

Equações diferenciais

**Equações diferenciais
ordinárias**

Aula 11

**Equações diferenciais
de 1^a ordem**

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução às equações diferenciais de 1^a ordem.
2. Método do fator integrante.
3. Método das equações separáveis.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções de uma variável.

Introdução



Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a **forma geral**:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação.

Introdução

- Uma equação diferencial (eq. dif.) de primeira ordem tem a **forma geral**:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

- O objetivo é determinar uma função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça a equação.
- Caso essa função solução exista, serão desenvolvidos métodos para encontrá-la.
- Não existe método geral, mas **métodos** que se aplicam a alguma **subclasse** das eq. dif. de 1^a ordem.

Método do fator integrante



Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1^a ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t .

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1^a ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t .
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Algumas equações diferenciais lineares de 1^a ordem podem ser escritas na **forma padrão**:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Em que p e g são funções dadas da variável independente t .
- O método direto de integração não pode ser aplicado diretamente nessa equação.
- A **alternativa** é encontrar um **fator multiplicativo** que torna possível a integração.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma função $\mu(t)$.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma **função $\mu(t)$** .
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função **$\mu(t)$** é chamada de **fator integrante**.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- O método do fator integrante é devido a Leibniz.
- Consiste em **multiplicar** cada termo da eq. dif. por uma **função $\mu(t)$** .
- Essa multiplicação torna a eq. dif. integrável.
- A função **$\mu(t)$** é chamada de **fator integrante**.
- Após a aplicação desse fator multiplicativo a eq. dif. é resolvida por integração, em semelhança ao método aplicado no modelo do corpo em queda.

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\mu(t)y$, então a derivada de $\mu(t)$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\mu(t)y$, então a derivada de $\mu(t)$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\mu(t)y$, então a derivada de $\mu(t)$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Seja a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

- Multiplica-se cada termo pelo fator $\mu(t)$:

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

- O lado esquerdo da eq. dif. é a derivada do produto $\mu(t)y$, então a derivada de $\mu(t)$ deve ser:

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)$$

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + k \quad \Rightarrow \quad \mu(t) = exp \int p(t)dt$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c$$

Método do fator integrante (eq. lineares)

- Então, a eq. dif. original pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dt} [\mu(t)y] = \mu(t)g(t)$$

- Integrando em dt em ambos os lados:

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c$$

- Portanto, a expressão para o cálculo de y será:

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)g(t)dt + c$$

$$\mu(t) = \exp \int p(t)dt$$

Exemplo 1 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$ty' + 2y = 4t^2 \quad y(1) = 2 \quad (\text{condição inicial})$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}(t^2y) dt = \int 4t^3 dt$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}(t^2y) dt = \int 4t^3 dt$$

$$t^2y = t^4 + c \quad \Rightarrow \quad y = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

Solução ex. 1

- ✓ Escrever a eq. dif. de 1^a ordem na forma padrão:

$$y' + \frac{2}{t}y = 4t \quad \Rightarrow \quad p(t) = \frac{2}{t}$$

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2\ln|t|} = e^{\ln t^2} = t^2$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$t^2y' + 2ty = 4t^3 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}(t^2y) dt = \int 4t^3 dt$$

$$t^2y = t^4 + c \quad \Rightarrow \quad y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad \text{y(1) = 2} \quad \Rightarrow \quad y = t^2 + \frac{1}{t^2} \quad y > 0$$

Demonstração

$$t^2 = e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln e^{\ln t^2}$$

$$\ln t^2 = \ln t^2 \ln e$$

$$\ln t^2 = \ln t^2$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\text{condição inicial})$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

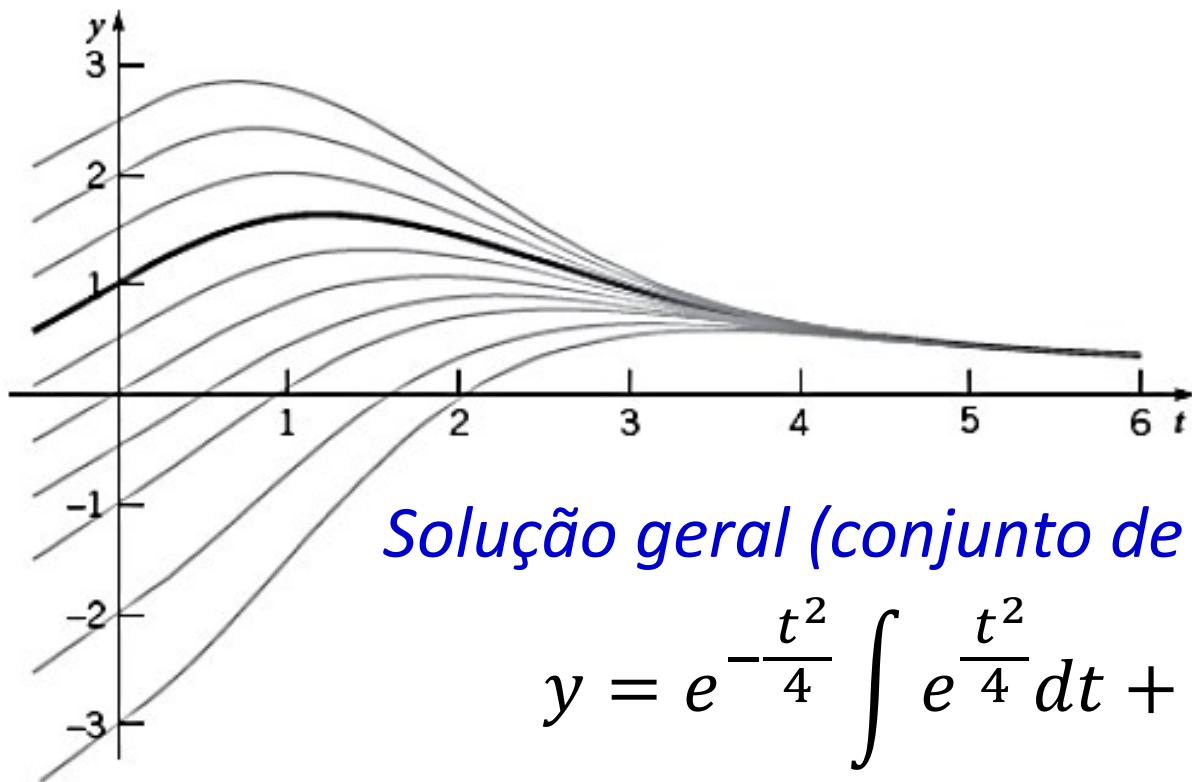
$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\text{condição inicial})$$

Solução geral (conjunto de curvas):

$$y = e^{-\frac{t^2}{4}} \int e^{\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

Exemplo 2 Resolver o P.V.I. (problema de valor inicial) pelo método do fator integrante.

$$2y' + ty = 2 \quad y(0) = 1 \quad (\text{condição inicial})$$



Solução geral (conjunto de curvas):

$$y = e^{-\frac{t^2}{4}} \int e^{\frac{t^2}{4}} dt + ce^{-\frac{t^2}{4}}$$

FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para $2y' + ty = 2$;
curva em cinza-escuro: solução particular que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

Equações separáveis

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1^a ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1^a ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.

Equações separáveis

- Na aula 1 foi utilizado o processo de integração para resolver a eq. dif. de 1^a ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = ay + b$$

- Esse processo pode ser utilizado para uma classe muito maior de equações.
- Utilizando a **variável x** para variável independente, a eq. dif. geral de 1^a ordem fica:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Equações separáveis

- Escrevendo a eq. dif. na forma:

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Considerando o caso especial em que $M = M(x)$ e $N = N(y)$ tem-se:

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

- Esta equação é separável, pois os termos podem ser colocados em lados opostos na forma diferencial:

$$M(x)dx = -N(y)dy$$

Integrando ambos os lados tem-se a solução.

Exemplo 3 Encontrar a solução da equação diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2dx$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

Solução ex. 3

- ✓ Escrevendo na forma separável:

$$-x^2 + (1 - y^2) \frac{dy}{dx} = 0$$

- ✓ Separando as variáveis:

$$(1 - y^2)dy = x^2dx$$

- ✓ Integrando em ambos os lados tem-se:

$$\int (1 - y^2)dy = \int x^2dx \quad \Rightarrow \quad y - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$3y - y^3 - x^3 = c$$

A constante c é determinada da condição inicial.

Ex. 3: campos de direção e curvas integrais

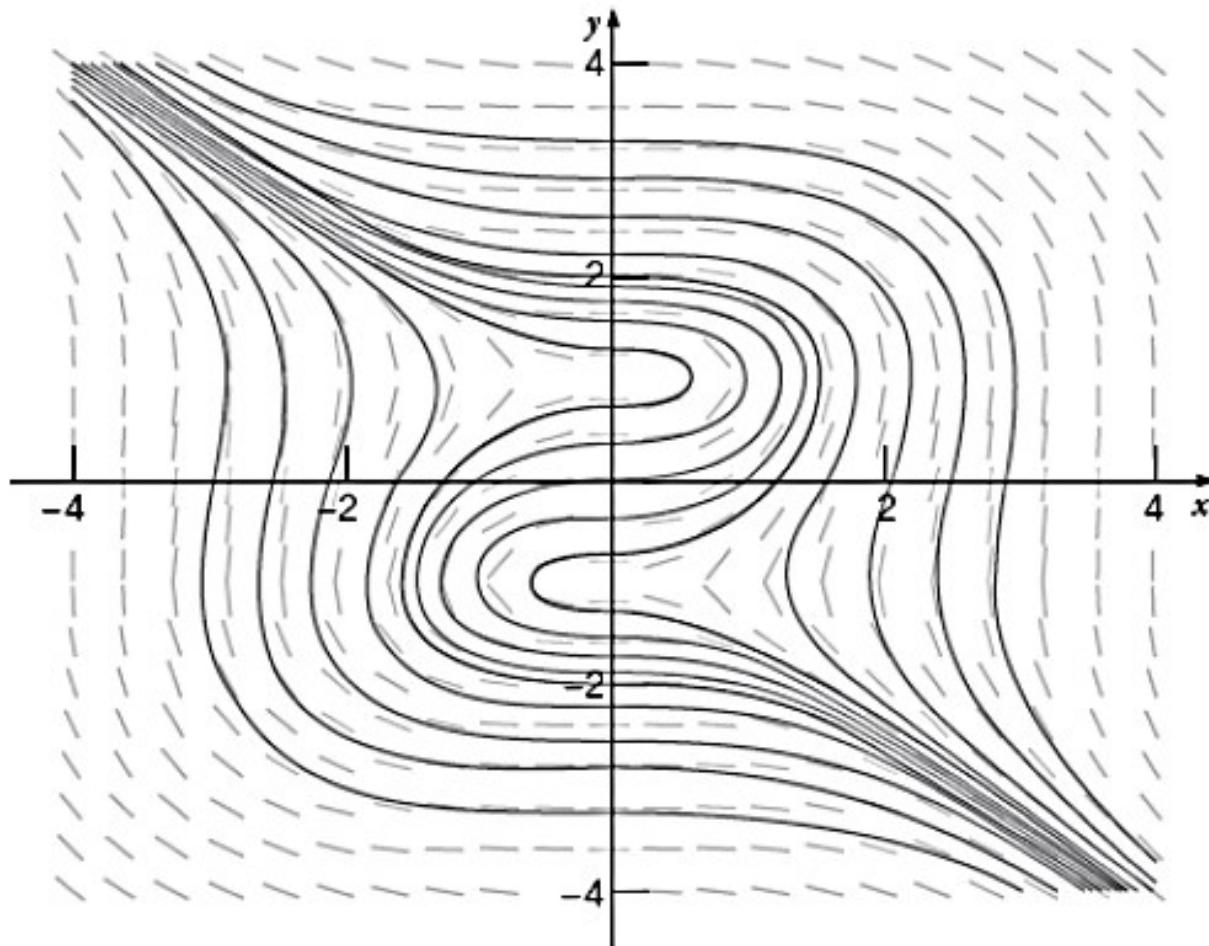


FIGURA 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais para $y' = x^2/(1 - y^2)$.

$$3y - y^3 - x^3 = c$$

Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.1 e 2.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 2.1 e 2.2 do Boyce.

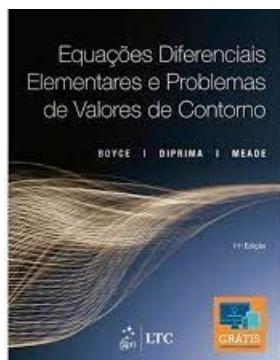
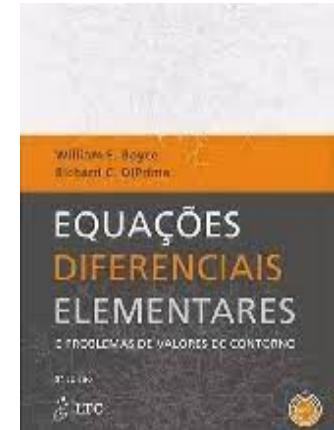
Próxima aula:

- Modelagem com eq. dif. de 1^a ordem.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na **9^a** ed. 



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.