

Cálculo I

Engenharia

Aula 16

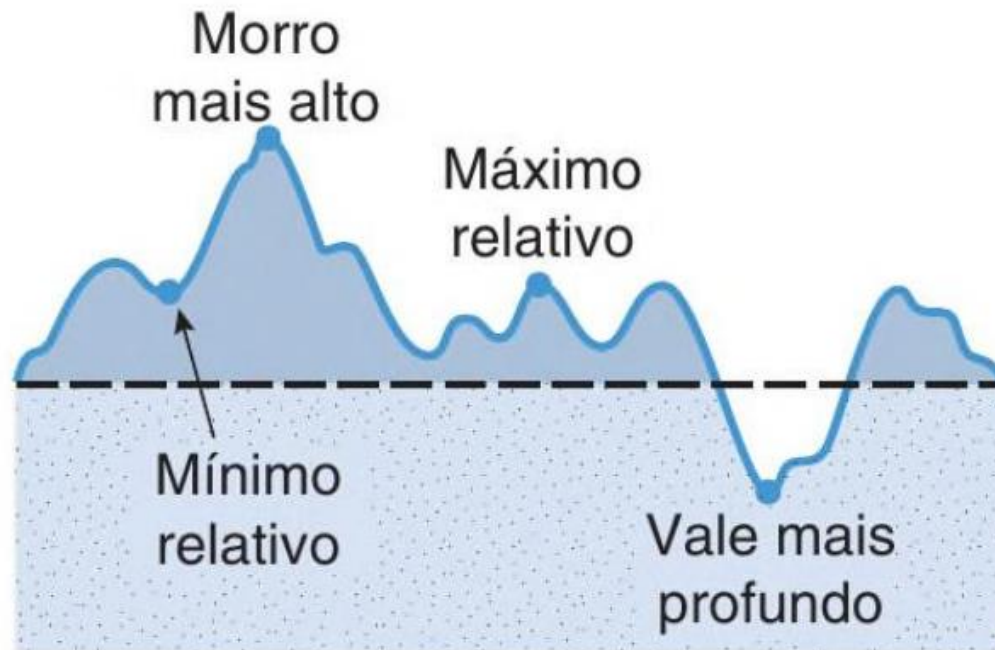
Máximos e mínimos de uma função

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria

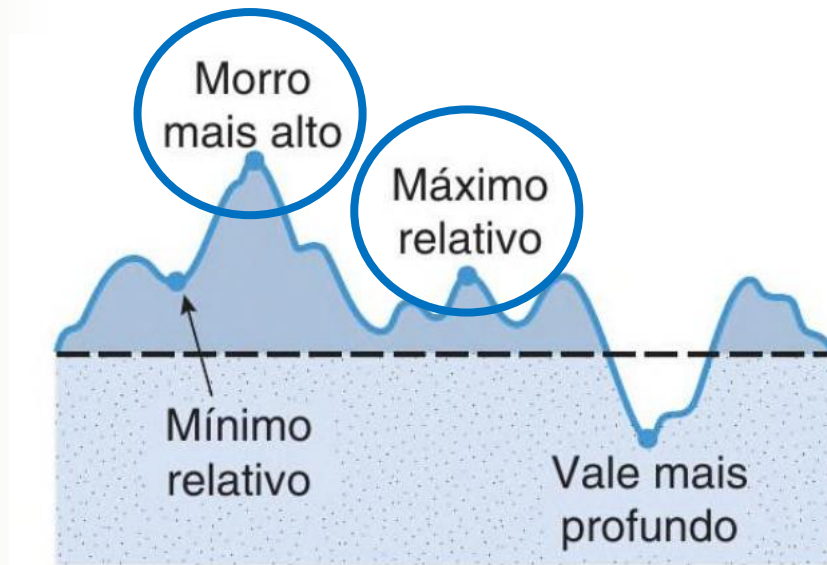
henrique.faria@unesp.br

5.2 - Máximos e mínimos relativos

- ✓ Imaginemos o gráfico de uma função como um cordilheira de montanhas;

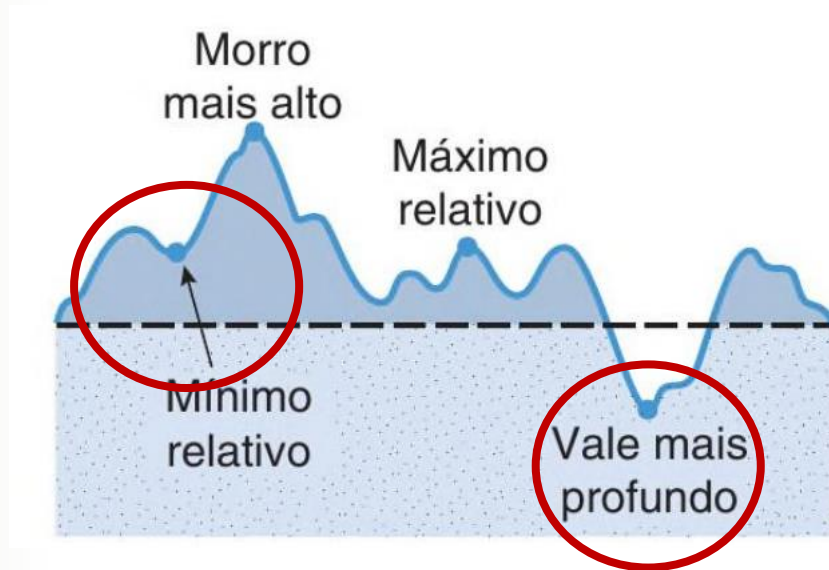


5.2 - Máximos e mínimos relativos



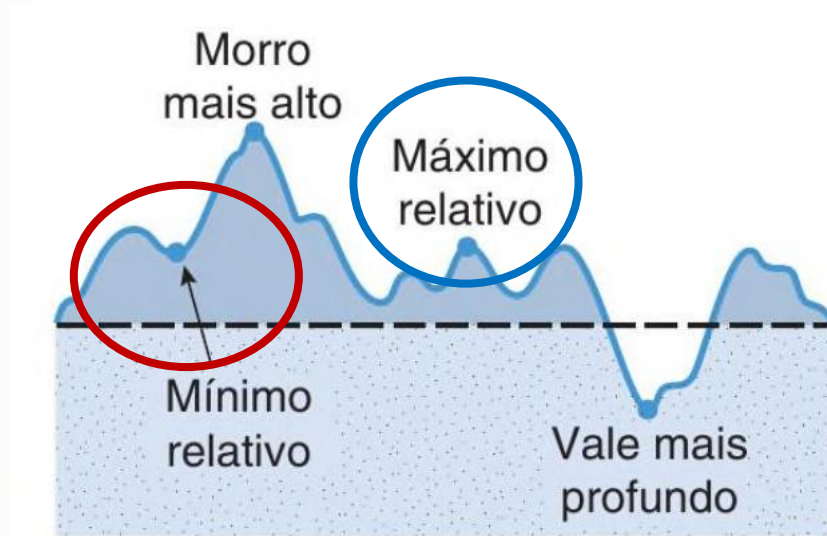
- ✓ Morros são chamados de máximos;

5.2 - Máximos e mínimos relativos



- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;

5.2 - Máximos e mínimos relativos



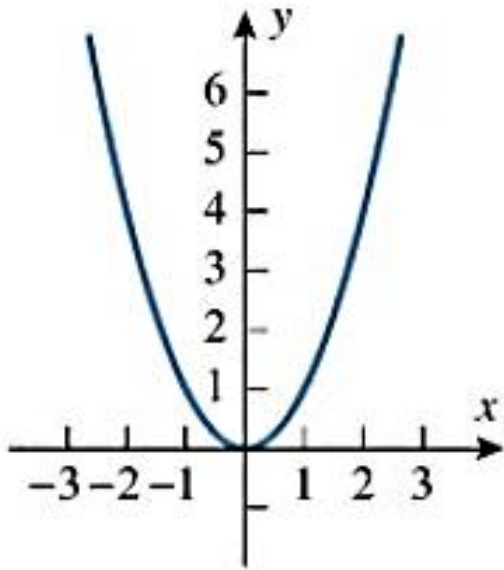
- ✓ Morros são chamados de máximos;
- ✓ Vales são chamados de mínimos;

- ✓ Ambos, **máximos** e **mínimos**, são relativos quando analisados em uma vizinhança.

5.2 - Máximos e mínimos relativos

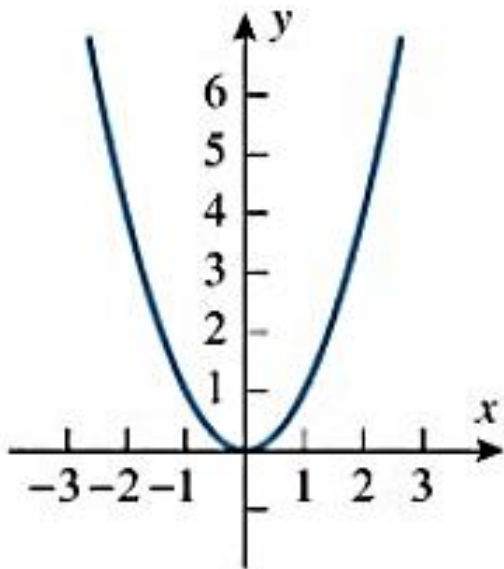
4.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função f tem um *máximo relativo* em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o maior valor, isto é, $f(x_0) \geq f(x)$ em cada x no intervalo. Analogamente, diz-se que f tem um *mínimo relativo* em x_0 se houver um intervalo aberto contendo x_0 no qual $f(x_0)$ é o menor valor, isto é, $f(x_0) \leq f(x)$ em cada x no intervalo. Quando f tiver um máximo ou um mínimo relativo em x_0 , diz-se que f tem um *extremo relativo* em x_0 .

Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções

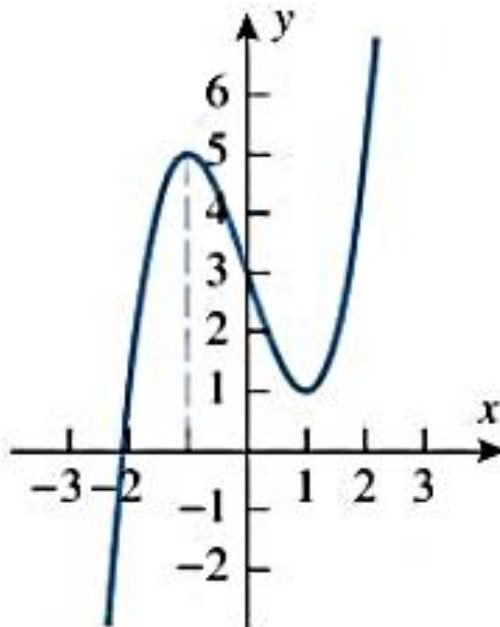


$$y = x^2$$

Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções

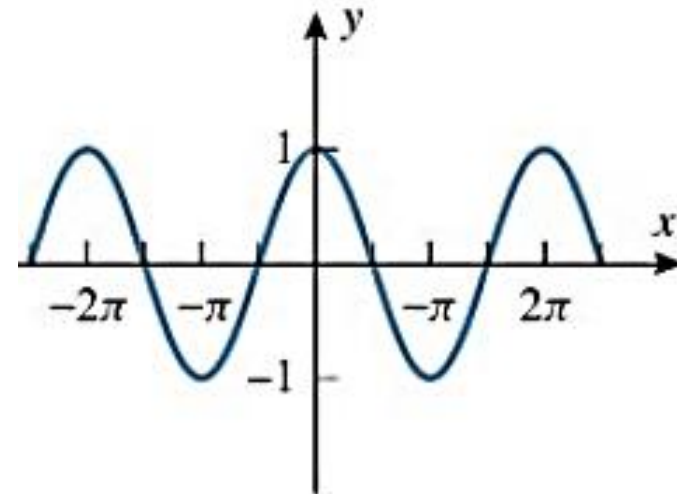
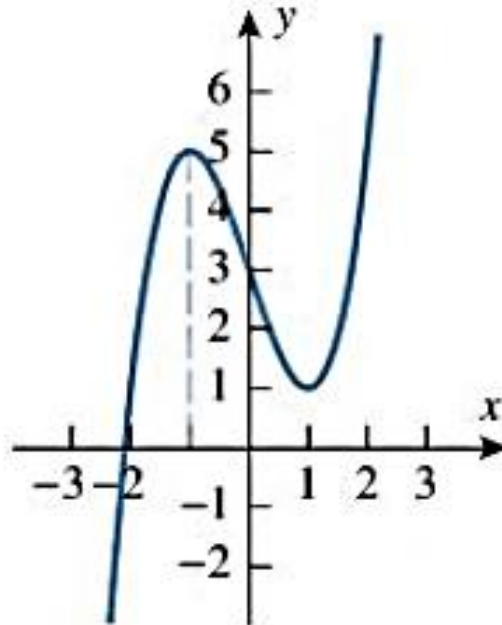
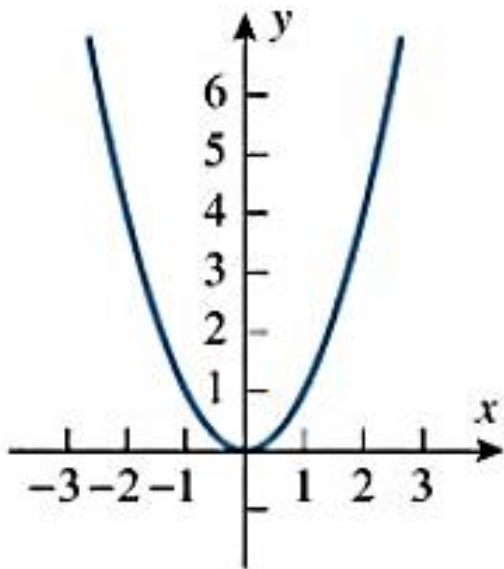


$$y = x^2$$



$$y = x^3 - 3x + 3$$

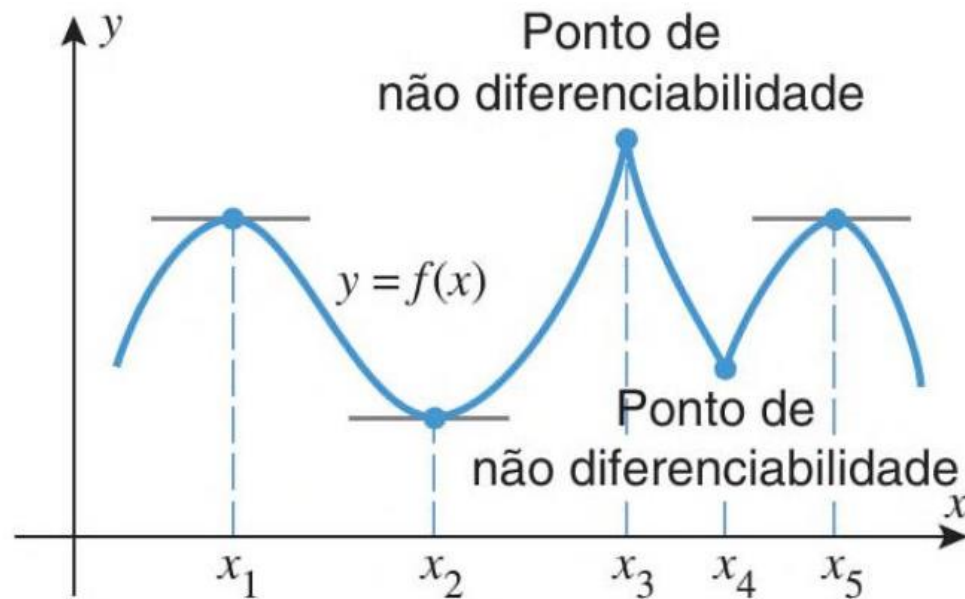
Exemplo 1 - Verificar os pontos de máximo e de mínimo das funções



Nas três funções, ocorrem extremos relativos no pontos em que a **reta tangente é horizontal**.

Extremos relativos de uma função

- ✓ Um extremo relativo pode ocorrer também em um ponto em que a função não é diferenciável.



Extremos relativos de uma função

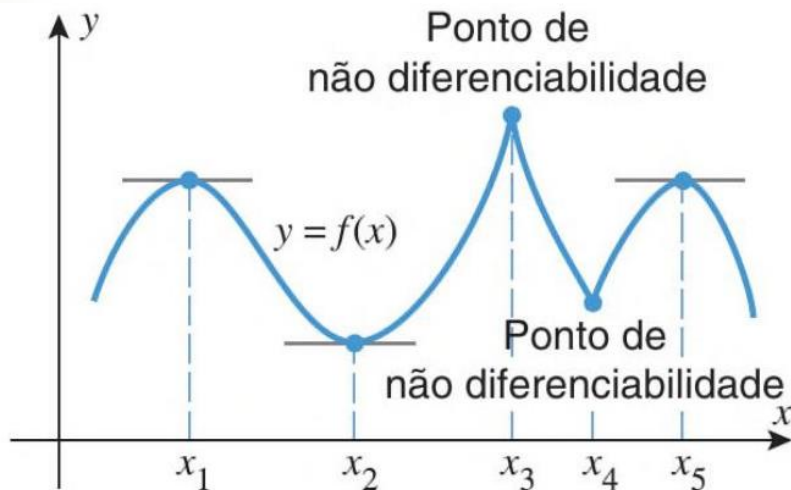


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico:**
 f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

Extremos relativos de uma função

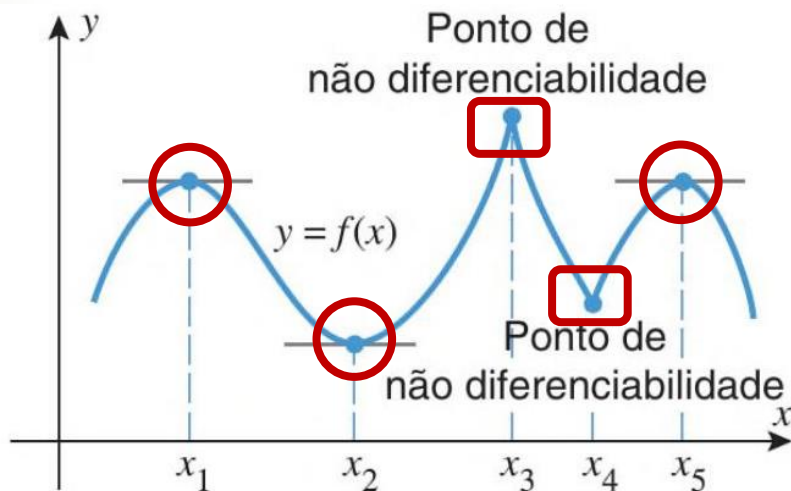


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico:**
 f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;

Extremos relativos de uma função

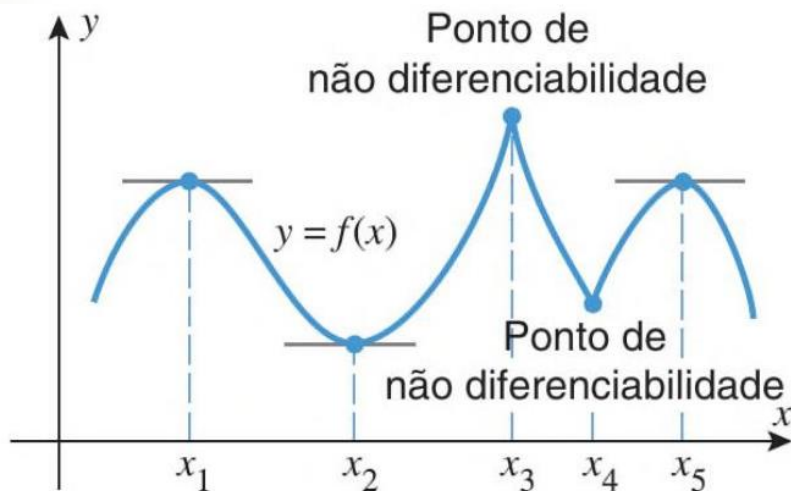


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico:**
 f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;
- ✓ **Ponto estacionário:**
 f tem reta tangente horizontal.

Extremos relativos de uma função

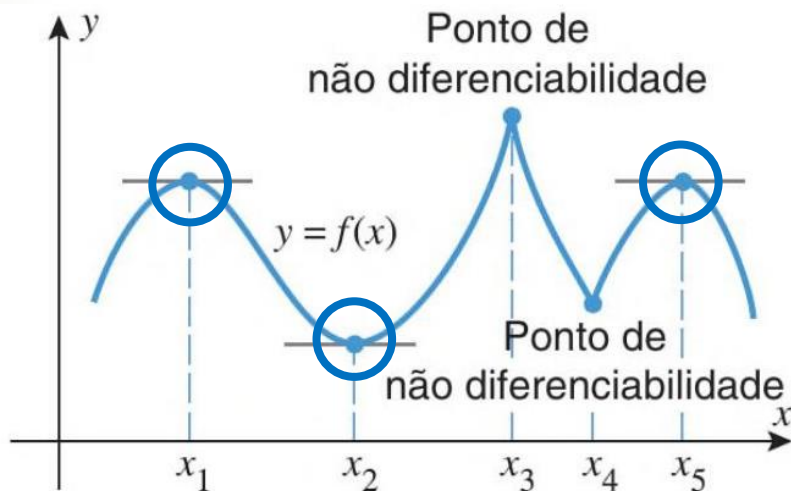


Figura 4.2.3 Os pontos x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são críticos. Desses, x_1, x_2 e x_5 são estacionários.

- ✓ **Ponto Crítico:**
 f tem reta tangente horizontal ou não é diferenciável;
- ✓ **Ponto estacionário:**
 f tem reta tangente horizontal.

Extremos relativos de uma função

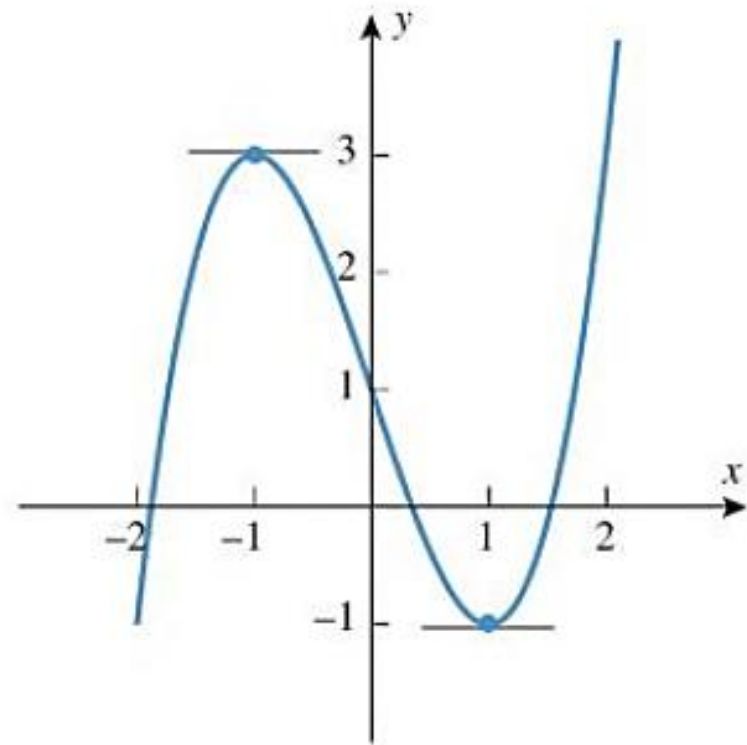
4.2.2 TEOREMA *Suponha que f seja uma função definida em um intervalo aberto contendo o ponto x_0 . Se f tiver um extremo relativo em $x = x_0$, então $x = x_0$ será um ponto crítico de f ; assim, ou $f'(x_0) = 0$ ou f não é diferenciável em x_0 .*

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

Exemplo 2 – Encontre os pontos críticos da função

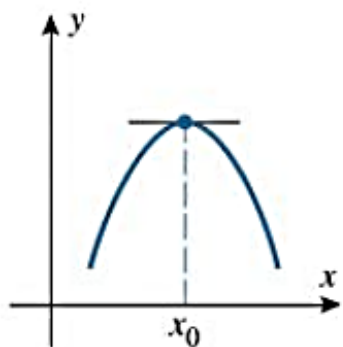
$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$



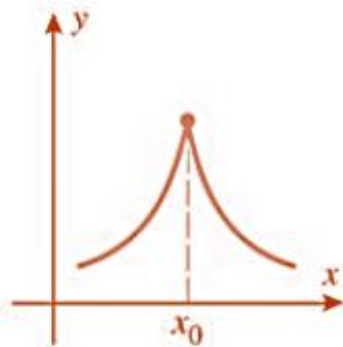
$$y = x^3 - 3x + 1$$

Teste da derivada primeira (f')

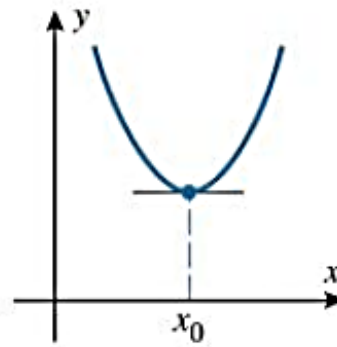
- ✓ Uma função f tem um extremo relativo naqueles pontos críticos que f' muda de sinal.



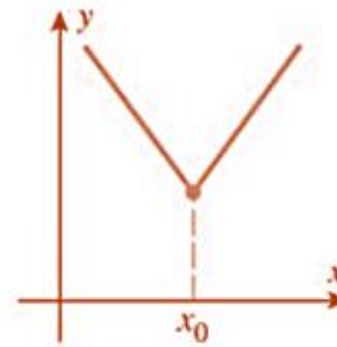
Ponto crítico
Ponto estacionário
Máximo relativo



Ponto crítico
Ponto não estacionário
Máximo relativo

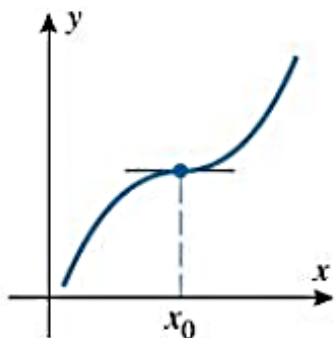


Ponto crítico
Ponto estacionário
Mínimo relativo

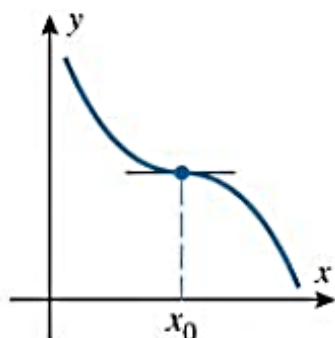


Ponto crítico
Ponto não estacionário
Mínimo relativo

Teste da derivada primeira (f')



Ponto crítico
Ponto estacionário
Ponto de inflexão
Não um extremo relativo



Ponto crítico
Ponto estacionário
Ponto de inflexão
Não um extremo relativo



Ponto crítico
Ponto não estacionário
Ponto de inflexão
Não um extremo relativo



Ponto crítico
Ponto não estacionário
Ponto de inflexão
Não um extremo relativo

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA (*Teste da Derivada Primeira*) *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0 .*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA (Teste da Derivada Primeira) *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0 .*

(a) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um máximo relativo em x_0 .*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA (Teste da Derivada Primeira) *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0 .*

- (a) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um máximo relativo em x_0 .*
- (b) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um mínimo relativo em x_0 .*

Teste da derivada primeira (f')

4.2.3 TEOREMA (Teste da Derivada Primeira) *Suponha f contínua em um ponto crítico x_0 .*

- (a) *Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um máximo relativo em x_0 .*
- (b) *Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f tem um mínimo relativo em x_0 .*
- (c) *Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal tanto em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 quanto em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0 , então f não tem extremo relativo em x_0 .*

Teste da derivada primeira (f')

O sinal das derivadas na proximidade de x_0 definem se é um ponto de mínimo ou de máximo.

- f tem Máximo relativo em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x < x_0$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x > x_0$$

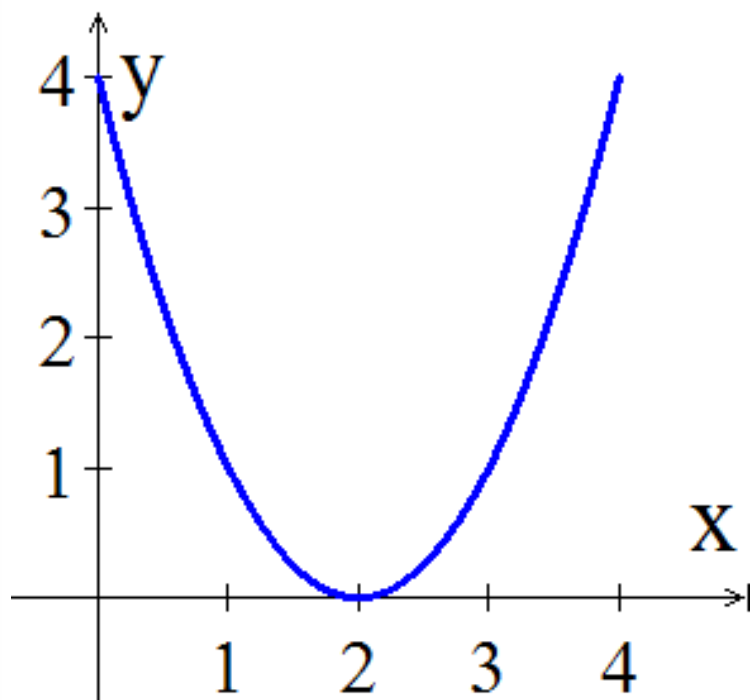
- f tem mínimo relativo em x_0 se $f'(x_0) = 0$ e :

$$f'(x) < 0 \quad \forall x < x_0$$

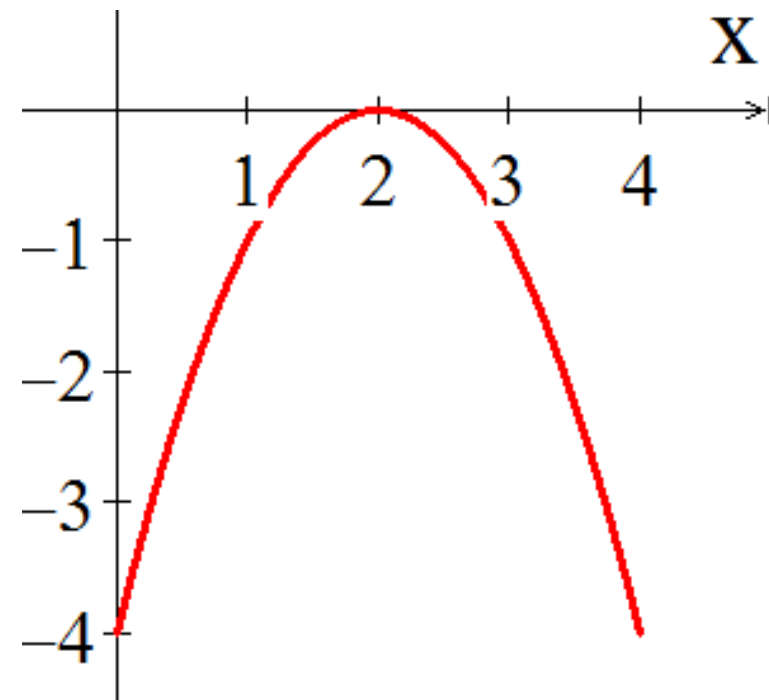
$$f'(x) > 0 \quad \forall x > x_0$$

Exemplo

$$y = (x - 2)^2$$



$$y = -(x - 2)^2$$



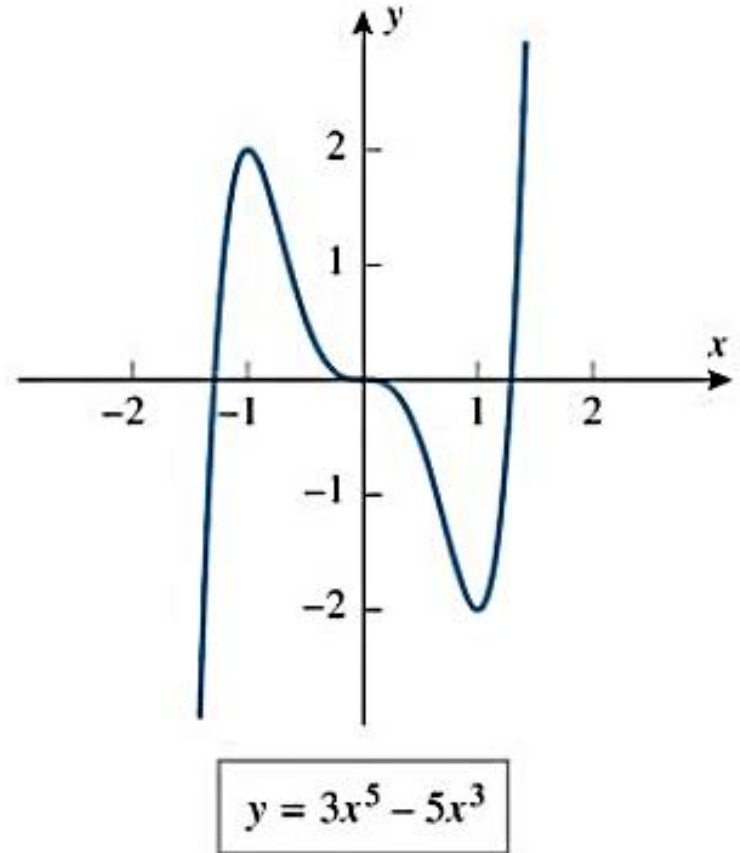
$$x_0 = 2 \rightarrow f'(2) = 0 \text{ (ponto crítico)}$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$



Teste da derivada segunda (f'')

- ✓ O teste da derivada segunda é mais simples para se determinar os pontos críticos de uma função f ;
- ✓ Porém, ele não é útil quando a derivada segunda f'' no ponto crítico é nula.

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA (*Teste da Derivada Segunda*) *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0 .*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA (Teste da Derivada Segunda) *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0 .*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0 .*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA (Teste da Derivada Segunda) *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0 .*

- (a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0 .*
- (b) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0 .*

Teste da derivada segunda (f'')

4.2.4 TEOREMA (Teste da Derivada Segunda) *Suponha que f seja duas vezes diferenciável em um ponto x_0 .*

(a) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0 .*

(b) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0 .*

(c) *Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, isto é, f pode ter um máximo ou mínimo relativo em x_0 ou nenhum dos dois.*

4.4 Teste da derivada segunda (f'')

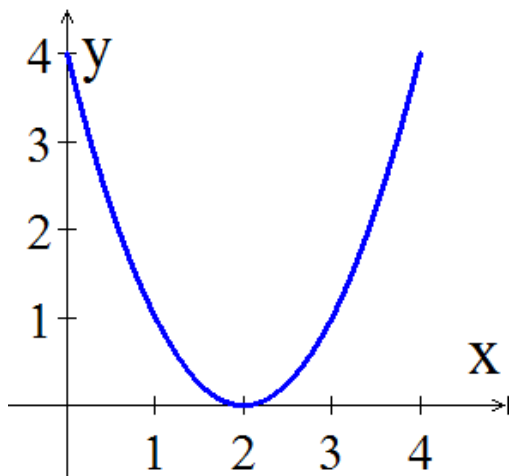
O sinal da derivada segunda no ponto crítico $x_0 \in (a, b)$ pode definir se o ponto é de máximo ou de mínimo.

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de Máximo;

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de mínimo;

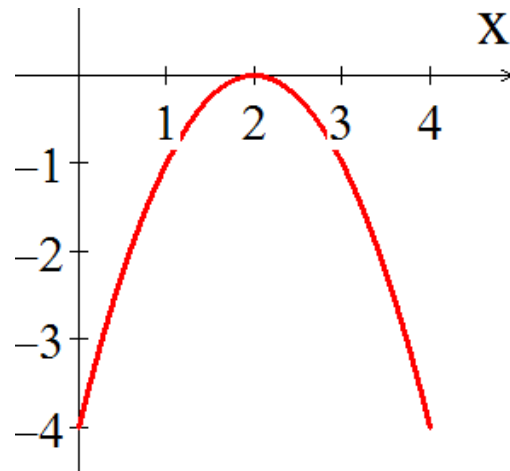
$f''(x_0) = 0$ nada se conclui sobre o ponto.

Exemplo



$$y = (x - 2)^2$$

$$y'' = 2 > 0$$

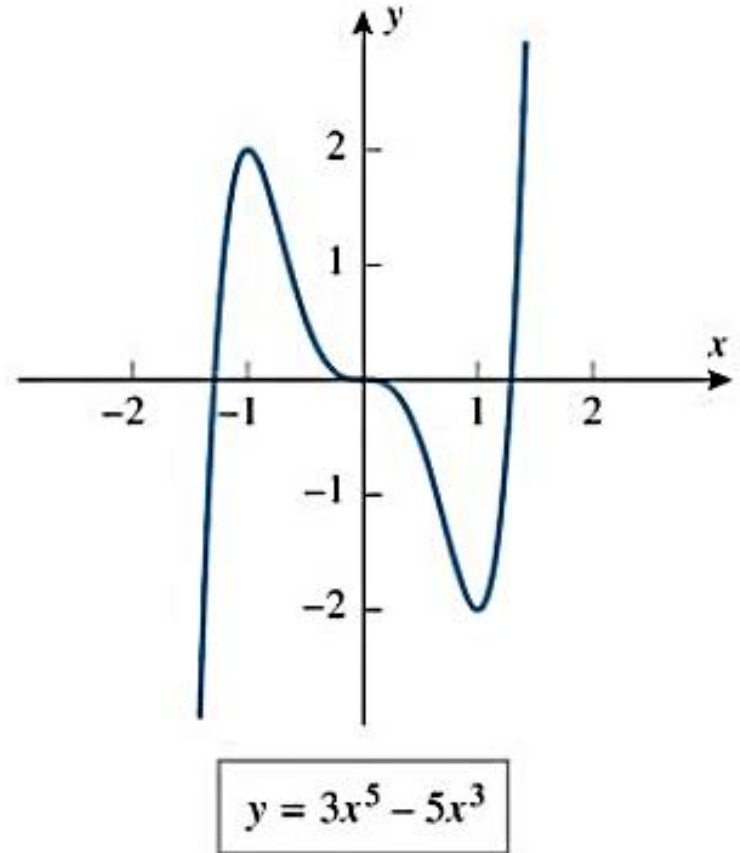


$$y = -(x - 2)^2$$

$$y'' = -2 < 0$$

Exemplo 5 – Encontre os extremos relativos pelo teste da derivada segunda

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$



Máximos e mínimos absolutos

- ✓ Nesta seção consideraremos métodos para encontrar o mais alto dos morros e o mais profundo dos vales de uma curva;
- ✓ Em termos matemáticos, procuraremos o maior e o menor valor de uma função em um determinado intervalo .

Máximos e mínimos absolutos

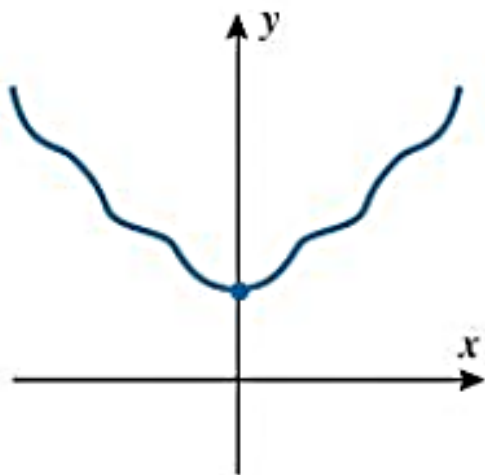
4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um *máximo absoluto* em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um *mínimo absoluto* em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um *extremo absoluto*.

Máximos e mínimos absolutos

4.4.1 DEFINIÇÃO Considere um intervalo no domínio de uma função f e um ponto x_0 nesse intervalo. Dizemos que f tem um *máximo absoluto* em x_0 se $f(x) \leq f(x_0)$ com qualquer x do intervalo, e que f tem um *mínimo absoluto* em x_0 se $f(x_0) \leq f(x)$ com qualquer x do intervalo. Se f tiver em x_0 qualquer um dos dois, máximo absoluto ou mínimo absoluto, dizemos que f tem em x_0 um *extremo absoluto*.

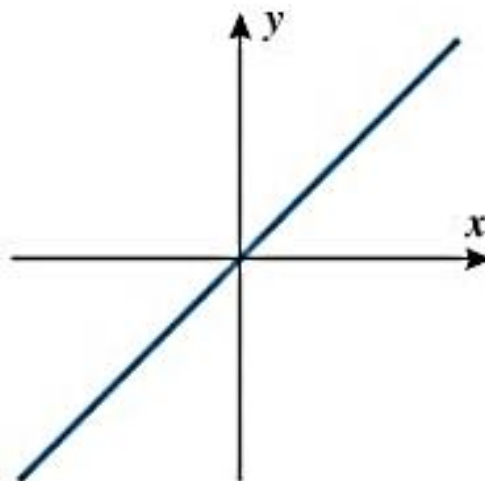
Contudo, não é garantido que uma função tenha extremos absolutos em um intervalo.

Máximos e mínimos absolutos



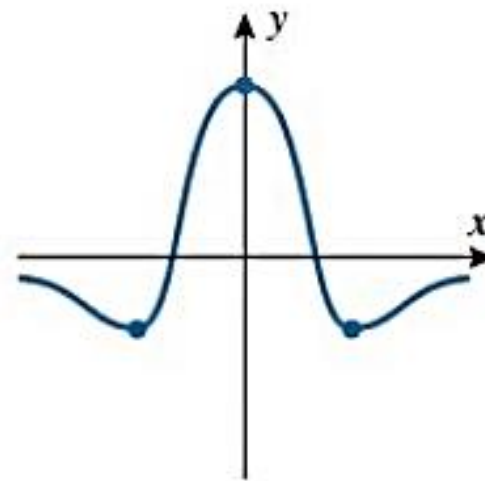
f tem um mínimo absoluto, mas não um máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$

(a)



f não tem extremos absolutos em $(-\infty, +\infty)$

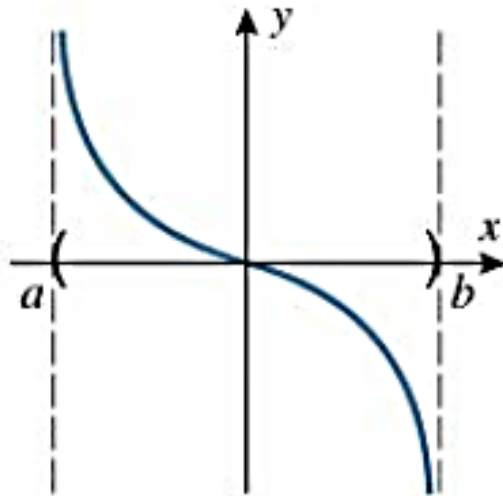
(b)



f tem um máximo e um mínimo absolutos em $(-\infty, +\infty)$

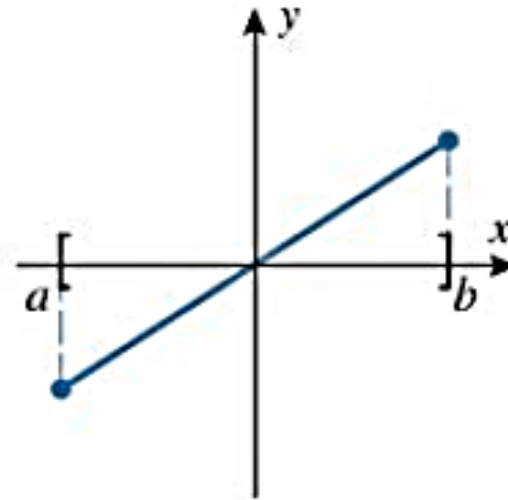
(c)

Máximos e mínimos absolutos



f não tem extremos absolutos em (a, b)

(d)



f tem um mínimo e um máximo absolutos em $[a, b]$

(e)

Teorema 5.4.2 (8^a ed. Anton)

4.4.2 TEOREMA (Teorema do Valor Extremo) *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

Teorema 5.4.2 (8^a ed. Anton)

4.4.2 TEOREMA (*Teorema do Valor Extremo*) *Se uma função f for contínua em um intervalo fechado finito $[a, b]$, então f tem um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$.*

Teorema 5.4.3 (8^a ed. Anton)

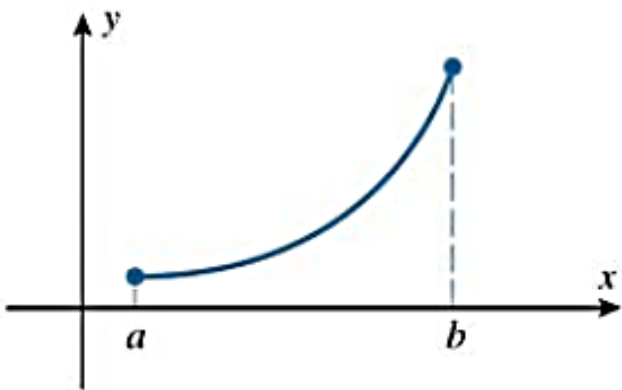
4.4.3 TEOREMA *Se f tiver um extremo absoluto em um intervalo aberto (a, b) , então ele deve ocorrer em um ponto crítico de f .*

Teorema do valor extremo

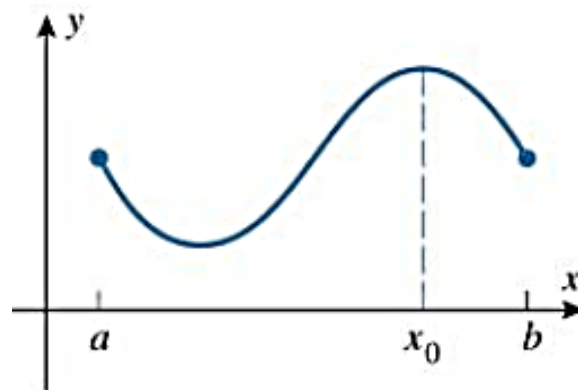
- ✓ Desse teorema segue que, se f for **contínua** no intervalo finito fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.

Teorema do valor extremo

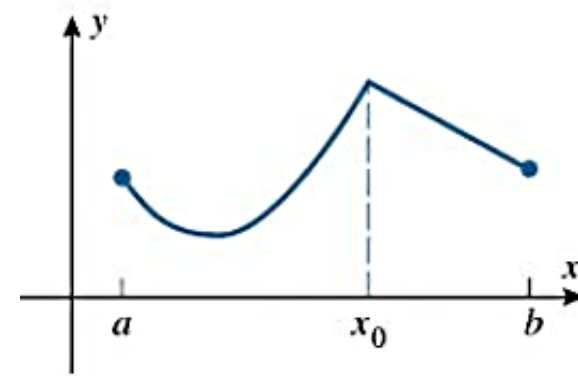
- ✓ Desse teorema segue que, se f for **contínua** no intervalo finito fechado $[a, b]$, então os extremos absolutos ocorrem ou nos pontos extremos ou nos pontos críticos do intervalo.



(a)



(b)



(c)

Como encontrar extremos absolutos?

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado $[a, b]$

Passo 1 Encontre os pontos críticos de f em (a, b) .

Passo 2 Encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades a e b .

Passo 3 O maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto.

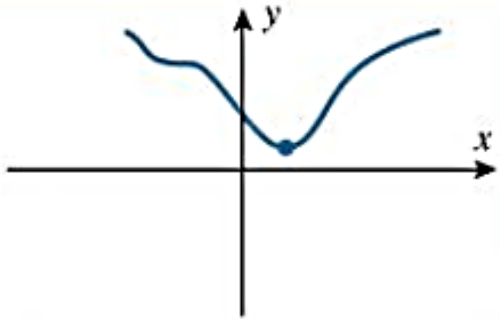
Exemplo 1 – Encontre os extremos absolutos de f no intervalo $[1, 5]$

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$$

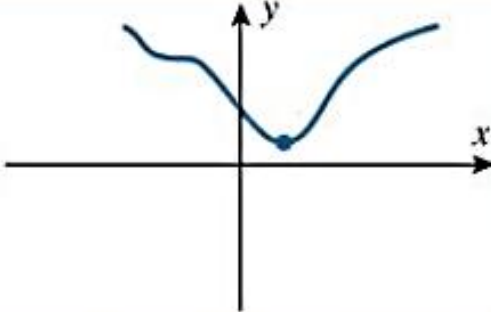
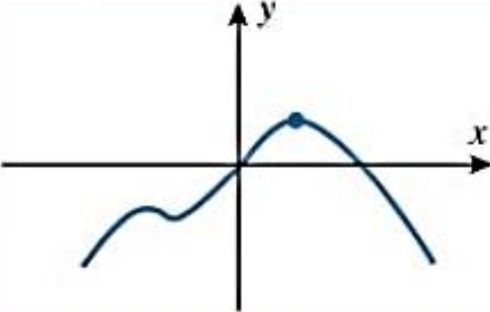
Extremos absolutos em intervalos infinitos

- ✓ Seja uma função f contínua em $(-\infty, +\infty)$;
- ✓ Extremos absolutos podem ser deduzidos verificando o comportamento de f no infinito.

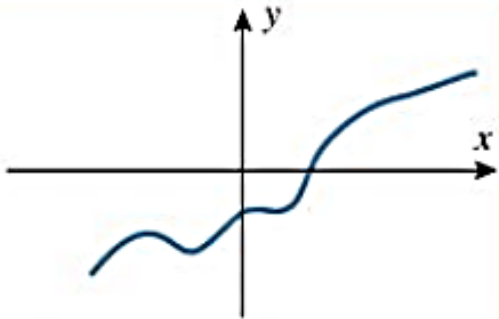
Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

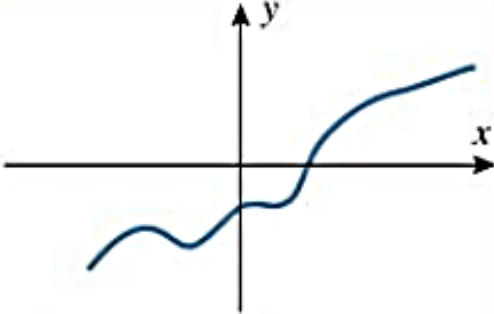
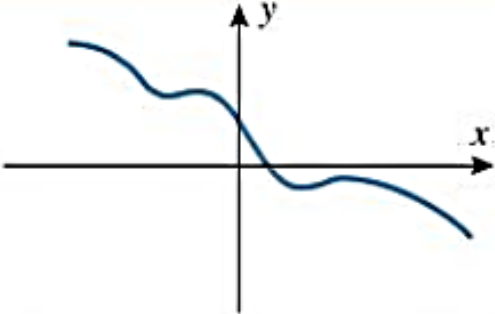
Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A blue curve starts from the upper left, descends to a local minimum marked with a blue dot, and then ascends towards the upper right.</p>	 <p>A Cartesian coordinate system with x and y axes. A blue curve starts from the lower left, ascends to a local maximum marked with a blue dot, and then descends towards the lower right.</p>

Extremos absolutos em intervalos infinitos

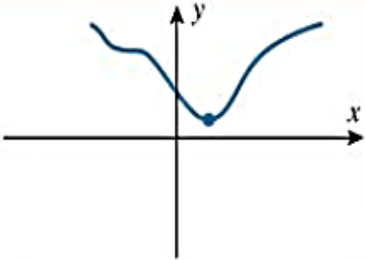
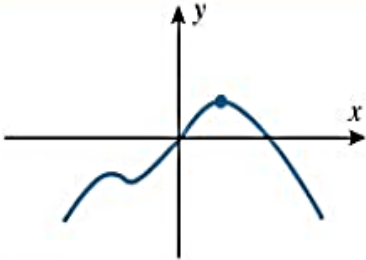
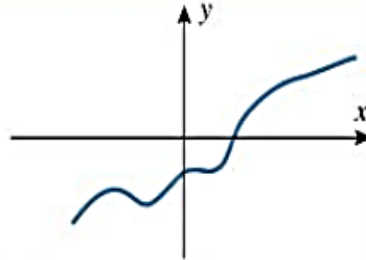
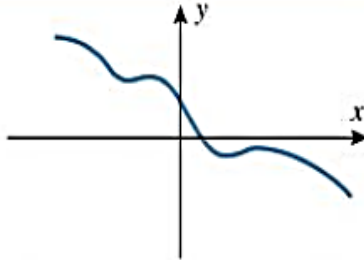
LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO	

Extremos absolutos em intervalos infinitos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO		

Extremos absolutos em intervalos infinitos

Tabela 4.4.2
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS INFINITOS

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM TODA PARTE	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f tem um máximo absoluto, mas nenhum mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$	f não tem máximo absoluto, nem mínimo absoluto em $(-\infty, +\infty)$
GRÁFICO				

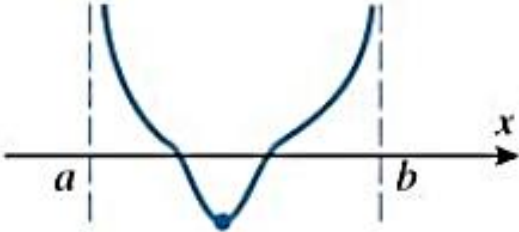
Exemplo 4 – Determine se f tem extremos absolutos no intervalo $(-\infty, +\infty)$

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3$$

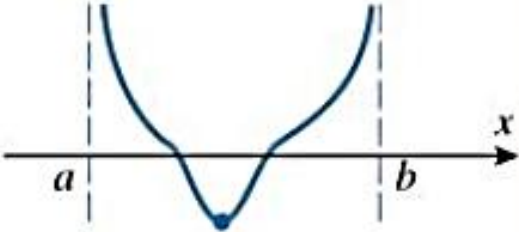

Extremos absolutos em intervalos abertos

- ✓ Seja uma função f contínua em (a, b) ;
- ✓ Extremos absolutos podem ser obtido verificando o comportamento de f quando $x \rightarrow a^+$ e $x \rightarrow b^-$.

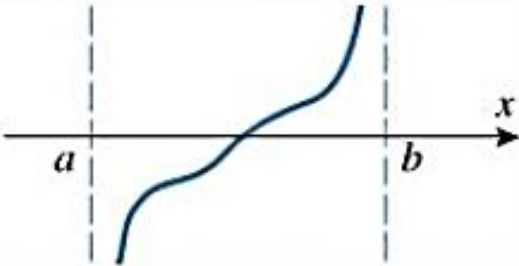
Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)
GRÁFICO	

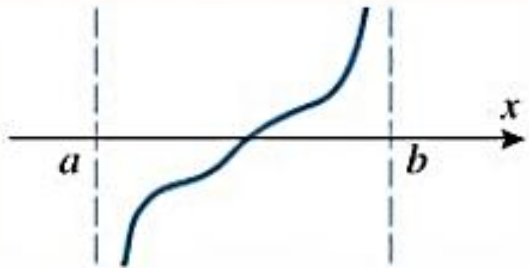
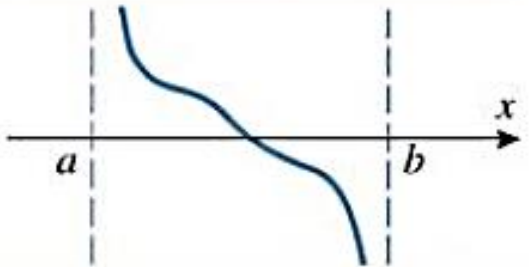
Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)
GRÁFICO	 <p>The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis. Two vertical dashed lines are drawn at x=a and x=b. A blue curve starts at x=a, goes down to a local minimum, then goes up to a local maximum, and finally goes up towards x=b. The curve is U-shaped, indicating that the function has a local minimum but no local maximum within the interval.</p>	 <p>The graph shows a coordinate system with a horizontal x-axis. Two vertical dashed lines are drawn at x=a and x=b. A blue curve starts at x=a, goes up to a local maximum, then goes down to a local minimum, and finally goes down towards x=b. The curve is inverted U-shaped, indicating that the function has a local maximum but no local minimum within the interval.</p>

Extremos absolutos em intervalos abertos

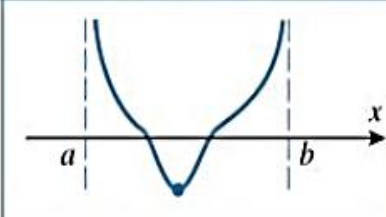
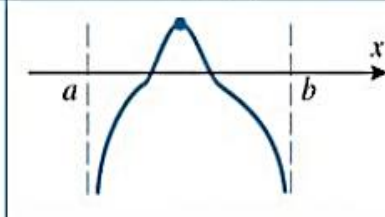
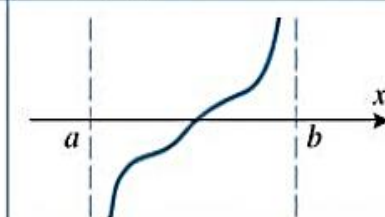
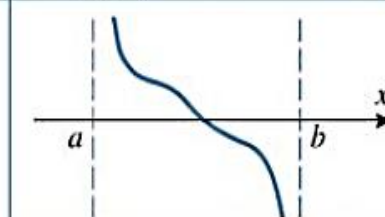
LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO	

Extremos absolutos em intervalos abertos

LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO		

Extremos absolutos em intervalos abertos

Tabela 4.4.3
EXTREMOS ABSOLUTOS EM INTERVALOS ABERTOS

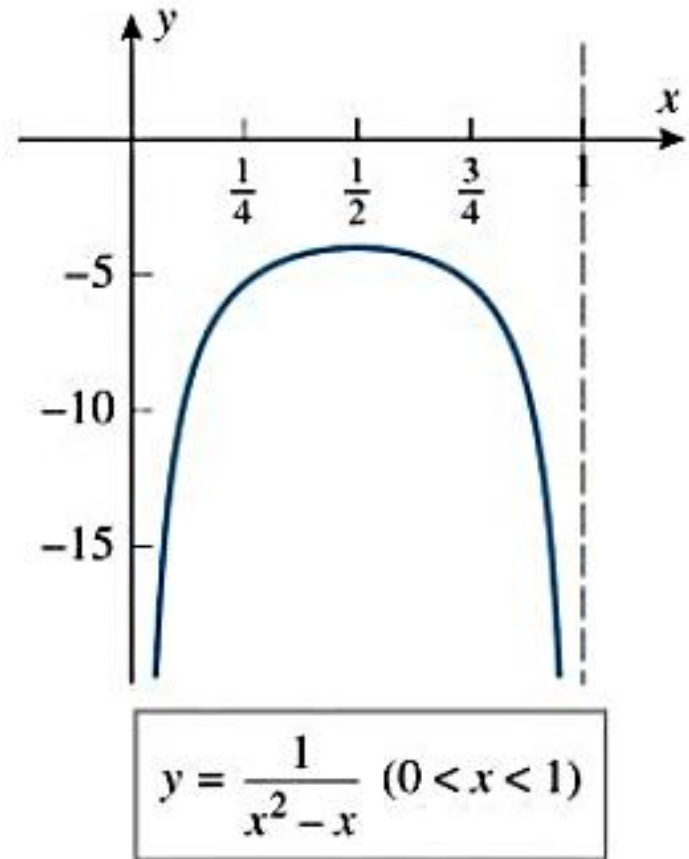
LIMITES	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

Exemplo 5 – Determine se f tem extremos absolutos no intervalo $(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

Exemplo 5 – Determine se f tem extremos absolutos no intervalo $(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$



Para depois desta aula:

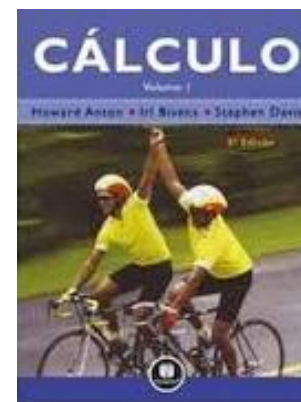
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no [site](#));

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.



Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com



henrique.faria@unesp.br