Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula de Revisão

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos da revisão

1. Sequências numéricas.
2. Aplicações de sequências.
3. Séries uma introdução.
4. Teste da integral e comparação.
5. Séries alternadas.
6. Séries de potência.
7. Séries de Taylor.

1. Sequências numéricas

Introdução

- Sequências e séries surgem da ideia da representação de funções como soma de termos.

- Muitas funções utilizadas na Física-Matemática e Química são definidas como somas de séries.
  - Exemplos: Taylor, Bessel, Fourie e outras.

- Sequências numéricas fornecem os conceitos fundamentais para a definição de séries.

Limite de sequências

Definição $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que

$$\text{se} \quad n > N \quad \text{então} \quad a_n > M$$

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então a sequência $\{a_n\}$ é divergente, Dizemos que $\{a_n\}$ diverge para ∞.

- As Propriedades do Limite também valem para os limites de sequências

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada **crescente** se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$, isso é, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$.

É chamado **decrescente** se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

Uma sequência é **monótona** se for crescente ou decrescente.

Exemplo 8

A sequência $\left\{\dfrac{3}{n+5}\right\}$ é decrescente porque

$$\frac{3}{n+5} > \frac{3}{(n+1)+5} = \frac{3}{n+6}$$

e, portanto, $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geqslant 1$.

Sequências monótonas

Definição

Uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número M tal que $a_n \leqslant M$ para todo $n \geqslant 1$

Ela é **limitada inferiormente** se existir um número m tal que $m \leqslant a_n$ para todo $n \geqslant 1$

Se ela for limitada superior e inferiormente, então $\{a_n\}$ é uma **sequência limitada**.

Teorema da Sequência Monótona

Toda sequência monótona limitada é convergente.

2. Aplicações de sequências

Progressão Aritmética (PA)

- Sequências de números.
- Cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante r.
- A constante r é chamada razão da PA.

$$a_n = a_{n-1} + r$$

- Caso a razão e o primeiro termo sejam conhecidos pode-se construir o termo geral da PA.

Progressão Geométrica (PG)

- Sequências de números reais.

- Cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior com uma constante real q.

- A constante q é chamada razão da PG.

$$\boxed{a_{p+1} = a_p q}$$

- Fórmula para o termo geral da PG:

$$a_2 = a_1 q; \quad a_3 = a_2 q = a_1 q q; \quad \ldots \qquad \boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Cálculo de limites

- O número de Euler (e) pode ser escrito como uma sequência numérica.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

- Cálculo do limite dessa sequência:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

APROXIMAÇÕES DE e POR $(1 + 1/x)^x$ COM VALORES CRESCENTES DE x

x	$1 + \frac{1}{x}$	$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
1	2	≈2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

3. Séries uma introdução

Definição de série

- Ao somar-se os termos de uma sequência infinita $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtém-se:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

- A **soma dos termos** de uma sequência é denominada **Série** e denotada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n$$

Ex. 1: $a_n = n \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$

A soma se torna muito grande quando $n \rightarrow \infty$.

Definição de série

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Se a sequência $\{s_n\}$ for convergente e $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existir, então a série $\sum a_n$ é chamada **convergente**, e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s$$

O número s é chamado a **soma** da série.

Se a sequência $\{s_n\}$ é divergente, então a série é chamada **divergente**.

Série geométrica

- Cada termo é obtido do anterior, multiplicando-se pela razão r.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \quad para \quad a \neq 0$$

Converge: $se\ |r| < 1 \quad \Rightarrow \quad -1 < r < 1$

Diverge: $se\ |r| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (-\infty, -1] \ \ e \ \ [1, +\infty)$

- A soma dos termos tem uma expressão fechada.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad para \ |r| < 1$$

Exemplo 1 Encontre a soma da série geométrica.

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução: O termo geral da série geométrica se assemelha ao termo geral da PG.

$$a_1 = a = 5; \qquad q = r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20/9}{-10/3} = -\frac{20}{9} . \frac{3}{10} = -\frac{2}{3}$$

✓ Como $|r| = \frac{2}{3} < 1$ a série converge! Então:

$$S_n = \frac{a}{(1-r)} = \frac{5}{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{3+2}{3}} = 5.\frac{3}{5} = \mathbf{3}$$

Exemplo 2 Fração geratriz de uma dízima periódica.

Escrever o número $0{,}7\overline{7} = 0{,}777\ldots$ como razão de inteiros.

$$0{,}7777 = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$0{,}7777 = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \cdots + \frac{7}{10^n}$$

✓ É uma série geométrica com $a = 7/10$ e razão:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{7/10^3}{7/10^2} = \frac{1}{10}$$

$$\boldsymbol{S_n = 0{,}777\ldots} = \frac{a}{(1-r)} = \frac{7/10}{1-(1/10)} = \frac{7/10}{9/10} = \boldsymbol{\frac{7}{9}}$$

Série telescópica (Convergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- O termo geral pode ser escrito em frações parciais.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right)$$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \underbrace{\cancel{\frac{1}{n+1}}}_{=0} = \mathbf{1}$$

Série harmônica (Divergente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

- Embora não seja evidente que divirja, a somas parciais demonstram que sim.

$$S_1 = 1, \qquad S_2 = 1 + \frac{1}{2}, \qquad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n$$

- Não há um número superior para as somas parciais. Portanto, pelo Teorema da sequência monótona, a sequência das somas diverge, assim como a série.

Alguns Teoremas

Teorema 6 (Ref. Stewart 7 ed.)

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, então $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

A recíproca do Teorema 6 não é verdadeira.
Se o limite é nulo, não podemos concluir que a série é convergente.

Teorema 7 (Teste da divergência)

Se $\lim_{n \to \infty} a_n$ não existir ou se $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$,

então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 3 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{16n^2+5n}$ converge?

$$a_n = \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (termo\ geral)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 1}{16n^2 + 5n} \qquad (\div\, n^2)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 1/n^2}{16 + 5/n} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Como o limite do termo geral $\neq 0$, a série diverge!

4. Teste da integral e comparação

Teste da integral

- Em geral é difícil encontrar a soma exata de uma série.
- Conseguimos fazer isso para as séries geométricas e a série telescópica $\sum 1/[n(n+1)]$.
- Nas próximas seções, desenvolveremos vários testes para determinar se uma série é convergente sem encontrar sua soma explicitamente.
- O primeiro teste envolve integrais impróprias.

Teste da integral

Suponha que f seja uma função contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$ e seja $a_n = f(n)$.

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a integral imprópria $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente.

(i) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

(ii) Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ for divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

A função $f(n)$ deve ser decrescente a partir do ponto de início da série.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ converge?

- ✓ A função em x de a_n é contínua, positiva e decrescente em $[1,\infty)$. Então, é possível o teste da integral.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \operatorname{tg}^{-1}x\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\operatorname{tg}^{-1}t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Como a integral é convergente, pelo teste da integral a série também é convergente!

Série p

A série p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ é convergente se $p > 1$ e divergente se $p \leqslant 1$.

Demonstração $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$

Se $p < 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = \infty$ e a série diverge

Se $p = 0$, então $\lim_{n\to\infty} (1/n^p) = 1$ e a série diverge

Se $p > 0$, então a função $f(x) = 1/x^p$ é contínua, positiva e decrescente em $[1, \infty)$.

Portanto, a série p converge para $p > 1$.

Teste da comparação

- A ideia deste teste de convergência é comparar a série dada com alguma série conhecida.
  - Seja a série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$
  - Comparando com a série $\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ geométrica cuja soma dos termos é 1:

$$\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1} < 1}$$

  - Portanto, pelo teste da comparação a série dada é convergente.

Teste da comparação

Suponha que $\Sigma\, a_n$ e $\Sigma\, b_n$ sejam séries com termos positivos.

(i) Se $\Sigma\, b_n$ for convergente e $a_n \leqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será convergente.

(ii) Se $\Sigma\, b_n$ for divergente e $a_n \geqslant b_n$ para todo n, então $\Sigma\, a_n$ também será divergente.

5. Séries alternadas

Séries alternadas

- Até o momento, avaliamos séries cujos termos eram estritamente positivos.
- A partir desta seção veremos séries nas quais os termos podem ser positivos e negativos.
- Uma série alternada é aquela cujos termos são, alternadamente, positivos e negativos. Por exemplo,

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$$

- O n-ésimo termo desta série é da forma $a_n=(-1)^n b_n$, com $b_n>0$.

Teste da série alternada

Se a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots \qquad b_n > 0$$

satisfaz (i) $b_{n+1} \leqslant b_n$ para todo n

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

então a série é convergente.

Exemplo 1 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(i) $b_{n+1} < b_n$ uma vez que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$

(ii) $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

- ✓ As duas condições do teorema são satisfeitas.
- ✓ Então esta série, chamada harmônica alternada, é convergente.

Exemplo 2 A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$ converge?

- ✓ Cálculo do limite do termo b_n.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{4n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{4-\dfrac{1}{n}} = \frac{3}{4}$$

- ✓ Como o limite é diferente de zero, a condição de convergência (ii) das séries alternadas não é satisfeita.

- ✓ Portanto esta série diverge!

Teste da razão

(i) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, o Teste da Razão é inconclusivo.

Exemplo 5 Testar a convergência da série: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

✓ Usamos o Teste da Razão com $a_n = (-1)^n n^3 / 3^n$:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^n n^3}{3^n}} \right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3}$$

quando $n \to \infty$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \to \frac{1}{3} < 1$$

✓ Pelo teste da razão, a série é convergente.

Teste da raiz

(i) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente (e, portanto, convergente).

(ii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(iii) Se $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, o Teste da Raiz não é conclusivo.

Estratégia para testes de séries

1. Série da forma $\sum 1/n^p$ é uma série p que só converge para $p > 1$.
2. Série da forma $\sum ar^n$ é geométrica e só converge se $|\mathrm{r}| < 1$.
3. Séries similares com a série p e a série geométrica podem ser comparadas com essas.
4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste da divergência.
5. Na série da forma $\sum(-1)^n a_n$, usar o teste da alternada.
6. Em séries com fatorial ou n-ésima potência utilizar o teste da razão.
7. Para séries da forma $\sum(b_n)^n$ usar o teste da raiz.
8. Se $a_n = f(n)$ e a integral de $f(x)$ for facilmente calculada usar o teste da integral, caso seja possível.

6. Séries de potência

Séries de potência

- Uma série de potência centrada em um ponto a, ou em torno de a, assume a forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

- A série inicia em $n = 0$ e é infinita.

- Quanto $n = 0$ adota-se a convenção de que $(x-a)^0 = 1$. Isto ocorre mesmo quando $x = a$.

- Quando $x = a$ os outros termos são nulos. Portanto a série irá convergir em $x = a$.

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n} \qquad \text{Seja } a_n = (x-3)^n/n$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}\left|x-3\right| \to \left|x-3\right| \quad \text{quando } n \to \infty$$

✓ A série é convergente se:

$$\left|x-3\right| < 1 \iff -1 < x-3 < 1 \iff \boxed{2 < x < 4}$$

Exemplo 2 Para que valores de x a série converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

- ✓ O teste da razão não fornece resultado quando $|x-3| = 1$.
- ✓ Então, é necessário testar os extremos $x = 2$ e $x = 4$ diretamente na série.
- ✓ Se $x = 4$ na série, ela se tornará

  $\Sigma\, 1/n$, série harmônica divergente.
- ✓ Se $x = 2$, a série é $\Sigma\, (-1)^n/n$,

  converge pelo Teste da Série Alternada.
- ✓ Portanto, a série converge se $2 \leq x < 4$.

Séries de potência

Principal uso: representação de funções importantes.

- Representar uma função em séries permite o cálculo de derivadas e integrais complicadas.

- As equações diferenciais também podem ser resolvidas expandindo em séries de potência.

- O conjunto de valores de x para o qual a série converge será um intervalo.

- Há três possibilidades para esse intervalo de convergência, definidos pelo teorema seguinte.

Teorema da convergência de séries

Para dada série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$,

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

R: raio de convergência da série.

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}} \qquad a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$$

✓ Pelo teste da razão tem-se a relação:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right|$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \underset{\substack{\text{quando} \\ n \to \infty}}{\longrightarrow} \frac{|x+2|}{3}$$

✓ A série é convergente se: $\dfrac{|x+2|}{3} < 1$

Raio de convergência

$$-3 < x + 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -5 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 3}$$

Exemplo 3 Encontrar o raio de convergência da série.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$$

Teste nos extremos: $x = -5$ e $x = 1$

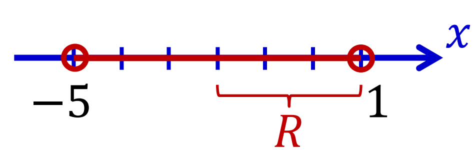
- ✓ Quando $x = -5$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \quad \textit{Divergente} \begin{cases} \textit{Limite do} \\ \textit{termo geral} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

- ✓ Quando $x = 1$ a série é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n \quad \textit{Divergente} \begin{cases} \textit{Teste da} \\ \textit{divergência} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \neq 0 \end{cases}$$

- ✓ Assim, a série é convergente no intervalo $(-5,1)$ e raio de convergência $R = 3$.



Representação de funções

- Seja uma série geométrica convergente com primeiro termo $a = 1$, razão $r = x$ e $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

- Olhando de um outro ponto de vista, podemos nos referir a esta série como a expressão da função:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

- A medida em que n aumenta, $S_n(x)$ se aproxima melhor de f no intervalo $(-1, 1)$.

Diferenciação e integração de séries

- As equações (i) e (ii) podem ser reescritas por:

$$\text{(iii)}\quad \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n(x-a)^n\right]$$

$$\text{(iv)}\quad \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n(x-a)^n\, dx$$

- As propriedades da derivada da soma e da integral da soma são válidas para séries de potência.
- O intervalo de convergência pode mudar após a diferenciação ou a integração.

Exemplo 6 Encontrar uma representação em série de potência para a função $f = \ln(1 + x)$.

✓ Diferenciando a função dada:

$$\frac{d}{dx} \ln (1 + x) = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)}$$

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \qquad |x| < 1$$

✓ Integrando em ambos os lados da última função

$$\int \frac{1}{1 + x} dx = \int (1 - x + x^2 + \cdots) dx$$

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C$$

$$\ln (1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + C \qquad |x| < 1$$

7. Séries de Taylor

Série de Taylor

- Encontramos séries de potência de funções semelhantes a expressão da soma de uma série geométrica $\frac{1}{1-x}$.

- Para aplicações, necessitamos encontrar séries para um número maior de funções.

- Será desejável representar em séries funções como: e^x, $senx$, $\cos x$, tgx e suas variações.

- A série de Taylor permite encontrar tais funções.

Série de Taylor

- Série de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Série de Taylor da função f

$$|x-a| < R$$

- Quando $a = 0$ tem-se a série de Maclaurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Série de Maclaurin da função f

Série de Taylor

Observações

- Nem toda função pode ser representada por uma série de Taylor.
- Funções analíticas como e^x, $senx$, $\cos x$, tgx possuem a representação nos intervalos em que a série for convergente.
- O intervalo de convergência para e^x, $senx$, $\cos x$ é todo conjunto dos reais.
- Para tgx, $[-1,1]$ é o intervalo de convergência.

Exemplo 1 Obter a série de Taylor $f(x) = e^x$ em $a = 0$. Encontrar o raio de convergência.

✓ Se $f(x) = e^x$, então $f^{(n)}(x) = e^x$, portanto $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

✓ Portanto, a série de Maclaurin para f em 0 é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

✓ Para o raio de convergência fazemos $a_n = x^n/n!$. Então,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

quando $n \rightarrow \infty$

✓ pelo Teste da Razão, a série converge para todo x e $R = \infty$.

Exemplo 2 Obter a série de Taylor de $f(x) = e^{x^2}$ e expressar a integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ por uma série.

- ✓ Partindo da série da exponencial e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- ✓ Trocando x na série de e^x por x^2:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^3)^2}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

- ✓ A primitiva da função $f(x) = e^{x^2}$ é então:

$$\int e^{x^2}\,dx = \int \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right) dx$$

Exemplo 2 $f(x) = e^{x^2}$ expressar $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ em série.

$$\int e^{x^2}\,dx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5.2!} + \frac{x^7}{7.3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

✓ Portanto, a integral definida será:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$$

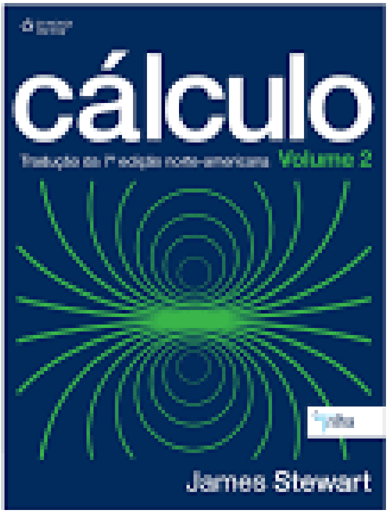
❖ Este processo pode ser aplicado para funções nas quais não se conhece a primitiva.

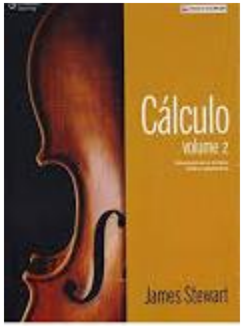
❖ O resultado da integral definida será uma aproximação para o valor real.

Bibliografia

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed.





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.