Cálculo I

Engenharia

Aula 17
Gráficos de curvas
Como traçar

Prof. Henrique Antonio Mendonça Faria
henrique.faria@unesp.br

Crescimento e decrescimento

Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}''\ \exists\ (a, b)$ e $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

- $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in [a, b] \rightarrow$ Máximo em x_o
- $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\ x \in [a, b] \rightarrow$ mínimo em x_o

Crescimento e decrescimento

Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ e $\boldsymbol{f}'$, $\boldsymbol{f}''$ $\exists\ (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ e $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

- $f(x) \leq f(x_0)\ \ \forall\ \ x \in [a, b]\ \rightarrow$ Máximo em x_o
- $f(x) \geq f(x_0)\ \ \forall\ \ x \in [a, b]\ \rightarrow$ mínimo em x_o

✓ Se $\boldsymbol{f}' > \mathbf{0}\ \ \forall\ \ \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{crescente}$

✓ Se $\boldsymbol{f}' < \mathbf{0}\ \ \forall\ \ \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ \ \Rightarrow\ \ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{decrescente}$

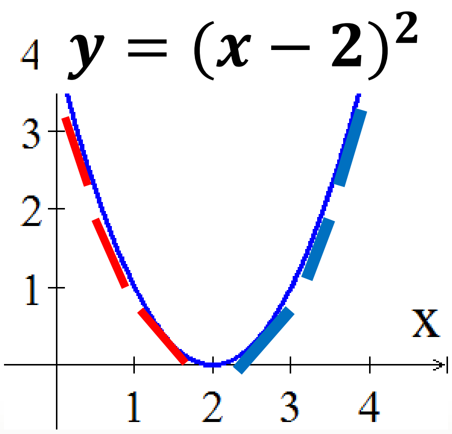
Crescimento e decrescimento

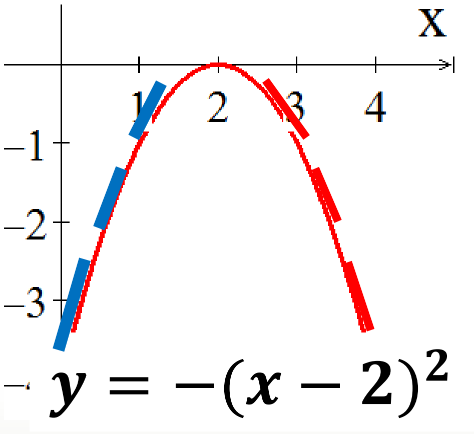
Se f é contínua em $[a, b]$ e f', f'' $\exists$ (a, b) e $x_0 \in (a, b)$

- $f(x) \leq f(x_0)\ \forall\ x \in [a, b]$ → Máximo em x_o
- $f(x) \geq f(x_0)\ \forall\ x \in [a, b]$ → mínimo em x_o

✓ Se $f' > 0\ \ \forall\ x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f\ crescente$

✓ Se $f' < 0\ \ \forall\ x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f\ decrescente$





$x_0 = 2 \rightarrow$

$f'(2) = 0$

(ponto crítico)

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f'}$, $\boldsymbol{f''}$ $\exists\ (a, b)$ e $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

➢ $\boldsymbol{f}$ tem Máximo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall\ x < \boldsymbol{x_o} \\ f'(x) < 0 & \forall\ x > \boldsymbol{x_o} \end{cases}$

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se $\boldsymbol{f}$ é contínua em $[a, b]$ e $\boldsymbol{f'}$, $\boldsymbol{f''}$ $\exists\ (a, b)$ e $\boldsymbol{x_0} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

- $\boldsymbol{f}$ tem Máximo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall\ x < \boldsymbol{x_o} \\ f'(x) < 0 & \forall\ x > \boldsymbol{x_o} \end{cases}$

- $\boldsymbol{f}$ tem mínimo em $\boldsymbol{x_o}$ se $f'(x_0) = 0$ e: $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall\ x < \boldsymbol{x_o} \\ f'(x) > 0 & \forall\ x > \boldsymbol{x_o} \end{cases}$

Teste das derivadas 1ª e 2ª

Se f é contínua em $[a, b]$ e f', f'' $\exists$ (a, b) e $x_0 \in (a, b)$

- f tem Máximo em x_o se $f'(x_0) = 0$ e: $\begin{cases} f'(x) > 0 & \forall\ x < x_o \\ f'(x) < 0 & \forall\ x > x_o \end{cases}$

- f tem mínimo em x_o se $f'(x_0) = 0$ e: $\begin{cases} f'(x) < 0 & \forall\ x < x_o \\ f'(x) > 0 & \forall\ x > x_o \end{cases}$

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de Máximo;
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ é ponto de mínimo;
- $f''(x_0) = 0$ nada se conclui sobre o ponto.

Concavidade e ponto de inflexão

- Embora, quando: $f''(x_0) = 0$ o teste da derivada segunda não forneça conclusão, é possível identificar se ocorre mudança na concavidade.

- Se x_0 não for ponto crítico poderá ser um ponto de inflexão.

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f contínua em $[a, b]$ e com derivadas f', f'' no intervalo (a, b).

Em termos de concavidade a função pode ser:

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f contínua em $[a, b]$ e com derivadas f', f'' no intervalo (a, b).

Em termos de concavidade a função pode ser:

- **Côncava para baixo (derrama água):**

  se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo (a, b);

Função côncava para cima ou para baixo

Seja f contínua em $[a, b]$ e com derivadas f', f'' no intervalo (a, b).

Em termos de concavidade a função pode ser:

- **Côncava para baixo (derrama água):**

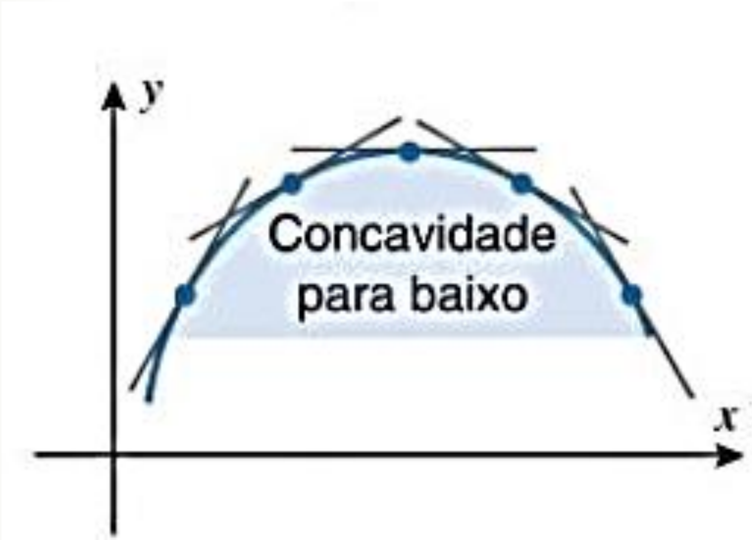
  se o gráfico de f estiver abaixo de todas as suas tangentes no intervalo (a, b);

- **Côncava para cima (segura água):**

  se o gráfico de f estiver acima de todas as suas tangentes no intervalo (a, b).

prof. Henrique A M Faria

Função côncava para cima ou para baixo

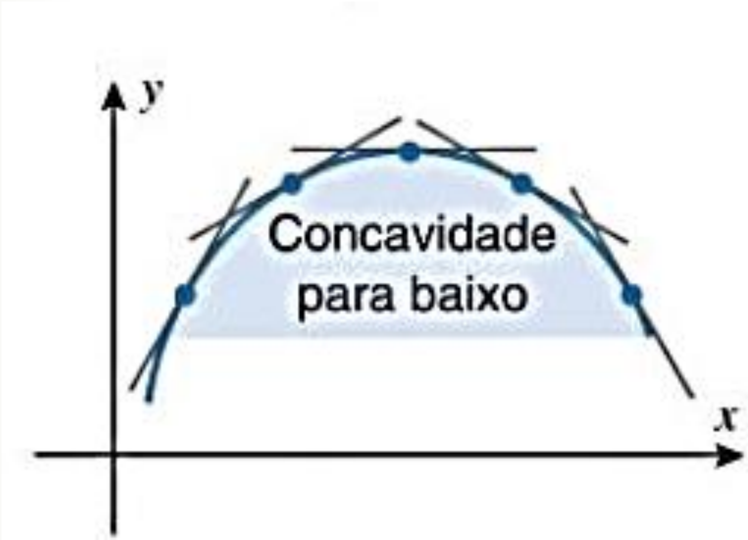


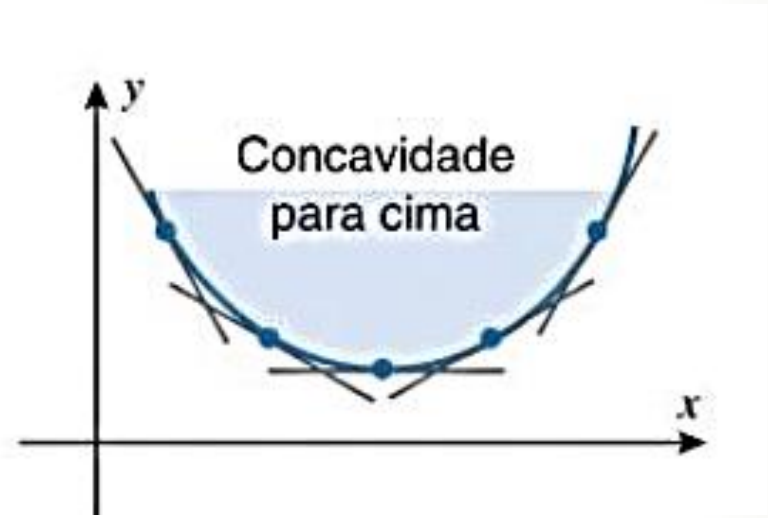
Côncava para baixo

gráfico de ***f*** está abaixo das tangentes.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Função côncava para cima ou para baixo





Côncava para baixo

gráfico de ***f*** está abaixo das tangentes.

Côncava para cima

gráfico de ***f*** está acima das tangentes.

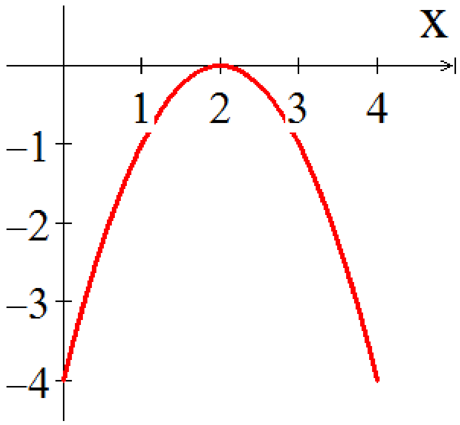
Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Teste da concavidade

Seja f é contínua em [a, b] e f', f'' ∃ (a, b):

Se $f'' < 0 \quad \forall \ x \in (a, b)$

f *côncava p/baixo*



$y = -(x - 2)^2$

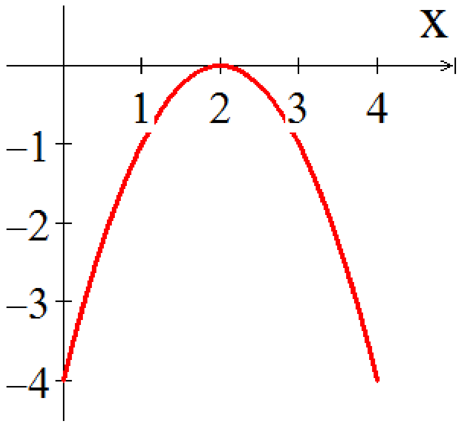
$y'' = -2 < 0$

Teste da concavidade

Seja f é contínua em [a, b] e f', f'' ∃ (a, b):

Se $f'' < 0 \;\; \forall \;\; x \in (a, b)$

f *côncava p/baixo*

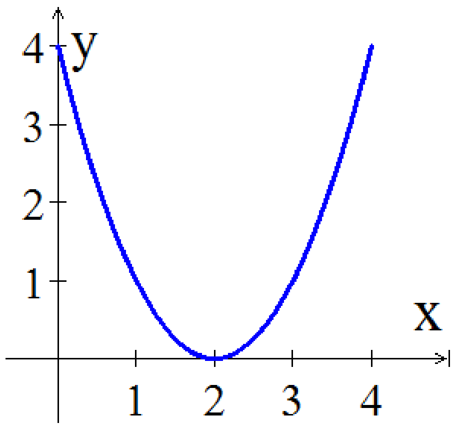


$$y = -(x-2)^2$$

$$y'' = -2 < 0$$

Se $f'' > 0 \;\; \forall \;\; x \in (a, b)$

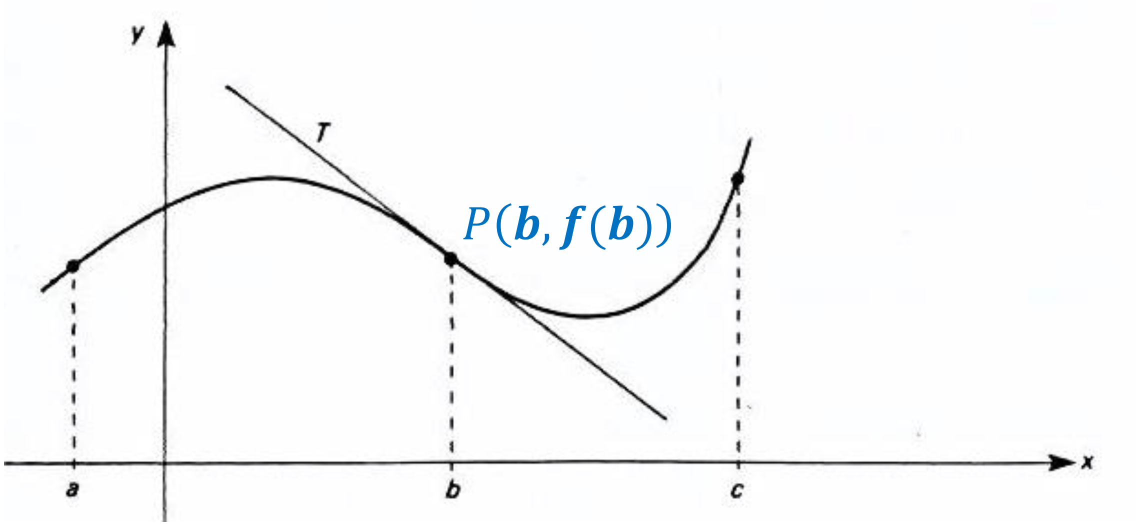
f *côncava p/cima*



$$y = (x-2)^2$$

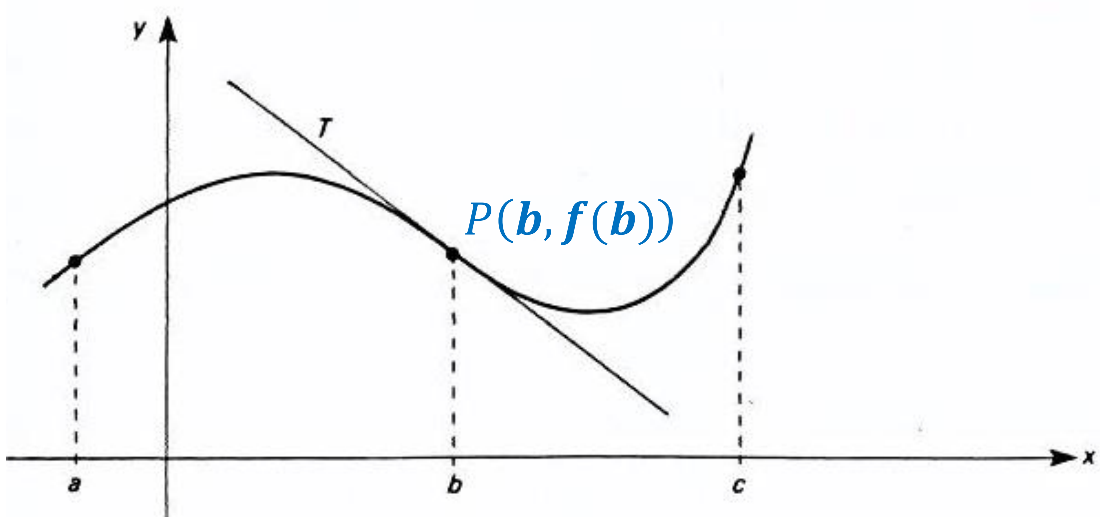
$$y'' = 2 > 0$$

Ponto de inflexão



- Na vizinhança de $P(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$ a função passa de convexa para côncava;

Ponto de inflexão



- Na vizinhança de $P(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$ a função passa de convexa para côncava;
- A Tangente está acima do lado esquerdo e abaixo do lado direito;
- Em $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}))$ tem-se um ponto de inflexão.

Teorema

Seja $\boldsymbol{f}$ é contínua e com derivadas $\boldsymbol{f'}$, $\boldsymbol{f''}$ também contínuas no intervalo $\boldsymbol{I}$.

Se $\boldsymbol{x} = b$ pertence ao intervalo $\boldsymbol{I}$, ocorrerá um ponto de inflexão em b se:

Ou seja, se houver inversão no sinal de $\boldsymbol{f''}$ em torno de $\boldsymbol{b}$ haverá ponto de inflexão.

Como traçar gráficos

A. Domínio

Determinar $D \in \mathbb{R}$ (atenção para razões e radicais);

B. Interceptos

Onde curva corta $eixo\ y\ (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})$ **e** $eixo\ x\ (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0})$

C. Simetria

Se $f(-x) = f(x)\ \ \forall\ \ x \in D$: $\ f$ **é par e simétrica pelo** ***eixo y*****;**

Se $f(-x) = -f(x)\ \ \forall\ \ x \in D$: $\ f$ **é ímpar e simétrica pela origem;**

Se $f(x+p) = f(x)\ \ \forall\ \ x \in D\ \ e\ p > 0$: f **é periódica de período** p**.**

Como traçar gráficos

D. Assíntotas

(i) Horizontais

Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Então: $y = L$ **é uma assíntota horizontal**

(ii) Verticais

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical se pelo menos uma das afirmativas for verdadeira:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Como traçar gráficos

E. Intervalos de crescimento e decrescimento

Encontrar intervalos onde $f' < 0$ ou $f' > 0$.

F. Valores de máximo e mínimos locais

Encontrar pontos críticos (x_c):

$f'(x_c) = 0$ (teste da primeira derivada)

$$\begin{cases} f'(x_c) > 0 \;\; \forall \;\; x < x_c \\ f'(x_c) < 0 \;\; \forall \;\; x > x_c \end{cases} \quad \text{ponto de máximo}$$

$$\begin{cases} f'(x_c) < 0 \;\; \forall \;\; x < x_c \\ f'(x_c) > 0 \;\; \forall \;\; x > x_c \end{cases} \quad \text{ponto de mínimo}$$

$f''(x_c) \neq 0$ (teste da segunda derivada)

$$\begin{cases} f''(x_c) > 0 & \textbf{mínimo local} \\ f''(x_c) < 0 & \textbf{máximo local} \end{cases}$$

Como traçar gráficos

G. Concavidade e ponto de inflexão

Calcular $\boldsymbol{f''(x)}$

$$\begin{cases} f''(x) > \mathbf{0} & \textbf{côncava para cima} \\ f''(x) < \mathbf{0} & \textbf{côncava para baixo} \end{cases}$$

O ponto de inflexão ocorre quando a derivada segunda muda de sinal em x $= \boldsymbol{b}$ (raíz de $\boldsymbol{f''(x)}$).

H. Esboço do gráfico

Com os dados dos itens A até G traçar o gráfico da função.

Exemplo

Utilizar a metodologia para traçar o gráfico da função:

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x-1}{x-2}}$$

Para depois desta aula:

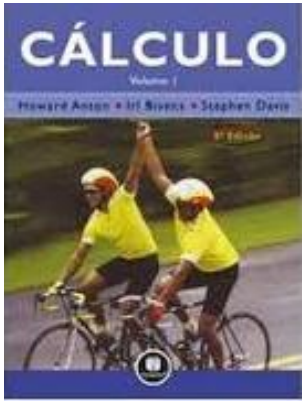
- Reler o capítulo no livro texto;
- Resolver os exemplos dados em aula;
- Fazer a lista de exercícios (baixar no site);

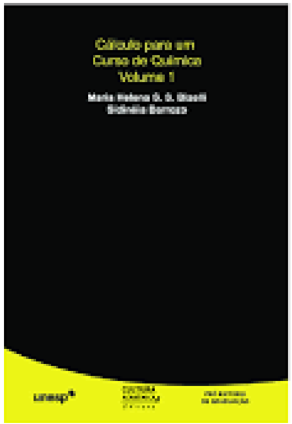
Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

Figuras. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo – v.1. 10. ed. São Paulo: Bookman, 2014.

2. BIZELLI, Maria Helena S.S.; BARROZO, Sidineia. Cálculo para um Curso de Química – volume 1. 1. ed. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2009.





Contatos e material de apoio

profhenriquefaria.com

henrique.faria@unesp.br