

# Equações diferenciais



Equações diferenciais  
ordinárias

## Aula 11

Equações diferenciais  
de 1ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

# Tópicos desta aula

1. Introdução às equações diferenciais de 1ª ordem.
2. Método do fator integrante.
3. Método das equações separáveis.

## Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções de uma variável.



# Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a **forma geral**:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável  **$y = \phi(t)$**  que satisfaça a equação.

# Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a **forma geral**:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável  **$y = \phi(t)$**  que satisfaça a equação.
- Caso essa função solução exista, serão desenvolvidos métodos para encontrá-la.
- Não existe método geral, mas **métodos** que se aplicam a alguma **subclasse** das eq. dif. de 1ª ordem.



# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que  $p$  e  $g$  são **funções** dadas da variável independente  $t$ .

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que  $p$  e  $g$  são **funções** dadas da variável independente  $t$ .
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.



# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1ª ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que  **$p$**  e  **$g$**  são **funções** dadas da variável independente  **$t$** .
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.
- A **alternativa** é encontrar um **fator multiplicativo** que torna possível a integração.

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma **função  $\mu(t)$** .

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma **função  $\mu(t)$** .
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função  **$\mu(t)$**  é chamada de **fator integrante**.

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma **função  $\mu(t)$** .
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função  **$\mu(t)$**  é chamada de **fator integrante**.
- Após a aplicação desse fator multiplicativo a eq. dif. é resolvida por integração, em semelhança ao método aplicado no modelo do corpo em queda.

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto  $\mu(t)y$ , então a derivada de  $\mu(t)$  deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto  $\mu(t)y$ , então a derivada de  $\mu(t)$  deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$



# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto  $\mu(t)y$ , então a derivada de  $\mu(t)$  deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto  $\mu(t)y$ , então a derivada de  $\mu(t)$  deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = \exp \int p(t)dt$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em  $dt$  em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em  $dt$  em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de  $y$  será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c$$

# Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em  $dt$  em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de  $y$  será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$\mu(t) = \exp \int p(t)dt$$

**Exemplo 1** Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2 \quad (\textit{condição inicial})$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$



## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

### Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

**Demonstração**

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

**Demonstração**

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} (t^2 y) dt = \int 4t^3 dt$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

**Demonstração**

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3 \Rightarrow \int \frac{d}{dt} (t^2 y) dt = \int 4t^3 dt$$

$$t^2 y = t^4 + c \Rightarrow y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

## Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1ª ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \Rightarrow p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante  $\mu(t)$ :

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

**Demonstração**

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2 y' + 2ty = 4t^3 \Rightarrow \int \frac{d}{dt} (t^2 y) dt = \int 4t^3 dt$$

$$t^2 y = t^4 + c \Rightarrow y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad y(1) = 2 \Rightarrow y = t^2 + \frac{1}{t^2} \quad y > 0$$

**Exemplo 2** Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\textit{condição inicial})$$

**Exemplo 2** Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\textit{condição inicial})$$

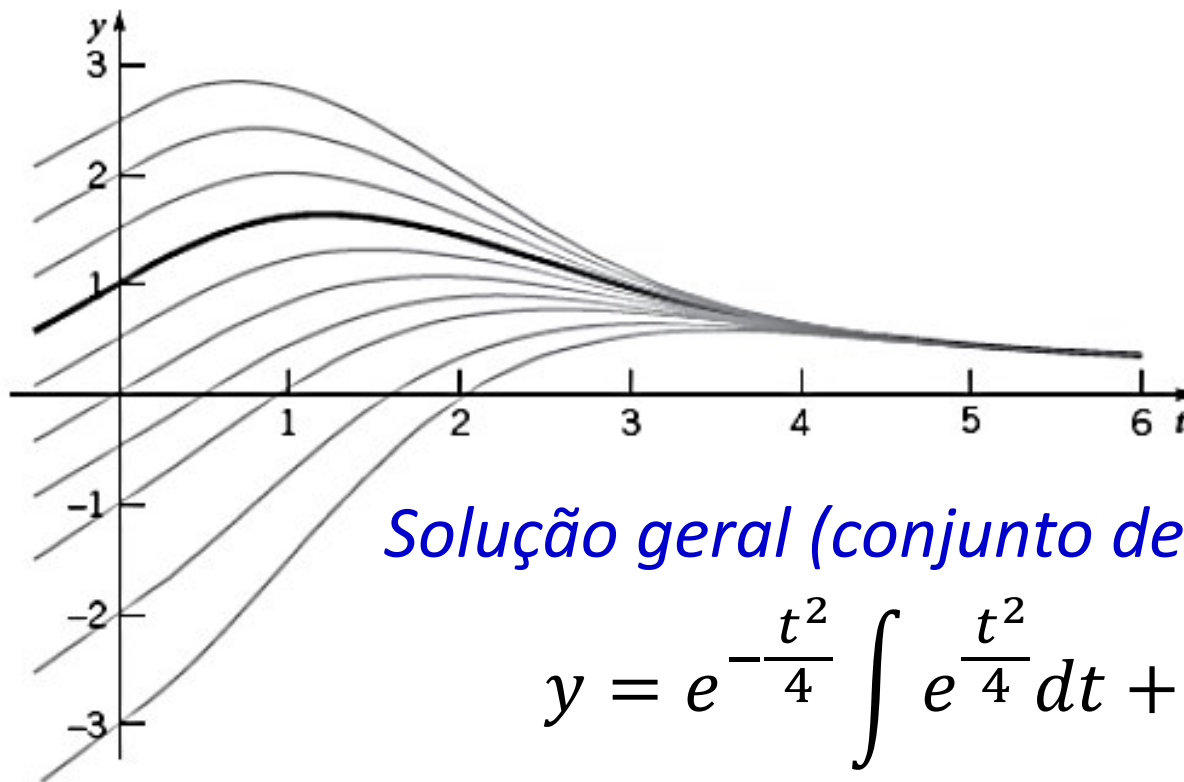
*Solução geral (conjunto de curvas):*

$$y = e^{-\frac{t^2}{4}} \int e^{\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{t^2}{4}}$$



**Exemplo 2** Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\text{condição inicial})$$



**FIGURA 2.1.4** Curvas integrais para  $2y' + ty = 2$ ;  
curva em cinza-escuro: solução particular que satisfaz a condição inicial  $y(0) = 1$ .



# Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

# Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.

# Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.
- Utilizando a **variável  $x$**  para variável independente, a eq. dif. geral de 1ª ordem fica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

# Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

# Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que  $M = M(x)$  e  $N = N(y)$  tem-se:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

# Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que  $M = M(x)$  e  $N = N(y)$  tem-se:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Esta equação é separável, pois os termos podem ser colocados em lados opostos na forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

*Integrando ambos os lados tem-se a solução.*



**Exemplo 3** Encontrar a solução da equação diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

## Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

## Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

## Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx$$

## Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

## Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2 dx$$

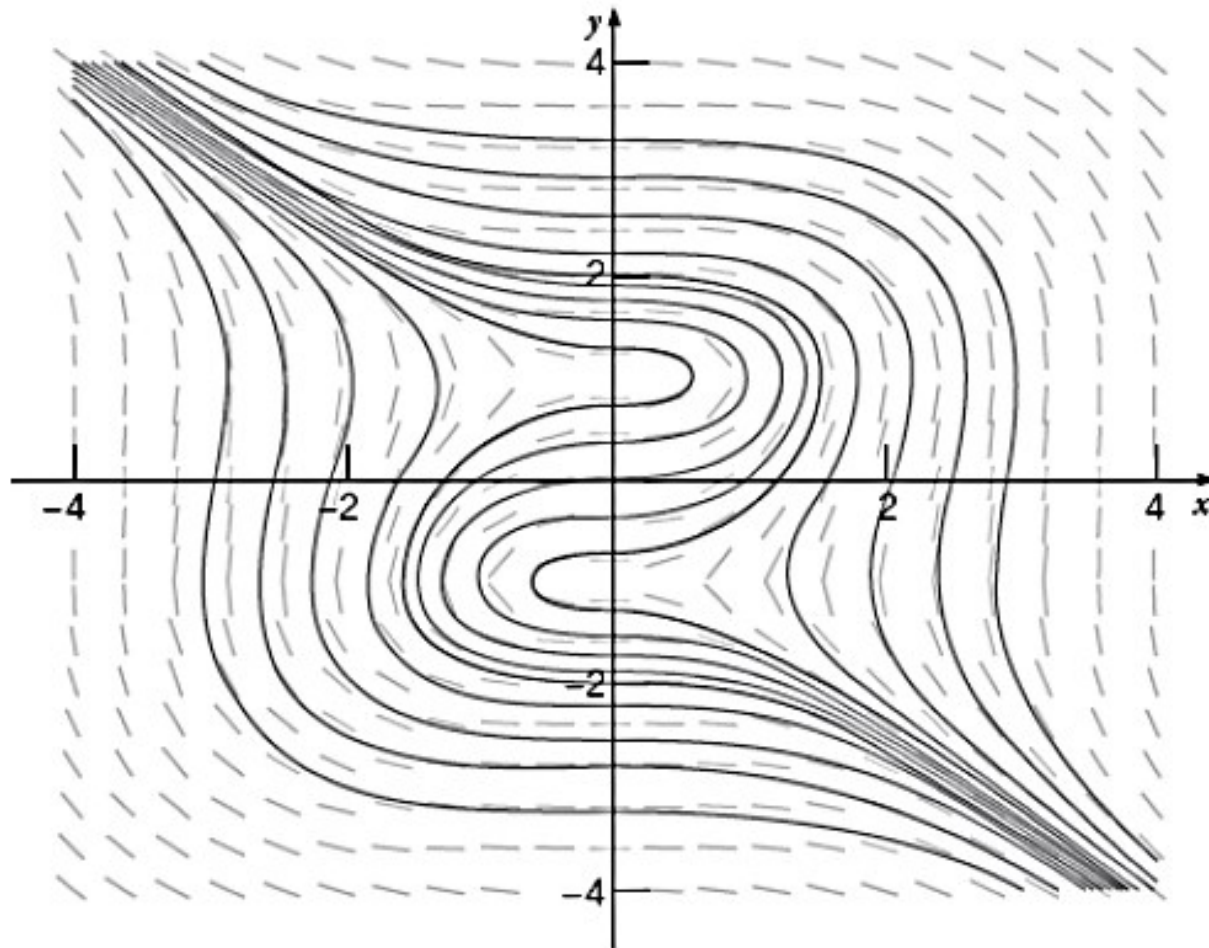
- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$3y - y^3 - x^3 = c$$

*A constante  $c$  é determinada da condição inicial.*

## Ex. 3: campos de direção e curvas integrais



**FIGURA 2.2.1** Campo de direções e curvas integrais para  $y' = x^2/(1 - y^2)$ .

$$3y - y^3 - x^3 = c$$

## Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.1 e 2.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 2.1 e 2.2 do Boyce.

## Próxima aula:

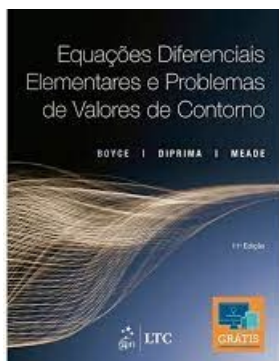
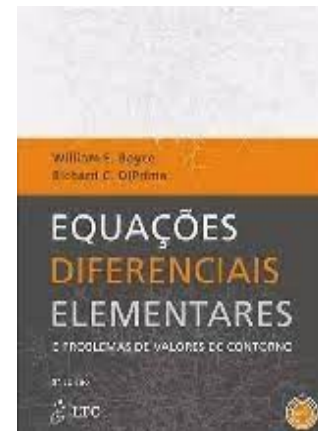
- Modelagem com eq. dif. de 1ª ordem.



# Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios  
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.