

# Equações diferenciais



Equações diferenciais  
ordinárias

**Aula 13**

Teoremas de existência  
e unicidade

Henrique Antonio Mendonça Faria


Henrique.faria@unesp.br

# Tópicos desta aula

1. Teoremas de existência e unicidade.
2. Exemplos.

## Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.



**Teoremas de  
existência e unicidade**

# Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.

# Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?

# Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?

# Teoremas de existência e unicidade

- Foram estudados até o momento os problemas de valor inicial com equações diferenciais de 1ª ordem.
- Foi visto que nem toda equação diferencial tem solução analítica.
- Então, antes de resolver um PVI analiticamente, não seria interessante saber se existe solução?
- Além disso, verificar se a solução será única?
- O teorema seguinte responde estas duas perguntas.

## Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções  $p$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , contendo o ponto  $t = t_0$ ,

Então, existe uma única função  $y = \phi(t)$  que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  para cada  $t$  em  $I$ .

## Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções  $p$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , contendo o ponto  $t = t_0$ ,

Então, existe uma única função  $y = \phi(t)$  que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  para cada  $t$  em  $I$ .

O teorema diz que:

➤ *O PVI tem solução única se  $p(t)$  e  $g(t)$  são contínuas.*

## Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções  $p$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , contendo o ponto  $t = t_0$ ,

Então, existe uma única função  $y = \phi(t)$  que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  para cada  $t$  em  $I$ .

O teorema diz que:

- *O PVI tem solução única se  $p(t)$  e  $g(t)$  são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo  $I$ , contendo a condição inicial e no qual  $p(t)$  e  $g(t)$  são contínuas.*

## Teorema 2.4.1 (Ref. Boyce 9ª ed.)

Se as funções  $p$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ , contendo o ponto  $t = t_0$ ,

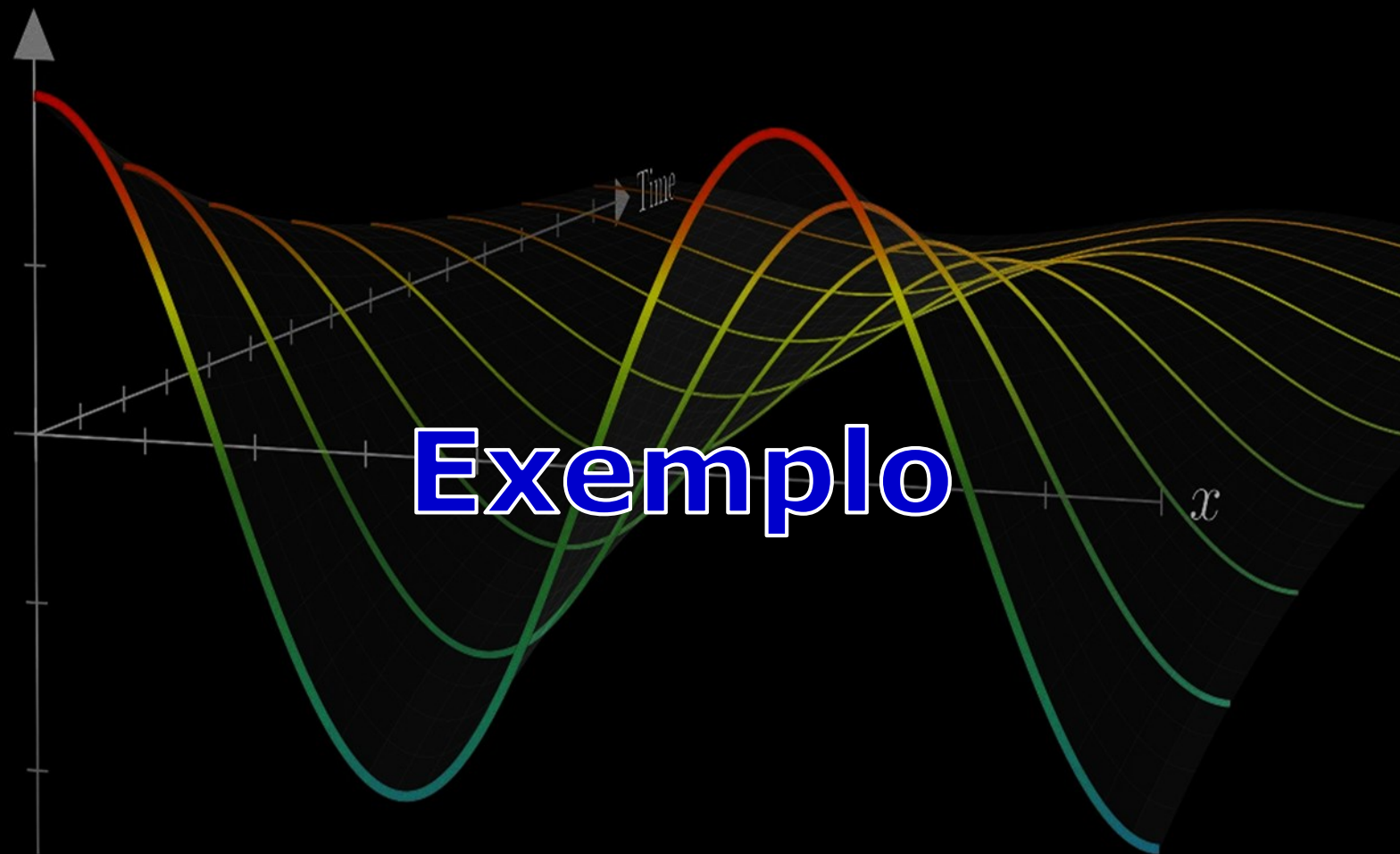
Então, existe uma única função  $y = \phi(t)$  que satisfaz a equação:

$$y' + p(t)y = g(t)$$

E a condição inicial  $y(t_0) = y_0$  para cada  $t$  em  $I$ .

**O teorema diz que:**

- *O PVI tem solução única se  $p(t)$  e  $g(t)$  são contínuas.*
- *A solução existe em qualquer intervalo  $I$ , contendo a condição inicial e no qual  $p(t)$  e  $g(t)$  são contínuas.*
- *Poderá haver descontinuidade da solução nos pontos em que  $p(t)$  e  $g(t)$  forem descontínuas.*



**Exemplo**

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t,$$

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

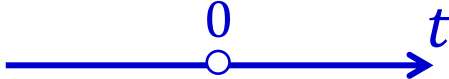
$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

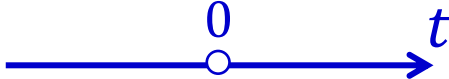
✓ A eq. dif. é linear,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $p$  é contínua para todo  $t \neq 0$  ( $t < 0$  ou  $t > 0$ ). 

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

✓ A eq. dif. é linear,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $p$  é contínua para todo  $t \neq 0$  ( $t < 0$  ou  $t > 0$ ). 

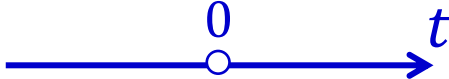
✓ O intervalo  $t > 0$  contém a condição  $y(1) = 2$

**Exemplo 1:** Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2$$

✓ Colocar a eq. dif. na forma padrão.

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t, \quad p(t) = \frac{2}{t} \quad e \quad g(t) = 4t$$

✓ A eq. dif. é linear,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $p$  é contínua para todo  $t \neq 0$  ( $t < 0$  ou  $t > 0$ ). 

✓ O intervalo  $t > 0$  contém a condição  $y(1) = 2$

✓ Então, o Teorema 2.4.1 garante que o PVI tem uma única solução no intervalo  $(0, +\infty)$  para  $t$ .



# Exercícios

Encontrar o intervalo no qual o PVI tem solução única.

Respostas

**1**  $t(t - 4)y' + y = 0$        $y(2) = 1$        $(0, 4)$

**2**  $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2$        $y(-3) = 1$        $(-\infty, -2)$

**3**  $(4 - t^2)y' + 2ty = 3t^2$        $y(1) = 3$        $(-2, 2)$

**4**  $(\ln t)y' + y = \cos t$        $y(2) = 3$        $(1, \infty)$

## Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.4 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercícios propostos.
- Praticar: exercícios da seções 2.4.

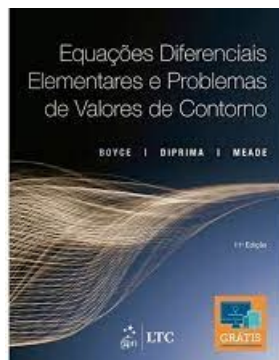
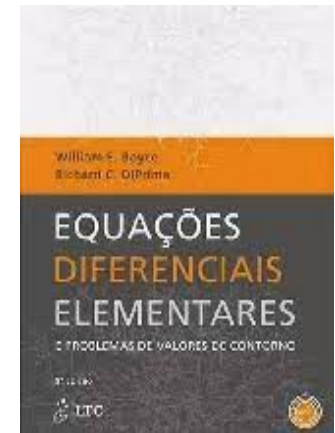
## Próxima aula:

- Equações diferenciais de 2ª ordem.

# Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios  
com base na 9ª ed. ▶



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.