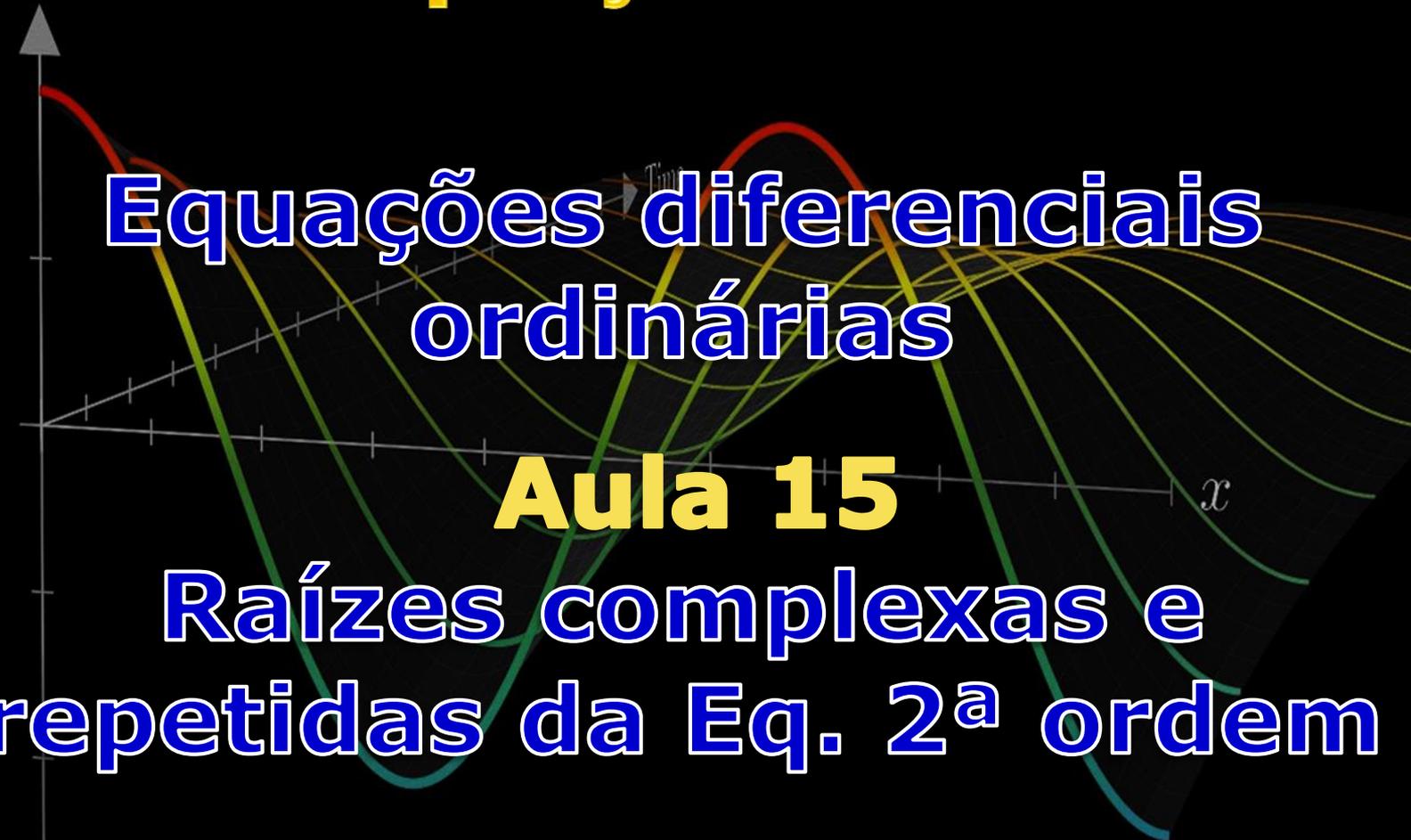


# Equações diferenciais



## Equações diferenciais ordinárias

### Aula 15

## Raízes complexas e repetidas da Eq. 2ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

# Tópicos desta aula

1. Raízes complexas na equação característica.
2. Raízes repetidas.

## Pré-requisitos

- Equações algébricas do segundo grau.
- Diferenciação e integração.



**Raízes complexas na  
equação característica**

# Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

# Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

# Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

- Se o discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ , então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ e } r_2 = \lambda - i\mu,$$

# Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

- Se o discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ , então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ e } r_2 = \lambda - i\mu, \quad \begin{cases} \lambda \text{ e } \mu: \text{ números reais} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

# Raízes complexas na equação característica

- Seja a equação característica da equação diferencial de segunda ordem.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (\text{Eq. dif. 2ª ordem a coeficientes constantes.})$$

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (\text{Equação característica})$$

- Se o discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ , então as raízes são números complexos conjugados da forma:

$$r_1 = \lambda + i\mu \text{ e } r_2 = \lambda - i\mu, \quad \begin{cases} \lambda \text{ e } \mu: \text{ números reais} \\ i = \sqrt{-1} \end{cases}$$

$$y_1 = e^{(\lambda+i\mu)t} \text{ e } y_2 = e^{(\lambda-i\mu)t} \quad (\text{soluções da eq. dif.})$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

- As soluções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t}$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

- As soluções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t}$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

- As soluções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos\mu t \pm i\sin\mu t)$$

# Raízes complexas na equação característica

- Um **exponencial complexo** pode ser expresso por uma combinação de seno e cosseno por meio da **relação de Euler**:

$$e^{i\mu t} = \cos\mu t + i\sin\mu t$$

$$e^{-i\mu t} = \cos\mu t - i\sin\mu t$$

- As soluções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser reescritas por:

$$e^{(\lambda \pm i\mu)t} = e^{\lambda t} \cdot e^{\pm i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos\mu t \pm i\sin\mu t)$$

- A parte **real** e **imaginária** da solução está representada pelas funções reais  $e^{\lambda t} \cos\mu t$  e  $e^{\lambda t} \sin\mu t$ , respectivamente.

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8}$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i \quad \text{Onde: } \sqrt{-36}$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i \quad \text{Onde: } \sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$$

**Exemplo 1:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' + 4y' + 37y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 8$$

✓ Resolver a equação característica:

$$4r^2 + 4r + 37 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4, b = 4, c = 37$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$$

$$r = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1 - 37}}{8} = -1/2 \pm 1/2\sqrt{-36}$$

$$r = -1/2 \pm 3i \quad \text{Onde: } \sqrt{-36} = 6\sqrt{-1} = 6i$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = -\frac{1}{2} + 3i \quad r_2 = -\frac{1}{2} - 3i$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt} = ce^{-4t} \neq 0 \quad \forall t$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ As soluções da equação diferencial ficam:

$$y_1 = e^{(-\frac{1}{2}+3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y_2 = e^{(-\frac{1}{2}-3i)t} = e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

- ✓ Pelo teorema de Abel, o wronskiano não se anula.

$$W = ce^{-\int p(t)dt} = ce^{-\int 4dt} = ce^{-4t} \neq 0 \quad \forall t$$

- ✓ Logo o conjunto solução da eq. dif. pode ser escrito como combinação linear das soluções.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \sin 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \sin 3t)$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes  $C_1$  e  $C_2$  e a combinação com a notação complexa  $i = \sqrt{-1}$  podem ser substituídas pelas constantes  $k_1$  e  $k_2$ .

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes  $C_1$  e  $C_2$  e a combinação com a notação complexa  $i = \sqrt{-1}$  podem ser substituídas pelas constantes  $k_1$  e  $k_2$ .

$$\text{Se } (C_1 + C_2) = k_1$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes  $C_1$  e  $C_2$  e a combinação com a notação complexa  $i = \sqrt{-1}$  podem ser substituídas pelas constantes  $k_1$  e  $k_2$ .

Se  $(C_1 + C_2) = k_1$  e  $(iC_1 - iC_2) = k_2$ , então:

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

- ✓ Conjunto solução da eq. dif.:

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} (\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t)$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + (iC_1 - iC_2) \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓ As constantes  $C_1$  e  $C_2$  e a combinação com a notação complexa  $i = \sqrt{-1}$  podem ser substituídas pelas constantes  $k_1$  e  $k_2$ .

Se  $(C_1 + C_2) = k_1$  e  $(iC_1 - iC_2) = k_2$ , então:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

Conjunto solução  
da eq. dif.

## Exemplo 1:

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

## Exemplo 1:

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓  $2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0$

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

## Exemplo 1:

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

- ✓  $2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \operatorname{sen} 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \operatorname{sen} 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \operatorname{sen} 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \operatorname{sen} 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 3$$

## Exemplo 1:

$$4y'' + 4y' + 37y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8:$$

- ✓ Inserindo as condições iniciais:

$$y = K_1 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} + K_2 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$✓ \quad 2 = K_1 \cos 0 e^0 + K_2 \operatorname{sen} 0 e^0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 2$$

$$✓ \quad y' = \frac{K_1}{-2} \cos 3t e^{-\frac{t}{2}} - 3K_1 \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 3t e^{-\frac{t}{2}} + 3K_2 \cos 3t e^{-\frac{t}{2}}$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} \cos 0 e^0 - 3K_1 \operatorname{sen} 0 e^0 + \frac{K_2}{-2} \operatorname{sen} 0 e^0 + 3K_2 \cos 0 e^0$$

$$8 = \frac{K_1}{-2} + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad 8 = -1 + 3K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = 3$$

$$y = e^{-\frac{t}{2}} (2 \cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t)$$

Solução do PVI

## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

$$\checkmark \quad P/t = 0: \quad y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$$

## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓  $P/t = 0: y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$

✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t)$

## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

$$\checkmark \quad P/t = 0: \quad y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$$

$$\checkmark \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t) =$$

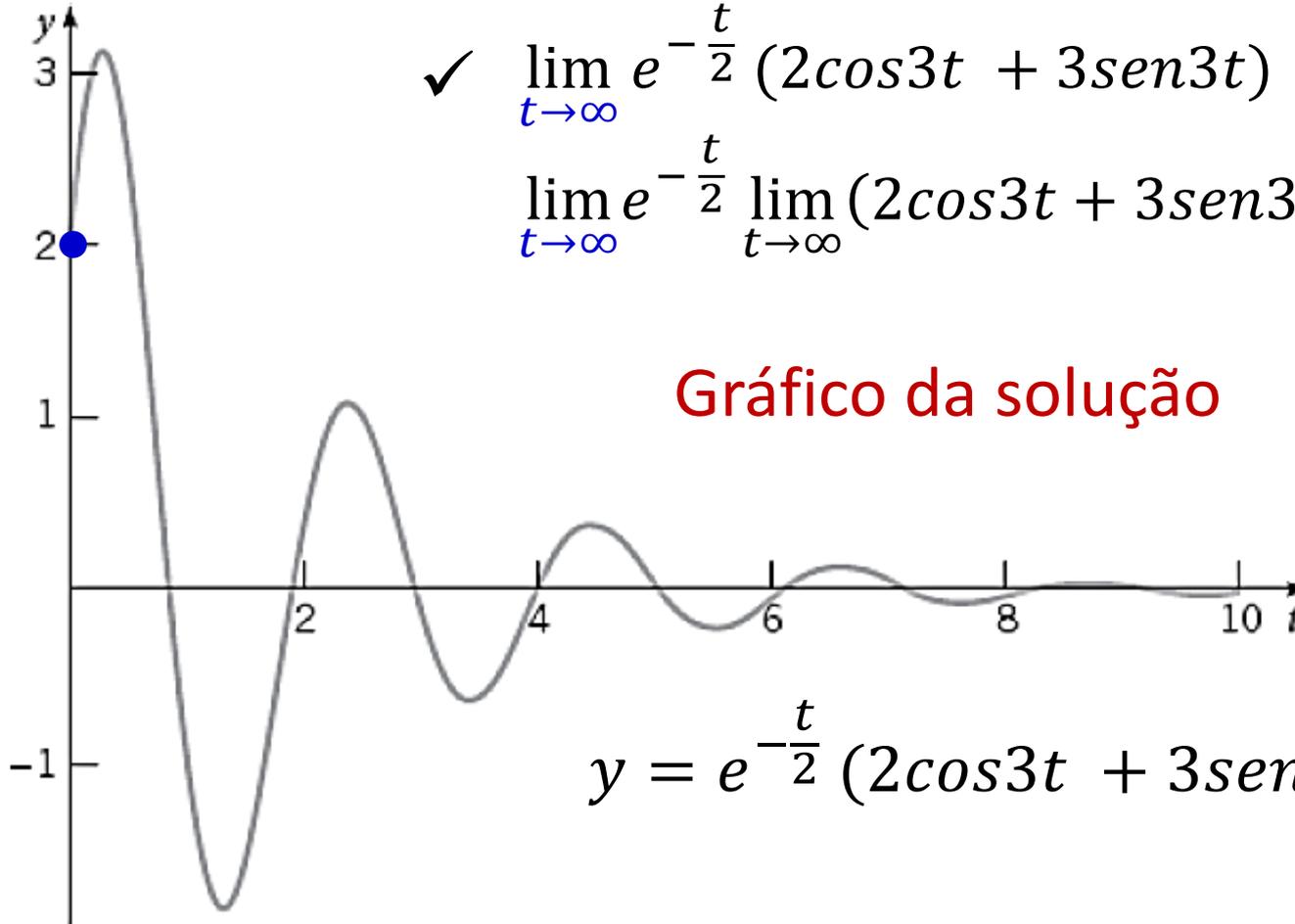
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} (2\cos 3t + 3\sin 3t) = 0$$

## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓  $P/t = 0$ :  $y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$

✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} (2\cos 3t + 3\sin 3t) = 0$

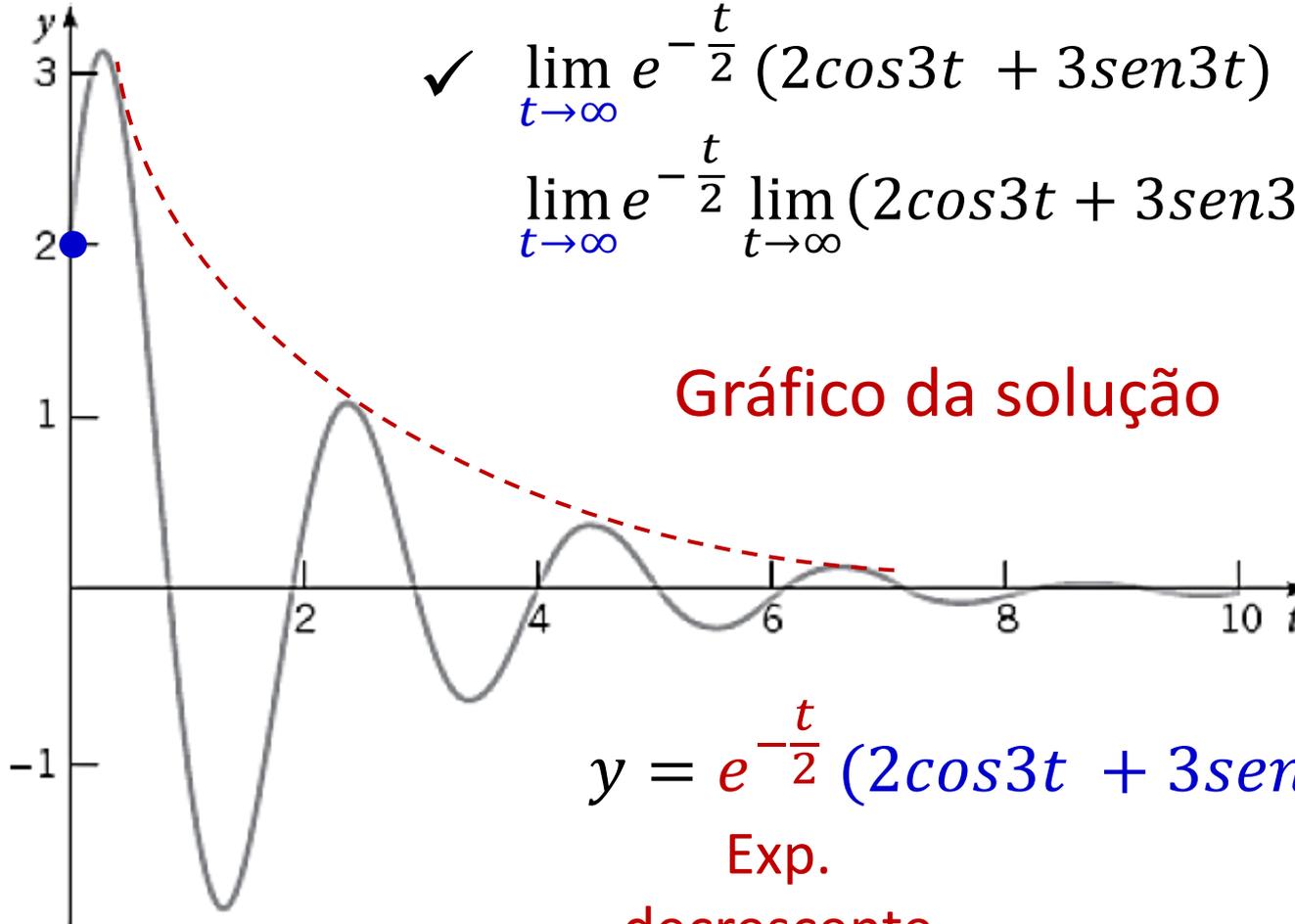


## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓  $P/t = 0$ :  $y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$

✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} (2\cos 3t + 3\sin 3t) = 0$



$y = e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t)$

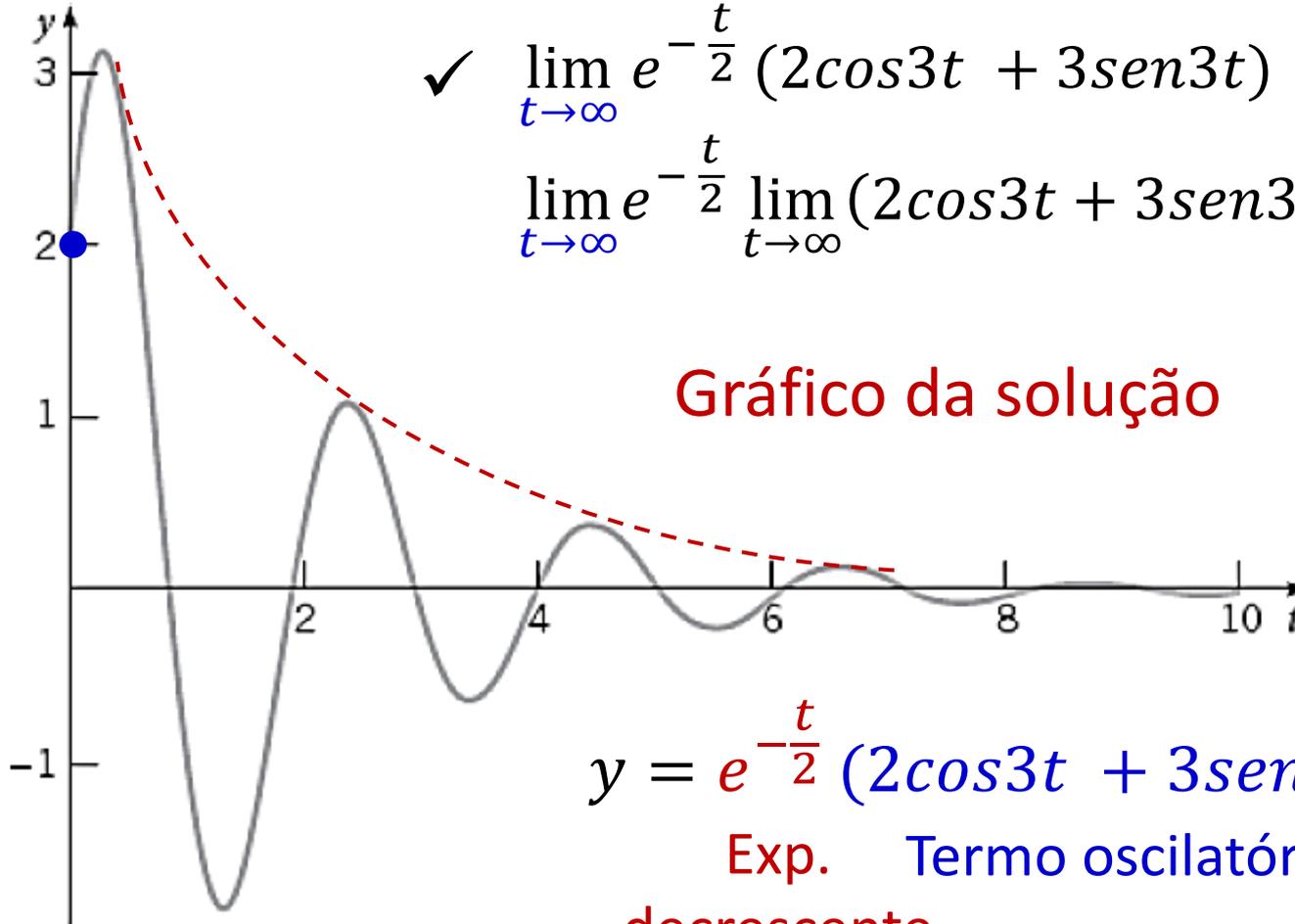
Exp.  
decrésciente

## Exemplo 1: Valores em pontos extremos da solução:

✓  $P/t = 0$ :  $y = e^0 (2\cos 0 + 3\sin 0) = 2$

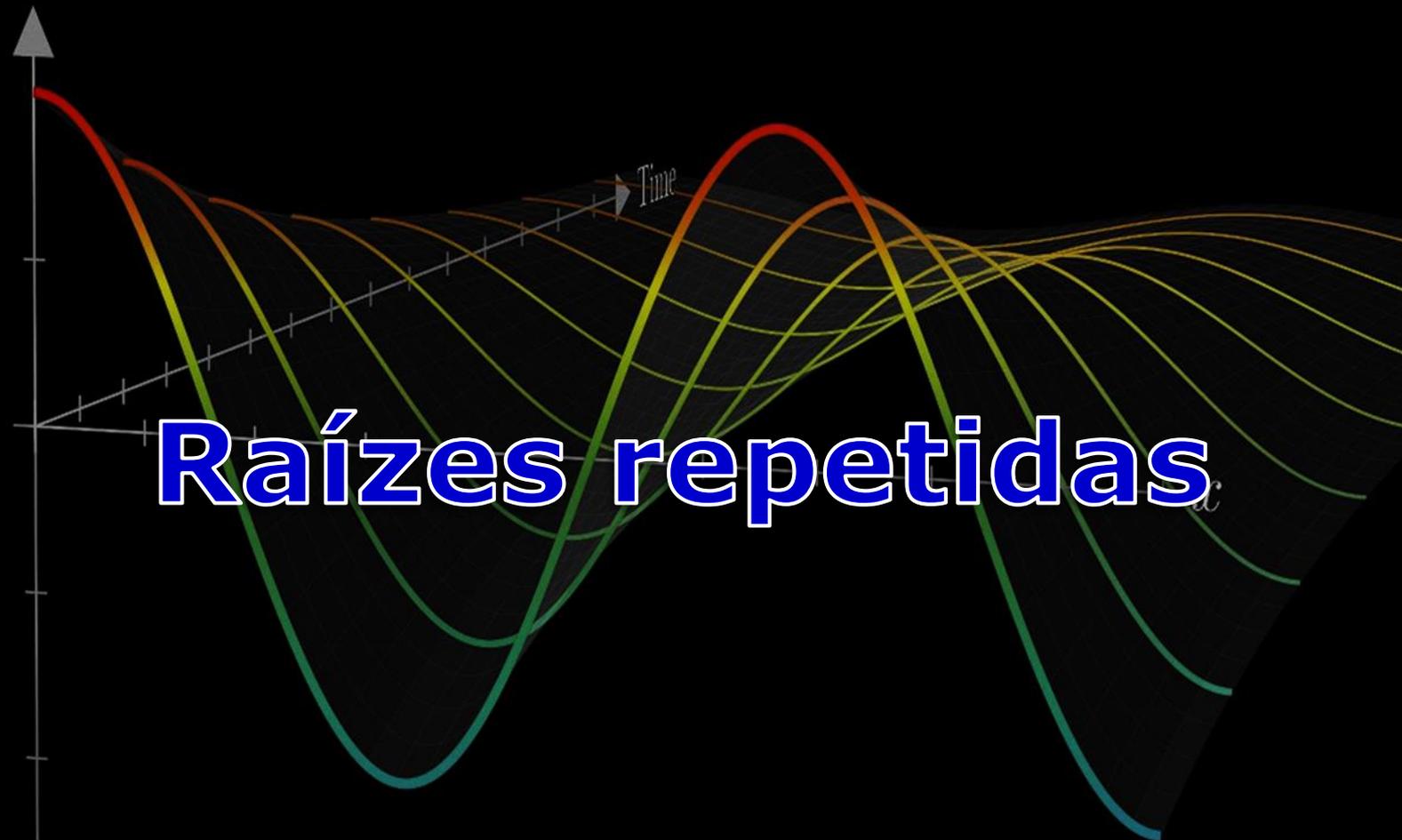
✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t) =$

$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{2}} \lim_{t \rightarrow \infty} (2\cos 3t + 3\sin 3t) = 0$



$y = e^{-\frac{t}{2}} (2\cos 3t + 3\sin 3t)$

Exp. Termo oscilatório  
decrecente



# Raíces repetidas

# Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

# Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

# Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se  $b^2 - 4ac = 0$ , então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}$$

# Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se  $b^2 - 4ac = 0$ , então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{\frac{-b}{2a}t}$$

# Raízes repetidas

- Seja a equação característica da eq. dif. a coeficientes constantes.

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \Rightarrow \quad ar^2 + br + c = 0$$

- Se  $b^2 - 4ac = 0$ , então as raízes serão repetidas e geram a mesma solução.

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a} \quad \Rightarrow \quad y_1 = e^{\frac{-b}{2a}t}$$

- O conjunto solução pode ser encontrado pelo produto de uma função  $v$  pela primeira solução.

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{\frac{-b}{2a}t}$$

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$$

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

$$W = e^{\frac{-b}{2a}t} \left[ \frac{-b}{2a} t e^{\frac{-b}{2a}t} + e^{\frac{-b}{2a}t} \right] - \frac{-b}{2a} e^{\frac{-b}{2a}t} [t e^{\frac{-b}{2a}t}]$$

# Raízes repetidas

- A função  $v(t)$  mais simples, linearmente independente da exponencial, é um polinômio.

$$v(t) = C_1 + C_2 t$$

- Portanto, um conjunto solução será:

$$y = C_1 e^{\frac{-b}{2a}t} + C_2 t e^{\frac{-b}{2a}t}$$

$C_1$  e  $C_2$ : constantes

- O wronskiano dessas soluções nunca se anula:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

$$W = e^{\frac{-b}{2a}t} \left[ \frac{-b}{2a} t e^{\frac{-b}{2a}t} + e^{\frac{-b}{2a}t} \right] - \frac{-b}{2a} e^{\frac{-b}{2a}t} [t e^{\frac{-b}{2a}t}] = e^{\frac{-b}{a}t}$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

✓ Inserindo a primeira condição inicial tem-se:

$$y(0) = 2 = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \cdot 0 e^{\frac{0}{2}}$$

**Exemplo 2:** Encontrar a solução do PVI e seu gráfico.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \quad y(0) = 2 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1/3$$

✓ Resolução da equação característica:

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1} = 0$$

✓ Portanto, as soluções da eq. característica são:

$$r_1 = r_2 = \frac{-(-4)}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

✓ A solução geral proposta é:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

✓ Inserindo a primeira condição inicial tem-se:

$$y(0) = 2 = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \cdot 0 e^{\frac{0}{2}} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2$$

## Exemplo 2:

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

$$C_1 = 2$$

## Exemplo 2:

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

$$C_1 = 2$$

## Exemplo 2:

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

$$C_1 = 2$$

## Exemplo 2:

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} 2 + C_2$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

$$C_1 = 2$$

## Exemplo 2:

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2/3$$

## Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

- ✓ Inserindo a segunda condição inicial tem-se:

$$C_1 = 2$$

$$y = C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 t e^{\frac{t}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{t}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} t e^{\frac{t}{2}} + e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$y'(0) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 \left( \frac{1}{2} 0 e^{\frac{0}{2}} + e^{\frac{0}{2}} \right)$$

$$1/3 = \frac{1}{2} 2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -2/3$$

- ✓ Assim, a solução do PVI é:

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3} t e^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{ Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{ Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left( \frac{2}{3} \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \right)$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{ Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left( \frac{2}{3} \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

## Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{ Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left( \frac{2}{3} \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$t = 1, y \cong 2,2$$

## Exemplo 2:

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 1/3$$

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark P/t = 0: y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} - \left( \frac{2}{3} \frac{1}{2} te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3} e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

$$t = 1, y \cong 2,2$$

✓ Pto intersecção em  $t$  ( $y = 0$ ):

$$2e^{\frac{t}{2}} = \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} \Rightarrow t = 3$$

## Exemplo 2:

Valores em pontos extremos:

$$\checkmark \text{ P/ } t = 0: \quad y = 2e^0 - \frac{2}{3} \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$

$$\checkmark \lim_{t \rightarrow \infty} 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\frac{t}{2}} \right) \left( \lim_{t \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{3} \lim_{t \rightarrow \infty} t \right) = -\infty$$

$$\checkmark \text{ Pto max: } y' = 0 = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}} - \left( \frac{2}{3} \frac{1}{2}te^{\frac{t}{2}} + \frac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \right)$$

$$\frac{t}{3} = 1 - \frac{2}{3}$$

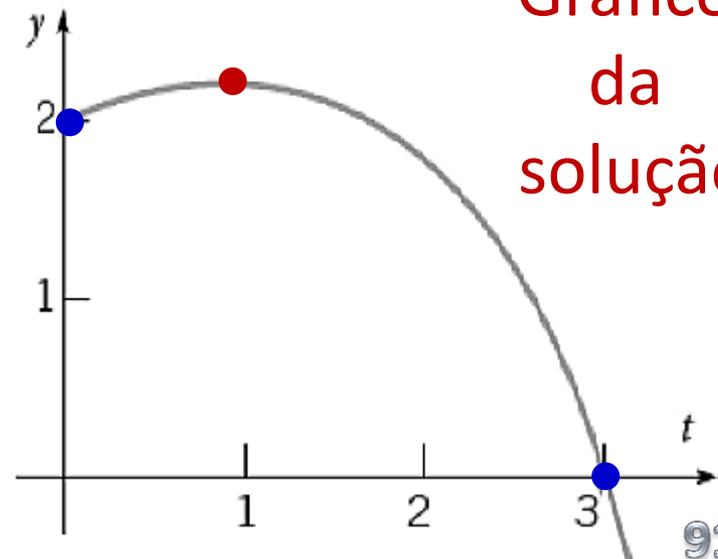
$$t = 1, \quad y \cong 2,2$$

$$\checkmark \text{ Pto intersecção em } t \text{ (} y = 0 \text{):}$$

$$2e^{\frac{t}{2}} = \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}} \quad \Rightarrow \quad t = 3$$

$$4y'' - 4y' + y = 0$$
$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1/3$$

$$y = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$



## Para depois desta aula:

- Estudar seções 3.3 e 3.4 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 3.3 e 3.4 do Boyce.

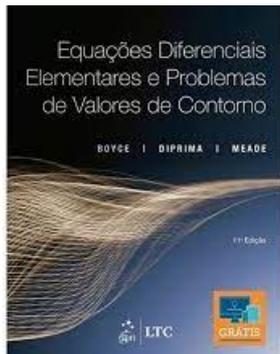
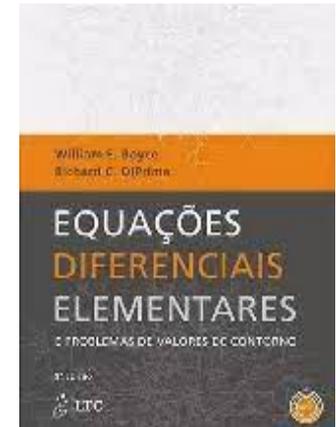
## Próxima aula:

- Método dos coeficientes indeterminados.

# Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed. ▶



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.