Aula

Revisão para Avaliação 1

Conteúdos

1. Números reais: operações e propriedades.

2. Radiciação e potenciação.

3. Polinômios e fatoração.

4. Expressões fracionárias.

5. Equações.

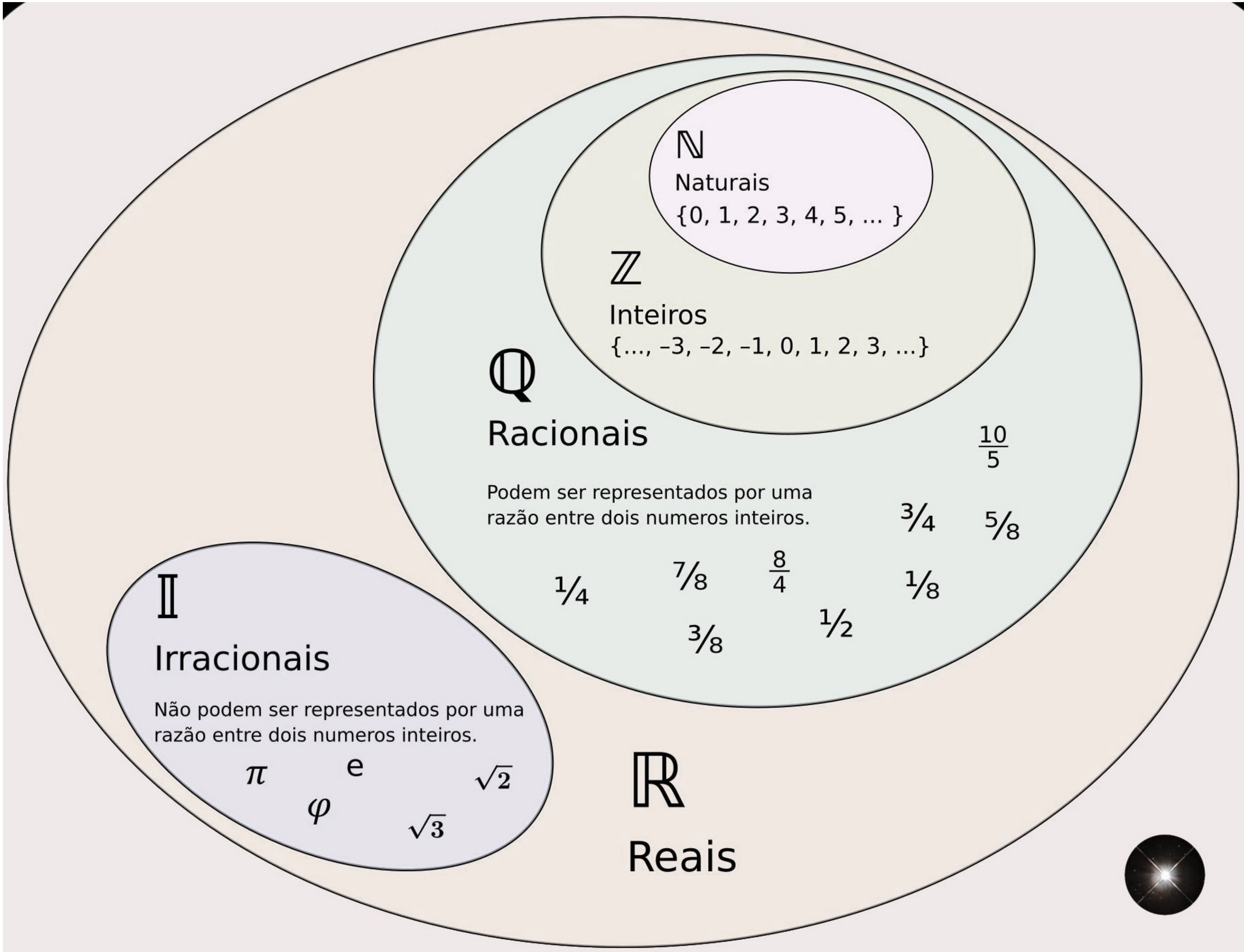
Números reais: operações e propriedades

Números reais

- Número real é aquele que pode ser escrito na forma decimal.

- O conjunto dos números reais contém vários subconjuntos:

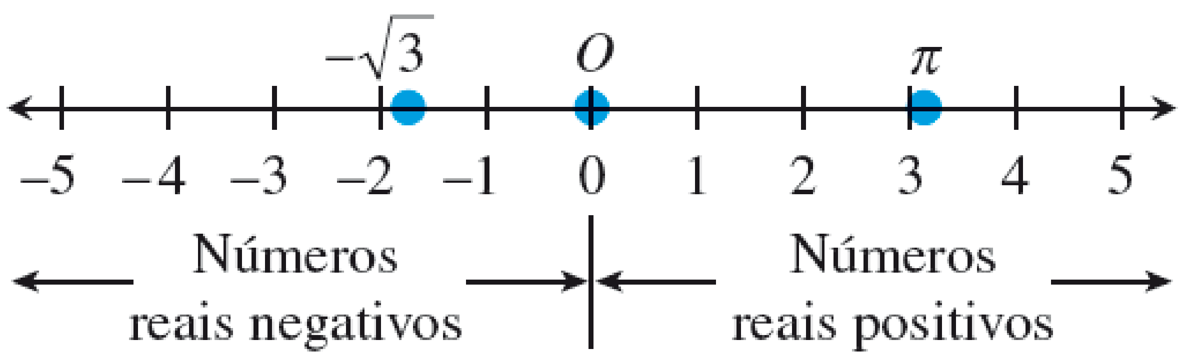
  - Números naturais: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - Números inteiros: $\{\ldots\ , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - Números racionais: $\{\frac{a}{b} \mid a, b\ são\ inteiros\ e\ b \neq 0\}$
  - Números irracionais: não podem ser frações



$\mathbb{N}$
Naturais
{0, 1, 2, 3, 4, 5, ... }
$\mathbb{Z}$
Inteiros
{..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}
$\mathbb{Q}$
Racionais
Podem ser representados por uma razão entre dois numeros inteiros.
$\frac{10}{5}$
$3/4$
$5/8$
$1/4$
$7/8$
$\frac{8}{4}$
$1/8$
$1/2$
$3/8$
$\mathbb{I}$
Irracionais
Não podem ser representados por uma razão entre dois numeros inteiros.
π
e
$\sqrt{2}$
φ
$\sqrt{3}$
$\mathbb{R}$
Reais

Números reais

- Para representar os números reais, marcamos o número real 0 (zero), que representa a origem, em uma reta horizontal.
- Os números positivos estão à direita da origem e os números negativos, à esquerda.



Números reais

- **Lei da tricotomia**

Sejam a e b dois números reais quaisquer.

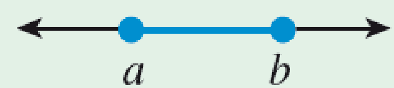
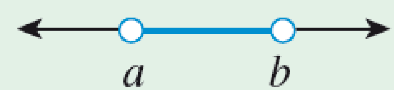
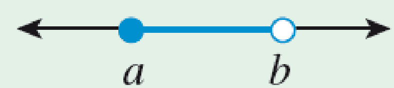
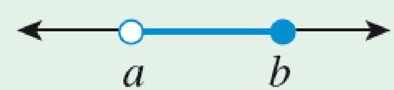
Somente uma das seguintes expressões é verdadeira:

$$a < b, \qquad a = b \qquad \text{ou} \qquad a > b$$

Números reais

➢ Intervalos limitados de números reais

Sejam a e b números reais com a < b.

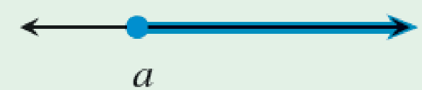
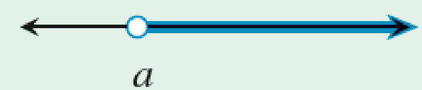
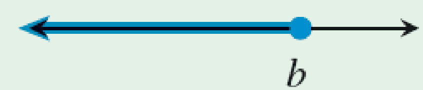
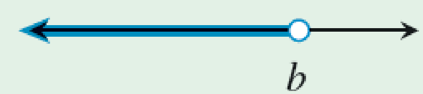
Notação de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notação de desigualdade**	**Representação gráfica**
$[a, b]$	Fechado	$a \leq x \leq b$	
$]a, b[$	Aberto	$a < x < b$	
$[a, b[$	Fechado à esquerda e aberto à direita	$a \leq x < b$	
$]a, b]$	Aberto à esquerda e fechado à direita	$a < x \leq b$	

Os números a e b são os **extremos** de cada intervalo.

Números reais

➢ **Intervalos não limitados**

Sejam a e b números reais com a < b.

Notação de intervalo	**Tipo de intervalo**	**Notação de desigualdade**	**Representação gráfica**
$[a, +\infty[$	Fechado	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$	Aberto	$x > a$	
$]-\infty, b]$	Fechado	$x \leq b$	
$]-\infty, b[$	Aberto	$x < b$	

Cada intervalo tem exatamente um extremo, que é a ou b.

Propriedades básicas da álgebra

Sejam u, v e w números reais, variáveis ou expressões.

Adição: $u + v = v + u$
Multiplicação: $uv = vu$

Comutativa

Adição: $(u + v) + w = u + (v + w)$
Multiplicação: $(uv)w = u(vw)$

Associativa

Adição: $u + 0 = u$
Multiplicação: $u \cdot 1 = u$

Elemento neutro

Adição: $u + (-u) = 0$
Multiplicação: $u \cdot \dfrac{1}{u} = 1,\ u \neq 0$

Elemento inverso

Multiplicação com relação à adição:
$u(v + w) = uv + uw$
$(u + v)w = uw + vw$

Distribuitiva

Propriedades da inversa

Sejam u, v números reais, variáveis ou expressões.

Propriedade	Exemplo
1. $-(-u) = u$	$-(-3) = 3$
2. $(-u)v = u(-v) = -(uv)$	$(-4)3 = 4(-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
3. $(-u)(-v) = uv$	$(-6)(-7) = 6 \cdot 7 = 42$
4. $(-1)u = -u$	$(-1)5 = -5$
5. $-(u + v) = (-u) + (-v)$	$-(7 + 9) = (-7) + (-9) = -16$

Potenciação com expoentes inteiros

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões, com as bases diferentes de zero, e *m* e *n* números inteiros.

Propriedade	Exemplo
1. $u^m u^n = u^{m+n}$	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
2. $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$	$\dfrac{x^9}{x^4} = x^{9-4} = x^5$
3. $u^0 = 1$	$8^0 = 1$
4. $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$	$y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$
5. $(uv)^m = u^m v^m$	$(2z)^5 = 2^5 z^5 = 32z^5$
6. $(u^m)^n = u^{mn}$	$(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^7 = \dfrac{a^7}{b^7}$

Notação científica

- Todo número positivo pode ser escrito em notação científica.
- É uma alternativa para representar números muito grandes ou muito pequenos.

$c \times 10^m$, onde $1 \leq c < 10$ e m é um número inteiro.

Exemplo: distância da terra ao sol:

$149.597.870{,}691 \text{ km} \cong 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}.$

Radiciação e potenciação

Propriedade dos Radicais

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas, e m e n números inteiros maiores do que 1.

Propriedade	Exemplo
1. $\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3}$ $= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m \cdot n]{u}$	$\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$
4. $(\sqrt[n]{u})^n = u$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5$
5. $\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$	$\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$
6. $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} \lvert u \rvert & \text{para } n \text{ par} \\ u & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

Racionalização

- Processo para eliminar as raízes do denominador das frações.
- Potenciação com expoentes racionais: u real, variável ou expressão, e n um inteiro > 1.

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}.$$

- Se m é um inteiro positivo, m/n e todas as raízes são números reais, então:

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m \qquad \text{e}$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}.$$

Simplificação com expoentes racionais

- Remover os fatores dos radicais.
- Eliminar os radicais dos denominadores.
- Combinar somas e diferenças dos radicais, se possível.

Polinômios e fatoração

Polinômios e fatoração

- Um polinômio em x é qualquer expressão que pode ser escrita na forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

- O grau do polinômio é n, e o coeficiente principal é o número real a_n.
- Polinômios com um, dois e três termos são chamados monômios, binômios e trinômios.
- Um polinômio escrito com as potências de x na ordem decrescente está na forma padrão.

Polinômios e fatoração

- **Adição ou subtração de polinômios**:
  - adicionar ou subtrair os termos com o mesmo expoente na variável, chamados termos semelhantes.

- **Multiplicação de polinômios**:
  - utilizar a propriedade distributiva da álgebra.

Produtos notáveis

Sejam u e v números reais, variáveis ou expressões algébricas.

1. **Produto de uma soma e de uma diferença:** $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$
2. **Quadrado de uma soma de dois termos:** $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$
3. **Quadrado de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$
4. **Cubo de uma soma de dois termos:** $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$
5. **Cubo de uma diferença de dois termos:** $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

Fatoração com produtos notáveis

- Fatorar um polinômio é escrever um produto de dois ou mais fatores polinomiais.
- Um polinômio que não pode ser fatorado com o uso de coeficientes inteiros é um polinômio irredutível.
- Um polinômio está fatorado completamente se estiver escrito como um produto de seus fatores irredutíveis.

Fatoração de polinômios

1. Observar os fatores comuns.
2. Observar as formas especiais dos polinômios.
3. Usar pares de fatores.
4. Se existirem quatro termos, tentar agrupá-los.

Relações importantes

Potências

Se todas as bases são diferentes de zero:

$$u^m u^n = u^{m+n}$$

$$\frac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$$

$$u^0 = 1$$

$$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$$

$$(uv)^m = u^m v^m$$

$$(u^m)^n = u^{mn}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^m = \frac{u^m}{v^m}$$

Relações importantes

Radicais e expoentes racionais

Se todas as raízes são números reais:

$$\sqrt[n]{uv} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$$

$$\sqrt[n]{\frac{u}{v}} = \frac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}} \ (v \neq 0)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[mn]{u}$$

$$(\sqrt[n]{u})^n = u$$

$$\sqrt[n]{u^m} = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u| & n \text{ par} \\ u & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

$$u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$$

$$u^{m/n} = (u^{1/n})^m = (\sqrt[n]{u})^m$$

$$u^{m/n} = (u^m)^{1/n} = \sqrt[n]{u^m}$$

Expressões fracionárias

Expressões fracionárias

- Um quociente de duas expressões algébricas é uma expressão fracionária, ou simplesmente uma fração.
- **Expressão racional**: quociente de dois polinômios.
- **Domínio da expressão algébrica**: os números reais para os quais essa expressão algébrica é definida.
  - Restrições no conjunto dos reais ($\mathbb{R}$):
    - Divisão por zero: $a/b \;\rightarrow\; b \neq 0$
    - Número negativo em raiz par:

      $$\sqrt[n]{x}, \quad se\; n\; par,\; então\; x \geq 0$$

    - Logaritmando maior que zero: $\log x\,, \quad x > 0$

Expressões fracionárias

Sejam u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas. Considerando todos os denominadores diferentes de zero, temos:

Operação	**Exemplo**
1. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{v} = \dfrac{u+w}{v}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{2+5}{3} = \dfrac{7}{3}$
2. $\dfrac{u}{v} + \dfrac{w}{z} = \dfrac{uz+vw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{22}{15}$
3. $\dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{w}{z} = \dfrac{uw}{vz}$	$\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}$
4. $\dfrac{u}{v} \div \dfrac{w}{z} = \dfrac{u}{v} \cdot \dfrac{z}{w} = \dfrac{uz}{vw}$	$\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

5. Para subtração, substitua "+" por "−" em 1 e 2.

- Simplificação de expressões fracionárias:
  - Colocar fatores comuns em evidência.
  - Eliminar fatores comuns do numerador e denominador.

Equações

Equações

- Uma equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade entre duas expressões algébricas.
- Para resolver essas equações, utilizamos algumas propriedades da igualdade.

Sendo u, v, w e z números reais, variáveis ou expressões algébricas, temos:

1. Reflexiva	$u = u$
2. Simétrica	Se $u = v$, então $v = u$
3. Transitiva	Se $u = v$ e $v = w$, então $u = w$
4. Adição	Se $u = v$ e $w = z$, então $u + w = v + z$
5. Multiplicação	Se $u = v$ e $w = z$, então $u \cdot w = v \cdot z$

Resolução de equações

- Resolver uma equação em x significa encontrar todos os valores de x para os quais a equação é verdadeira.
- A equação mais básica na álgebra é a equação linear.

DEFINIÇÃO Equação linear em x

Uma **equação linear em x** é aquela que pode ser escrita na forma:

$$ax + b = 0,$$

onde a e b são números reais com $a \neq 0$.

- Qualquer letra pode ser a incógnita da equação.
- A equação linear tem somente uma solução.

Operações para equações equivalentes

Uma equação equivalente é obtida se uma ou mais das seguintes operações são aplicadas.

Operação	Equação dada	Equação equivalente
1. Combinar termos semelhantes, simplificar frações e remover símbolos por meio de agrupamento.	$2x + x = \frac{3}{9}$	$3x = \frac{1}{3}$
2. Aplicar a mesma operação em ambos os lados.		
(a) Adicionar (-3).	$x + 3 = 7$	$x = 4$
(b) Subtrair $(2x)$.	$5x = 2x + 4$	$3x = 4$
(c) Multiplicar por uma constante diferente de zero $(1/3)$.	$3x = 12$	$x = 4$
(d) Dividir por uma constante diferente de zero (3).	$3x = 12$	$x = 4$

Equações quadráticas

DEFINIÇÃO Equação quadrática em x

Uma **equação quadrática em x** é aquela que pode ser escrita na forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

- Uma das técnicas algébricas básicas para resolver equações quadráticas é a fatoração.
- Outra técnica consiste em completar quadrados.
- Por fim, a técnica mais comum é a fórmula de Bhaskara.

Equações quadráticas

Completando o quadrado

Para resolver $x^2 + bx = c$ por meio do procedimento de **completar o quadrado**, adicionamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos os lados da equação e fatoramos o lado esquerdo da nova equação.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4}$$

- Primeiro, deixar o coeficiente de x^2 igual a 1.
- Deixar os termos em x do lado direito da igualdade.
- Encontrar o quadrado do segundo termo e somar em ambos os lados da equação.
- Identificar o quadrado perfeito e resolver para x.

Equações quadráticas

Fórmula quadrática (também conhecida como fórmula de Bhaskara)

As soluções da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, são dadas pela **fórmula**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sugestões para estudo

- Releia os slides apresentados na revisão.
- Compreenda os conceitos e definições.
- Refaça pelo menos 6 exercícios da lista de cada tópico.
- Entenda o processo de resolução, sem decorar as operações.
- Qualquer pequena mudança no exercício pode levar a um resultado completamente diferente.

Bons estudos!

Referência

DEMANA, Franklin D.; WAITS, Bert K.; FOLEY, Gregory D.; KENNEDY, Daniel. Pré-Cálculo - volume 1. 2 ed. São Paulo : Pearson Addison Wesley, 2009.