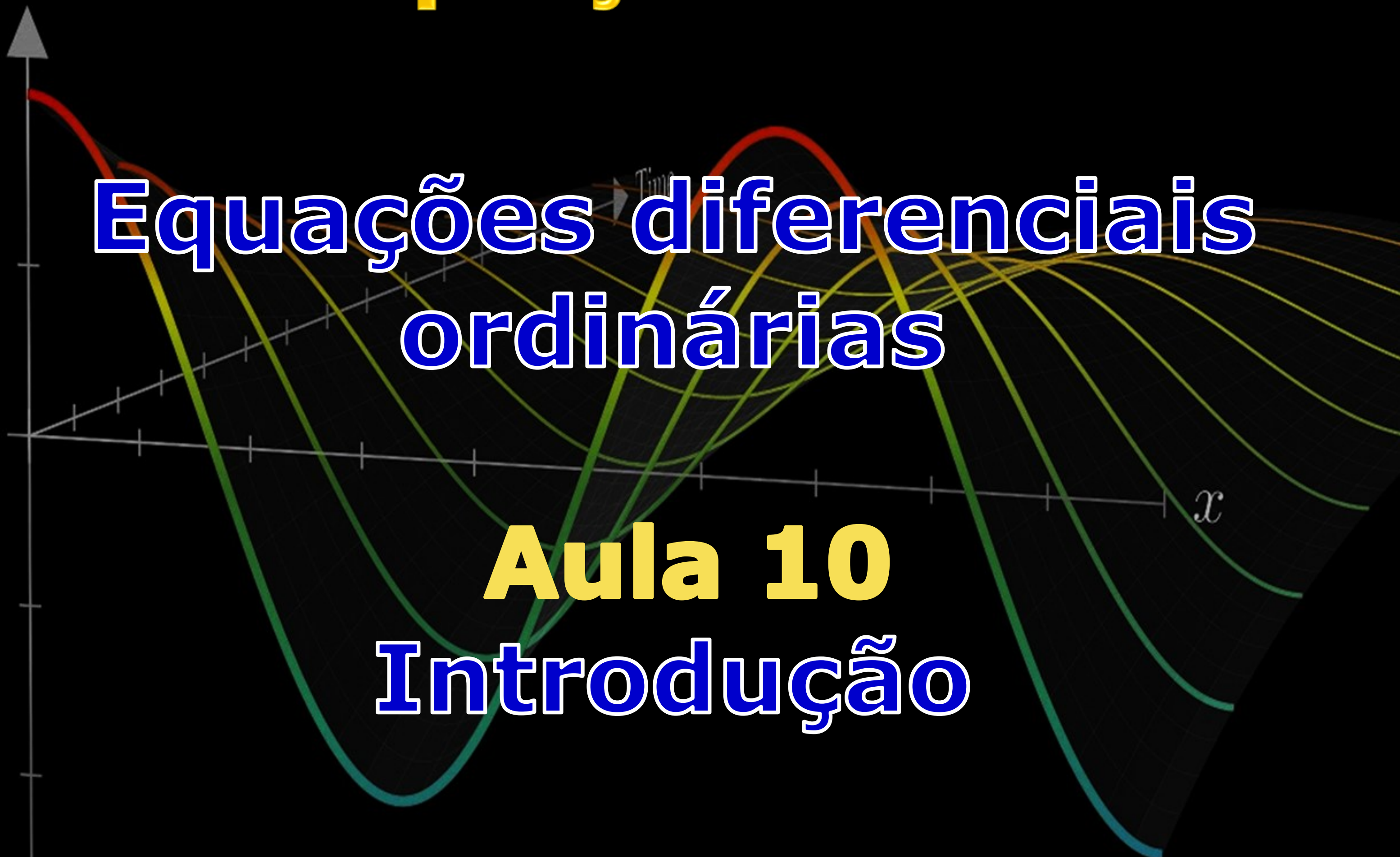
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 10
Introdução

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Motivação.
2. Modelos matemáticos.
3. Campos de direções e construção de modelos.
4. Classificação das equações diferencias.

Pré-requisitos

Cálculo I: diferenciação e integração.

Motivação

Motivação

- As equações diferenciais são estudadas há três séculos pelos maiores matemáticos do mundo.

- Elas continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica nos dias atuais.

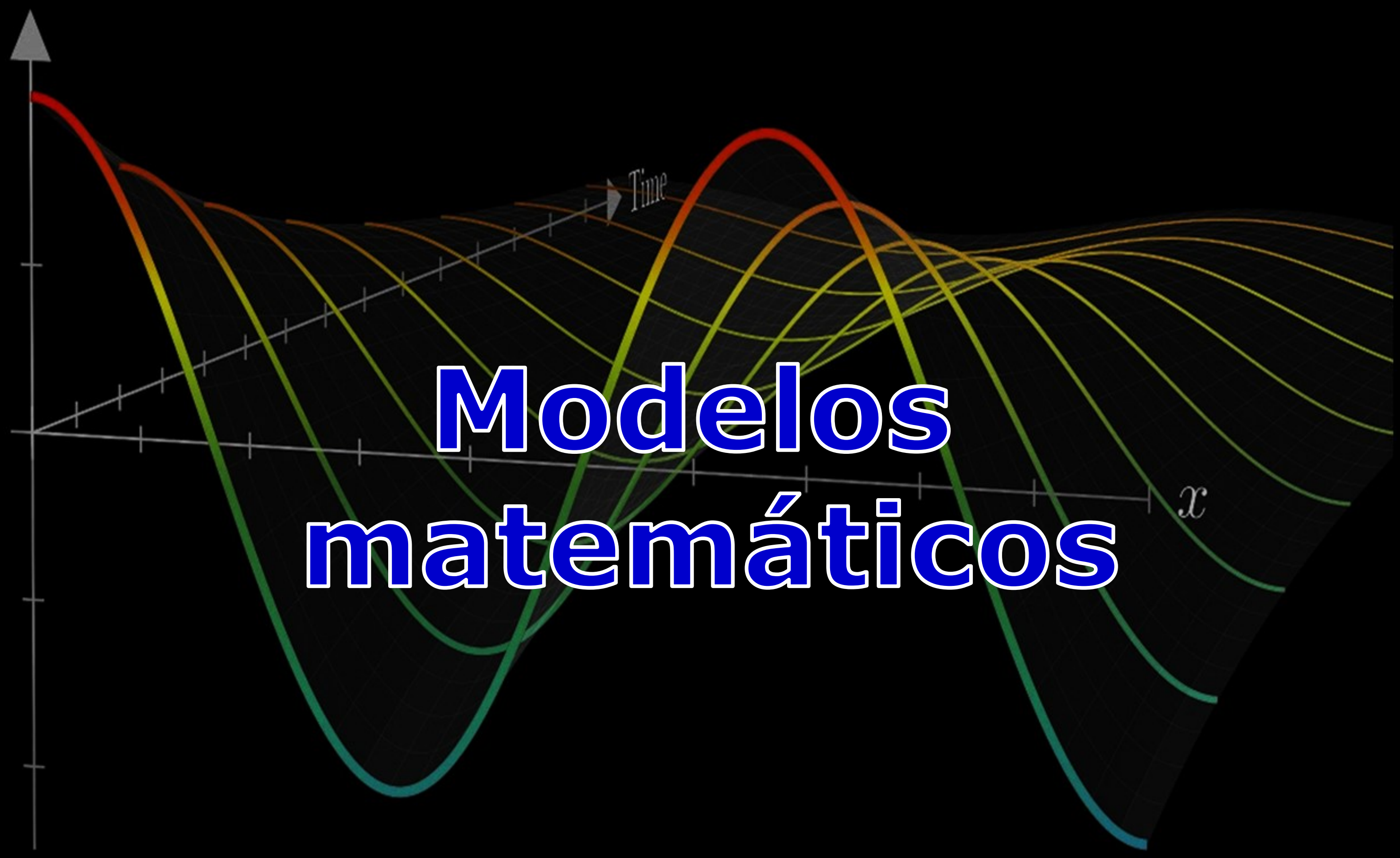
Motivação

- As equações diferenciais são estudadas há três séculos pelos maiores matemáticos do mundo.

- Elas continuam sendo uma área de pesquisa dinâmica nos dias atuais.

- As equações diferenciais são aplicadas em diversas áreas de estudo.
  - Exemplos: reações químicas, reatores químicos, cinética química, entre outras.

Modelos matemáticos



Modelos matemáticos

- Muitos dos princípios, ou leis, que regem o mundo físico são **relações** entre **taxas de variação**.
- As relações são as equações e as taxas de variação são as derivadas.

Modelos matemáticos

- Muitos dos princípios, ou leis, que regem o mundo físico são **relações** entre **taxas de variação**.
- As relações são as equações e as taxas de variação são as derivadas.
- Equações contendo derivadas são chamadas de equações diferenciais.
- Uma **equação diferencial** que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de um **modelo matemático** do processo.

Exemplo 1: Objeto em queda livre

Exemplo 1: Objeto em queda livre

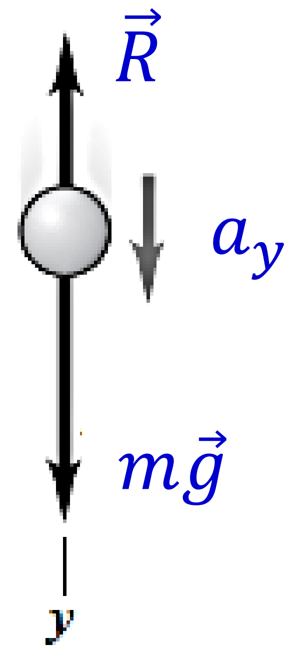
- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.

Fonte: Sears e Zemansky (2008)

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.

Fonte: Sears e Zemansky (2008)



Exemplo 1: Objeto em queda livre

- Queda na atmosfera.
- Próximo à superfície.
- Força de arraste é considerada.

Fonte: Sears e Zemansky (2008)

t: variável independente.

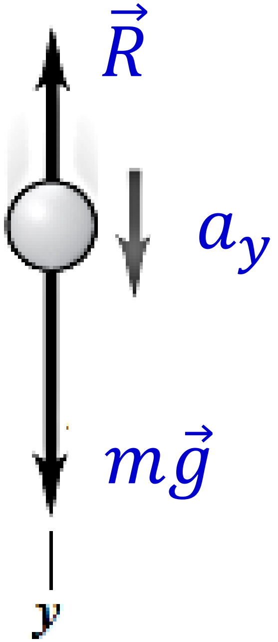
$v(t)$: variável dependente (?).

R: força de arraste (resistência do ar).

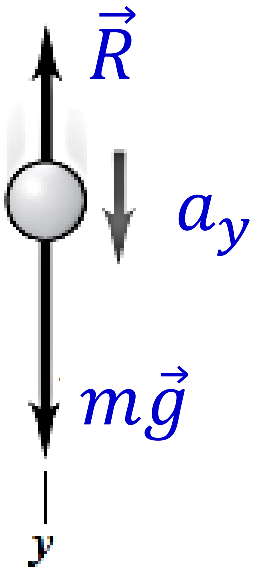
g: aceleração devido à gravidade.

m: massa do corpo.

γ: coeficiente de resistência do ar.



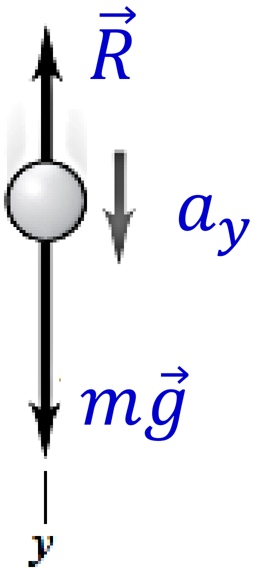
Exemplo 1: Objeto em queda livre



- ✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre

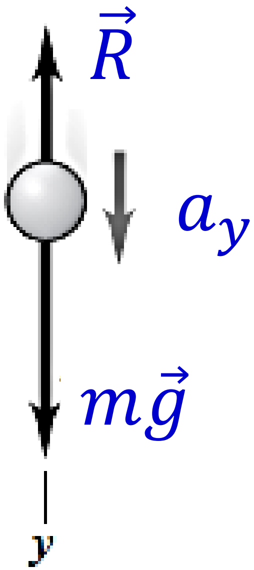


✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre



- ✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

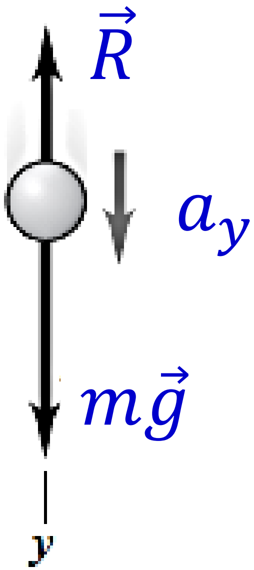
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

- ✓ Supondo o arraste proporcional à velocidade: $\boldsymbol{R = \gamma v}$

$$mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt}$$

Exemplo 1: Objeto em queda livre



- ✓ Lei do movimento: 2ª Lei Newton.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_y = mg + (-R) = ma_y$$

- ✓ Supondo o arraste proporcional à velocidade: $\boldsymbol{R = \gamma v}$

$$mg - \gamma v = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v}$$

Modelo matemático do corpo em queda

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.
- ✓ Em **outros casos** a expressão analítica é tão complicada que **não fornece interpretação válida**.

Exemplo 1: Objeto em queda livre

- ✓ Resolver o modelo é encontrar uma função $v = v(t)$ que substituída satisfaz a equação.
- ✓ Em muitas problemas reais as **soluções analíticas**, ou explícitas, são de **difícil obtenção**.
- ✓ Em **outros casos** a expressão analítica é tão complicada que **não fornece interpretação válida**.
- ✓ No entanto, é **possível extrair** do modelo muitas **informações** sem resolver a equação diferencial analiticamente.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9{,}8\frac{m}{s^2};\quad \gamma = 2\frac{kg}{s};\quad m = 10\,kg$$

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9{,}8\frac{m}{s^2};\quad \gamma = 2\frac{kg}{s};\quad m = 10\,kg$$

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2};\quad \gamma = 2\,\frac{kg}{s};\quad m = 10\,kg$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}}$$

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9{,}8\,\frac{m}{s^2};\quad \gamma = 2\,\frac{kg}{s};\quad m = 10\,kg$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}}$$

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

$v\ (^{m}/_{s})$	$\frac{dv}{dt}\ (^{m}/_{s^2})$
40	1,8

Análise do modelo do corpo em queda

- O objetivo é descobrir características relevantes sobre as soluções sem encontrá-las diretamente.
- Supondo os seguintes valores numéricos para as constantes do exemplo 1:

$$g = 9{,}8\frac{m}{s^2}; \quad \gamma = 2\frac{kg}{s}; \quad m = 10\ kg$$

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$$

- Para cada valor de v pode-se encontrar $\frac{dv}{dt}$.

$v\ (m/s)$	$\frac{dv}{dt}\ (m/s^2)$
40	1,8
44	1,0
50	− 0,2
52	− 0,6
56	− 1,4

Análise do modelo do corpo em queda

- Para cada v a derivada independe de t.

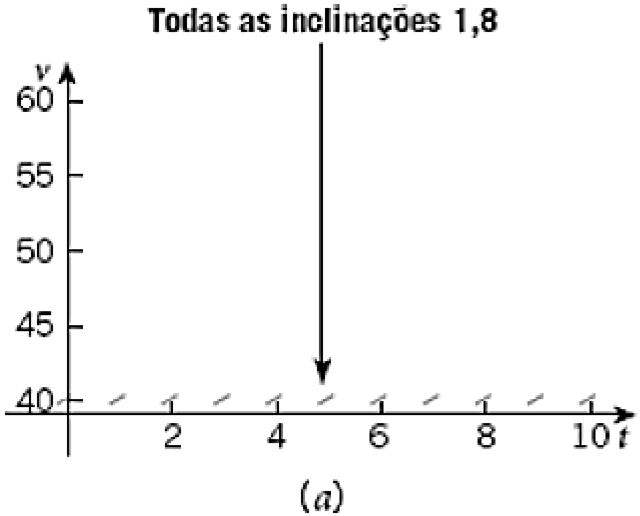
$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$$

Análise do modelo do corpo em queda

- Para cada v a derivada independe de t.

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$$

$v\ \left(m/_{s}\right)$	$\frac{dv}{dt}\ \left(m/_{s^2}\right)$
40	1,8
44	1,0
50	− 0,2
52	− 0,6
56	− 1,4



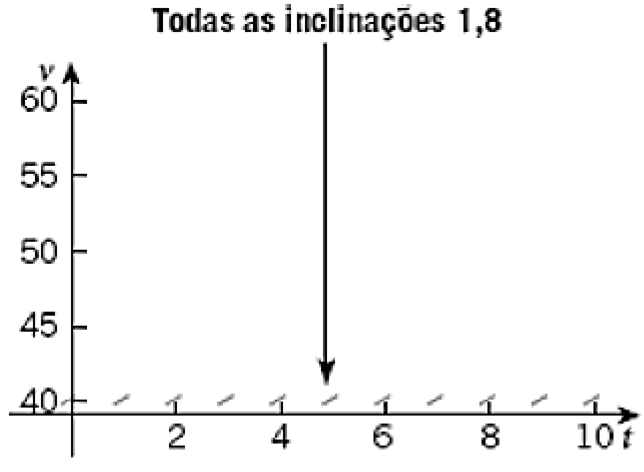
Fonte: Boyce 11ª ed. (2020)

Análise do modelo do corpo em queda

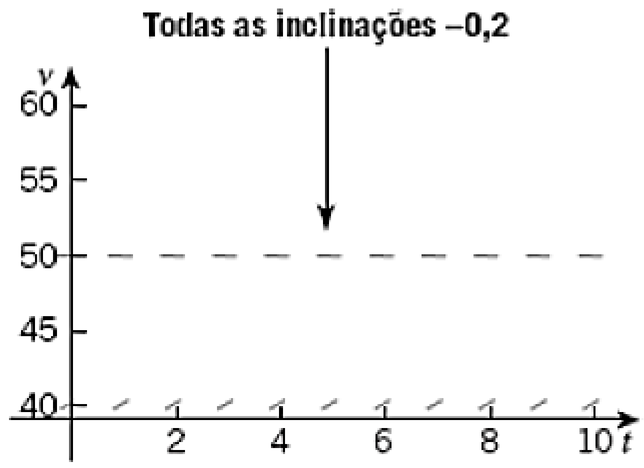
- Para cada v a derivada independe de t.

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}$$

$v\ ({}^{m}/_{s})$	$\frac{dv}{dt}\ ({}^{m}/_{s^2})$
40	1,8
44	1,0
50	– 0,2
52	– 0,6
56	– 1,4



(a)



(b)

Fonte: Boyce 11ª ed. (2020)

Análise do modelo do corpo em queda

- Atribuindo valores para v constrói-se o gráfico $v \times t$.

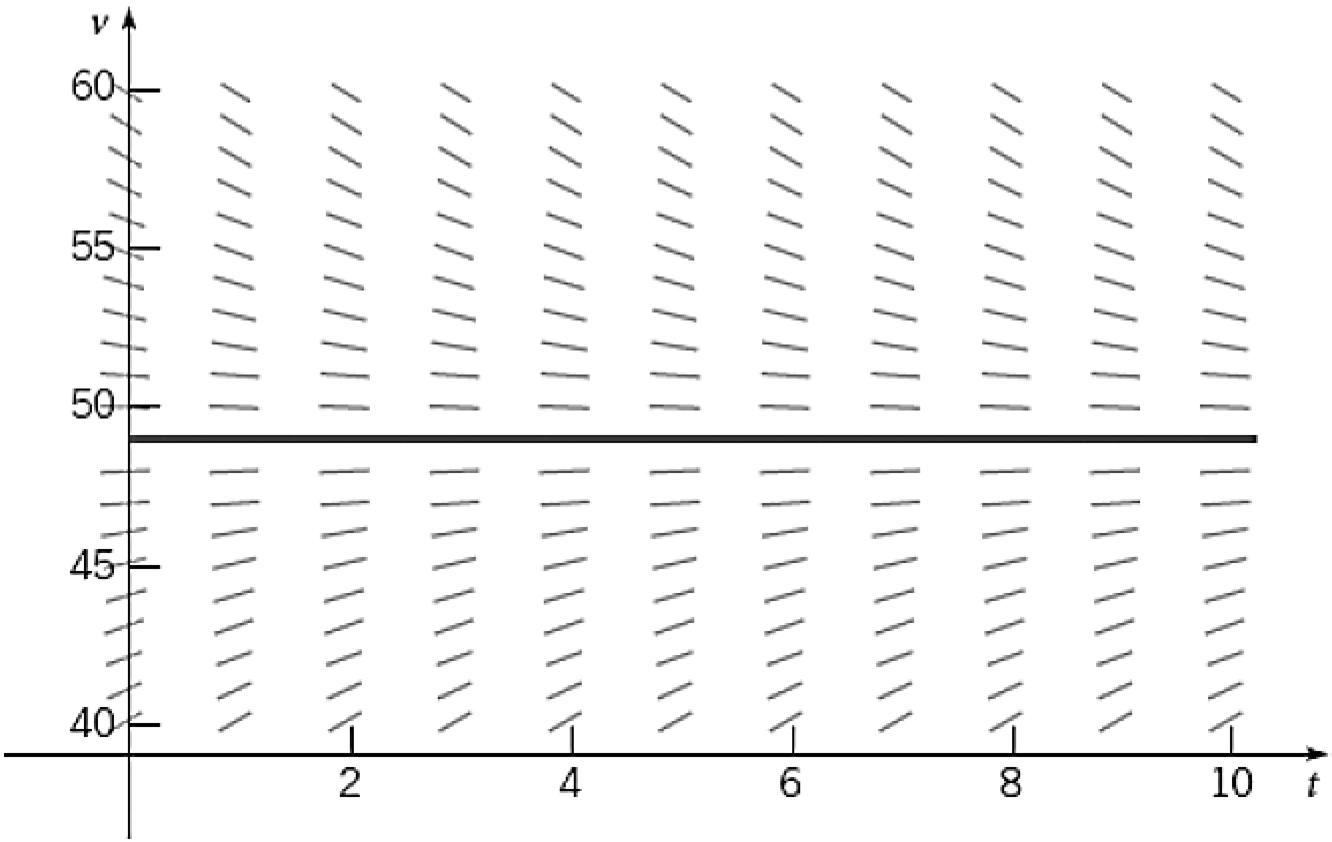


Figura 1.1.3: Campo de direções para o modelo do corpo em queda.

Fonte: Boyce 11ª ed. (2020) prof. Henrique A M Faria

Análise do modelo do corpo em queda

- Atribuindo valores para v constrói-se o gráfico $v \times t$.

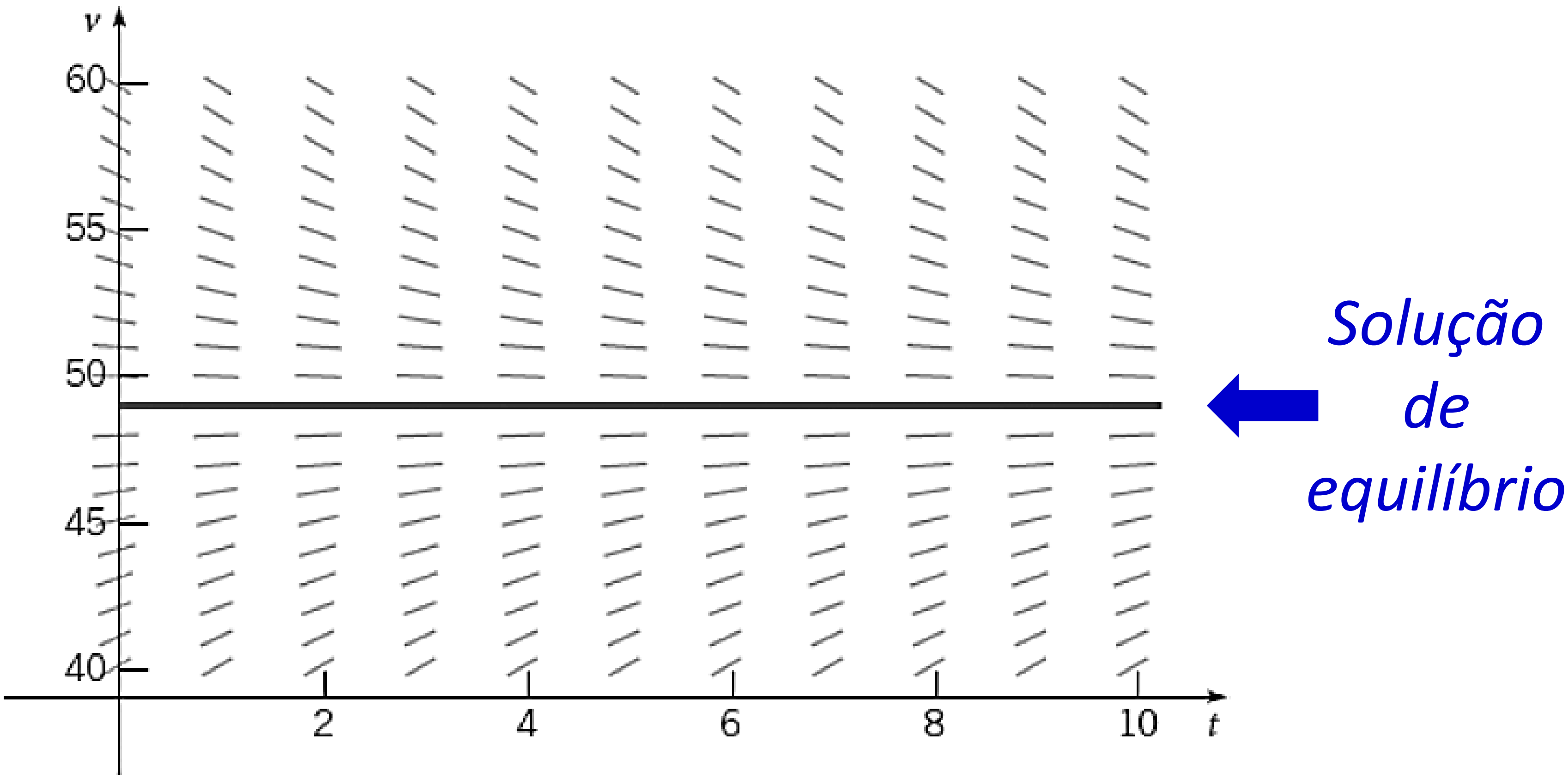


Figura 1.1.3: Campo de direções para o modelo do corpo em queda.
Fonte: Boyce 11ª ed. (2020)

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se v < valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se v < valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.
- O valor de equilíbrio (**crítico**) pode ser determinado:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 9,8 - \frac{v}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = 49\, m/s$$

Análise do modelo do corpo em queda

- Cada segmento é tangente ao gráfico da solução.
- Se $v <$ valor de equilíbrio todos os segmentos têm coeficiente angular positivo e v aumenta enquanto o corpo cai.
- O valor de equilíbrio (**crítico**) pode ser determinado:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad 9{,}8 - \frac{v}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad v_c = 49\, m/s$$

- O valor $\boldsymbol{v_c = 49\, m/s}$ é chamado de **solução de equilíbrio** entre as forças da gravidade e de arraste.

Campos de direções e construção de modelos

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- Primeiro passo para investigar um modelo.
- Para construí-lo não é necessário resolver a equação diferencial.

Campos de direções

- São representações gráficas úteis para o estudo das soluções de equações diferenciais da forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- Primeiro passo para investigar um modelo.
- Para construí-lo não é necessário resolver a equação diferencial.
- A utilização de softwares é recomendada para construção de campos de direções.

Ex.: https://homepages.bluffton.edu/~nesterd/apps/slopefields.html

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.
6. Em problemas complexos é necessário um sistema com várias equações diferenciais.

Passos para construção de modelos

1. Identificar as variáveis independente e dependente.
2. Escolher as unidades de medida para cada variável.
3. Usar o princípio ou a lei que rege o fenômeno a ser investigado.
4. Expressar a lei em função das variáveis escolhidas.
5. Certificar que cada termo da equação está dimensionalmente correto.
6. Em problemas complexos é necessário um sistema com várias equações diferenciais.
7. Comparar o resultado do modelo com resultados experimentais.

Resolução do modelo do corpo em queda

O objeto parte do repouso e cai de uma altura de 300 m.

(a) Qual é a velocidade em um instante qualquer?

(b) Quanto tempo leva para atingir o solo?

(c) Qual a velocidade no momento do impacto?

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5} \qquad v(o) = 0$$ *(condição inicial)*

Classificação das equações diferencias

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferencias (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferencias (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.
- Em alguns casos, encontrar uma solução aproximada para o problema.

Objetivos da disciplina

- Distinguir propriedades das soluções das equações diferencias (E.D.).
- Descrever métodos eficazes para resolver essas E.D.
- Em alguns casos, encontrar uma solução aproximada para o problema.
- A classificação das E.D. é útil para aplicação do método adequado de resolução.
- Existem, pelo menos, quatro maneiras para classificar as E.D., como indicadas a seguir.

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária**: a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t),$$

A – Quanto à dependência das variáveis

- **Equação diferencial ordinária**: a função incógnita depende de uma única variável independente.

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+R\frac{dQ(t)}{dt}+\frac{1}{C}Q(t)=E(t),$$

- **Equação diferencial parcial**: as derivadas são parciais, ou seja, a função depende de duas ou mais variáveis.

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

equação de calor

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

equação de onda

B – Quanto à ordem

- A ordem da E.D. é definida pela derivada de ordem mais alta.

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad \text{(Orden } n\text{)}$$

$$ty' - y = t^2 \qquad \text{(Primeira orden)}$$

$$y'' - y = 0 \qquad \text{(Segunda orden)}$$

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \qquad \text{(Terceira orden)}$$

C – Quanto à linearidade

- **Equações lineares**: os termos da E.D., ou seja, as funções aparecem elevadas à primeira potência.

C – Quanto à linearidade

- **Equações lineares**: os termos da E.D., ou seja, as funções aparecem elevadas à primeira potência.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t).$$

$$y'' - y = 0$$

$$ty' - y = t^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0.$$

- **Equações NÃO lineares**:
  - As funções incógnitas estão elevadas à potências maiores do que a unidade ou,
  - contém produtos das funções incógnitas ou,
  - contém funções trancendentes (e, $\log$, $seno$, $cosseno$, etc).

- **Equações NÃO lineares**:
  - As funções incógnitas estão elevadas à potências maiores do que a unidade ou,
  - contém produtos das funções incógnitas ou,
  - contém funções trancendentes (e, log, $seno$, $cosseno$, etc).

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0,$$

problema do pêndulo.

$$\left(1 + y^2\right)\frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + y = e^t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t + y) = \operatorname{sen} t$$

D – Sistemas de equações diferenciais

- Composto de mais de uma equação.
  - As equações seguem as classificações anteriores.

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = -x_1 - \frac{1}{8}x_2.$$

$$x_1' = 2x_2$$
$$x_2' = -2x_1$$

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.**: qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.**: qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.**: qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.**: qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.**: qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.
- **Existência de solução**: nem sempre uma E.D. tem solução analítica.
- Existem teoremas que, em certas condições, podem garantir a solução analítica da E.D.

Questões relevantes

- **Solução analítica de uma E.D.**: qualquer função da variável independente que satisfaça a equação.
- **Solução de um problema de valor inicial.**: qualquer solução da E.D. que satisfaça a condição inicial.
- **Existência de solução**: nem sempre uma E.D. tem solução analítica.
- Existem teoremas que, em certas condições, podem garantir a solução analítica da E.D.
- Mesmo que existam soluções pode não ser possível expressá-las por meio de funções elementares (polinômios, trigonométricas, exp., log. e hiperbólicas).

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos**: Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos**: Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.
- Para utilizá-los é **essencial compreender como os métodos** de solução funcionam.

Utilização de softwares

- Os softwares podem ser ferramentas extremamente úteis para o estudo de equações diferenciais.
- As **apresentações gráficas** são, muitas vezes, mais claras e úteis para compreender e **interpretar a solução** de uma equação diferencial.
- **Pacotes computacionais mais robustos**: Maple, o Mathematica (Wolfram) e o **MATLAB**.
- Para utilizá-los é **essencial compreender como os métodos** de solução funcionam.
- Delegar os detalhes de rotina a um computador, e **focar mais a atenção à formulação correta do problema** e à interpretação da solução.

Para depois desta aula:

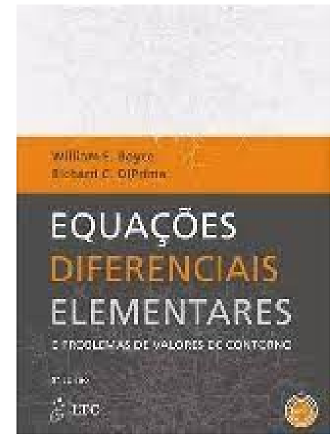
- Estudar seções 1.1 a 1.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 1.1 a 1.3 do Boyce.

Próxima aula:

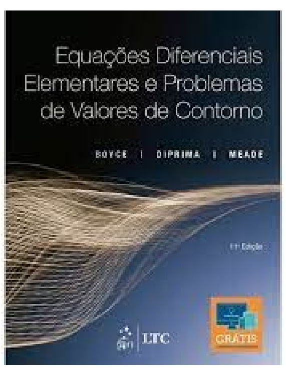
- Equações diferenciais de primeira ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.



Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.