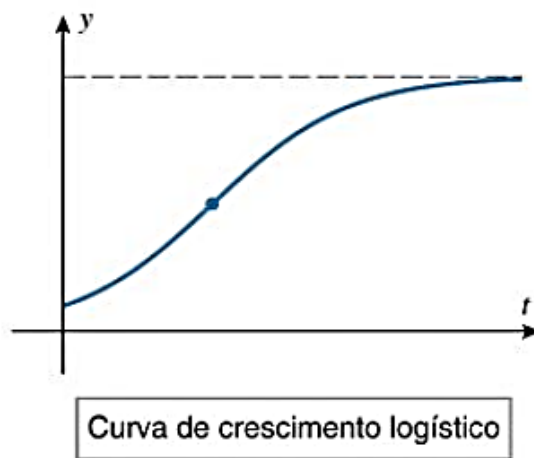


# D - Ponto de inflexão em aplicações

- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;
- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S.

## D - Ponto de inflexão em aplicações

- ✓ O modelo de crescimento populacional é uma função onde há um ponto de inflexão;
- ✓ Em um ambiente no qual o espaço ou alimento é limitado, o gráfico da população *versus* tempo tem uma forma típica de S.



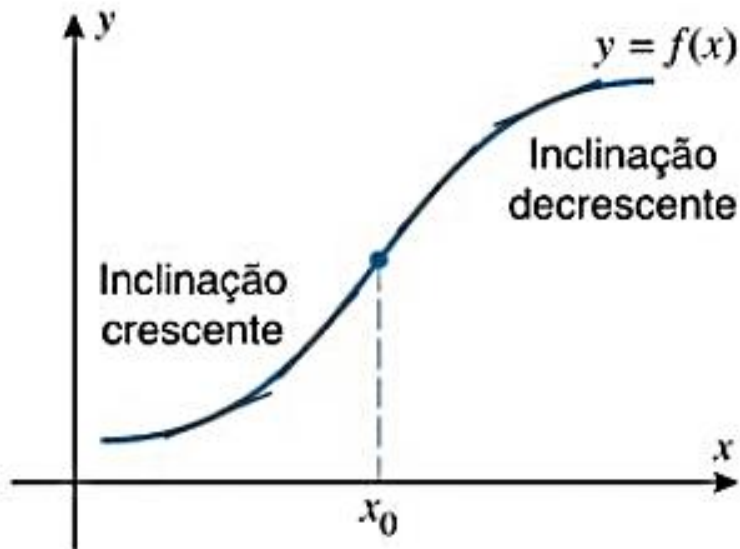
# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



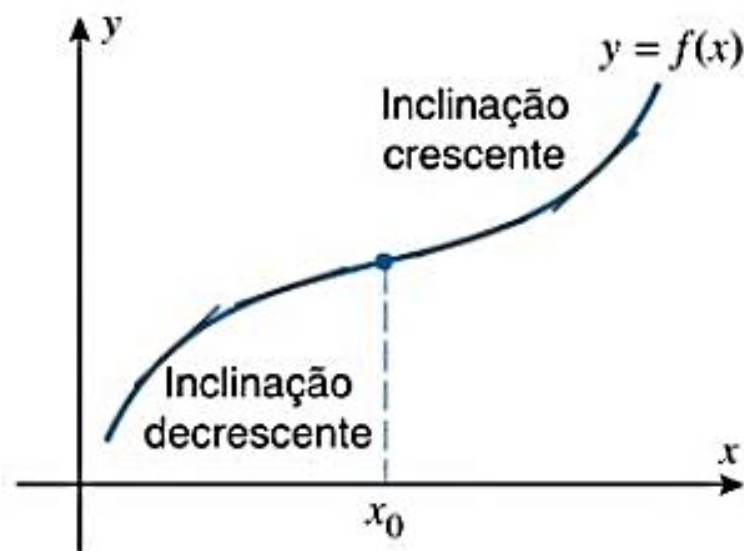
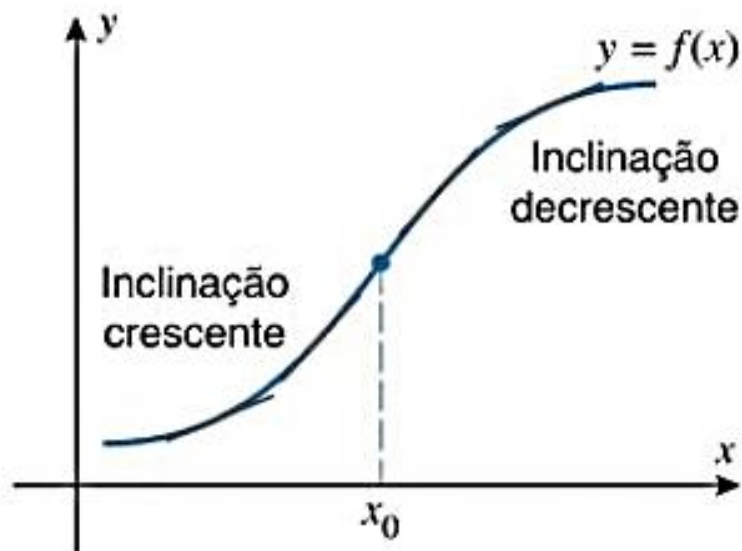
# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



# D - Ponto de inflexão em aplicações

*Os pontos de inflexão marcam os lugares da curva  $y = f(x)$  em que a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$  muda de crescente para decrescente ou vice-versa.*



# Exemplo biológico

# Exemplo - Reação do organismo

A reação do organismo a uma droga pode ser representada por uma função do tipo:

$$R(D) = D^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

# Exemplo - Reação do organismo

A reação do organismo a uma droga pode ser representada por uma função do tipo:

$$R(D) = D^2 \left( \frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right)$$

**R**: Reação (temperatura, pressão etc.);

**C**: Quantidade máxima que pode ser administrada;

**D**: Quantidade usada ( $0 \leq D \leq C$ ).

**Domínio biológico**: intervalo  $[0, C]$

# Exemplo (Gráfico)

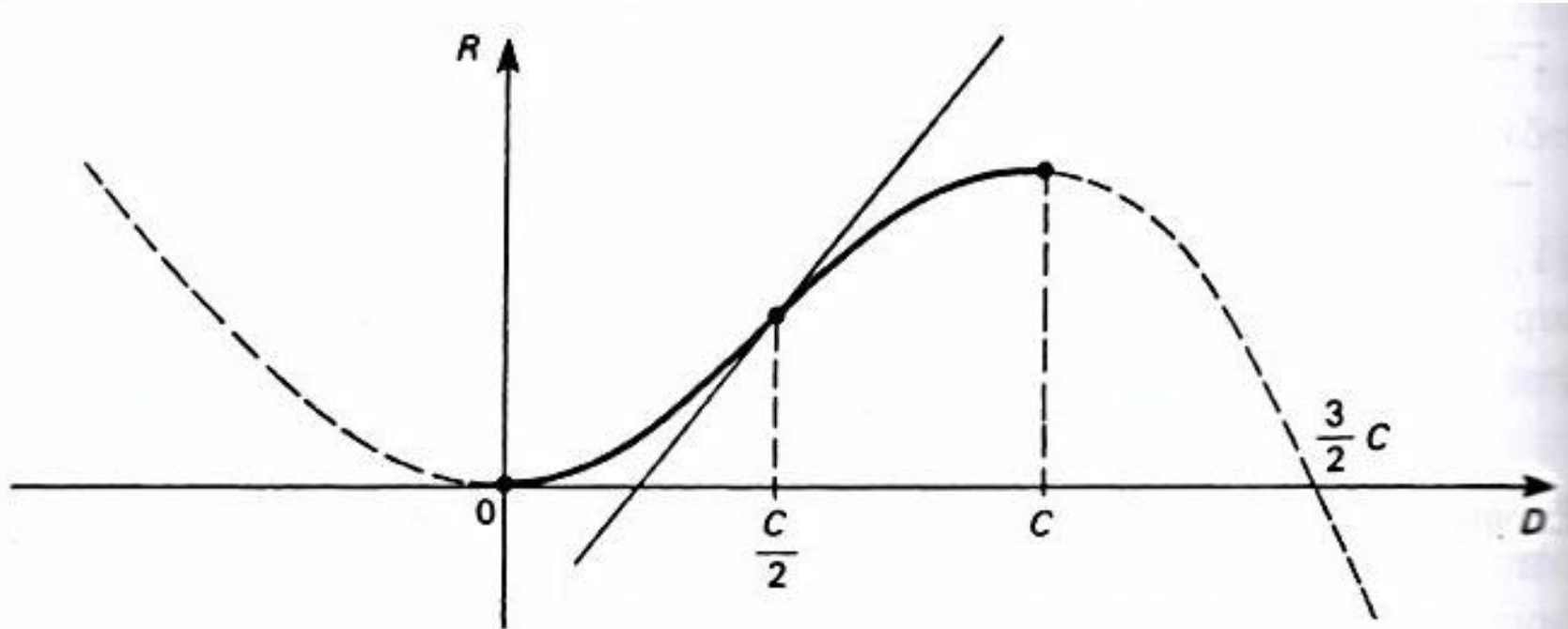


Figura 4.17 Intensidade de reação do organismo a uma droga.

Sensibilidade cresce até  $D = C/2$

E decresce até atingir  $D = C$

# Para depois desta aula:

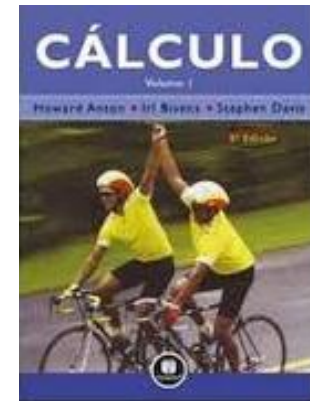
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no [site](#));

# Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

**Figuras.** ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





# Contatos e material de apoio

[profhenriquefaria.com](http://profhenriquefaria.com)



[henrique.faria@unesp.br](mailto:henrique.faria@unesp.br)