# Cálculo diferencial e integral

## Sequências e séries infinitas

## Aula 08
## Série de Fourier

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

# Tópicos desta aula

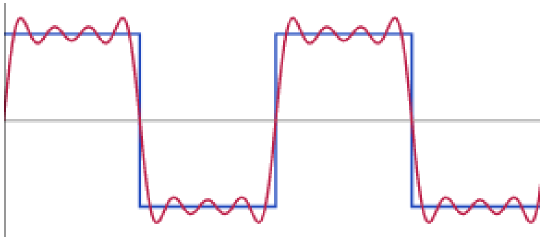
1. Séries de Fourier.
2. Exemplo.

# Pré-requisitos

- Integração de funções trigonométricas.

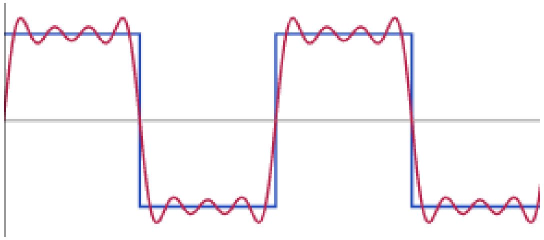
# Séries de Fourier

# Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.

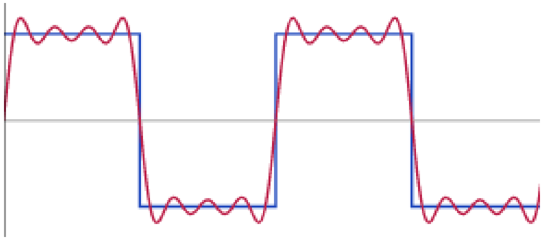
# Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.

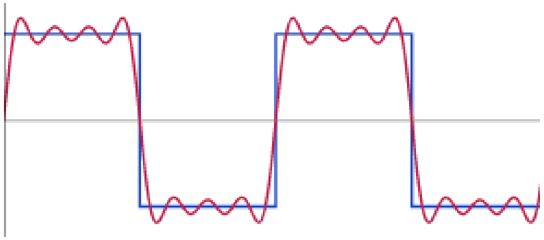
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.

# Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o estudo de transferência de calor.

# Séries de Fourier



- Séries de Fourier expressam muitas funções como uma série de senos e cossenos.
- Algumas propriedades com periodicidade e ortogonalidade são relevantes para defini-la.
- As séries de Fourier foram criadas em 1807 por Jean Fourier para o estudo de transferência de calor.
- Atualmente, elas são usadas em análise de vibrações, acústica, óptica, processamento de sinais, processamento de imagens e econometria.

# 1- Periodicidade de funções

- Uma função $f$ é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de $T$ também será o período.

# 1- Periodicidade de funções

- Uma função $f$ é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de $T$ também será o período.
- Se $f$ e $g$ são funções periódicas de período $T$, então:

  $fg$ é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

# 1- Periodicidade de funções

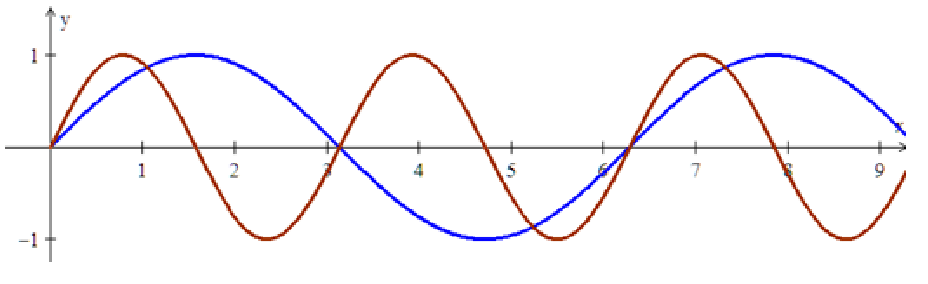
- Uma função $f$ é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de $T$ também será o período.
- Se $f$ e $g$ são funções periódicas de período $T$, então:

  $fg$ é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx$

$g = sen2x$



# 1- Periodicidade de funções

- Uma função $f$ é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.

- Qualquer múltiplo de $T$ também será o período.

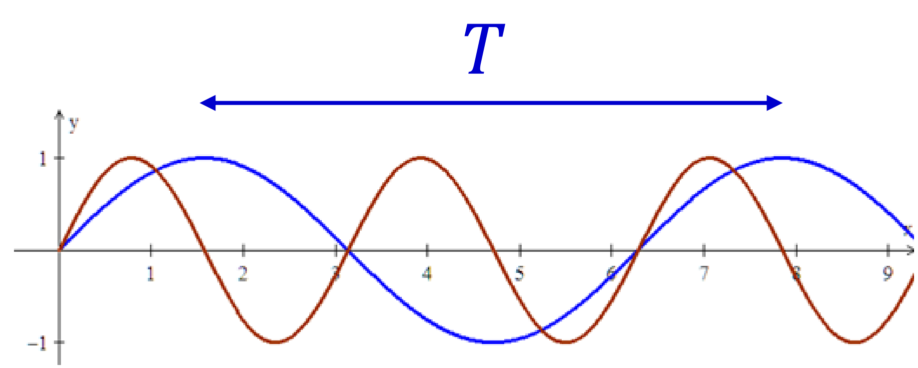
- Se $f$ e $g$ são funções periódicas de período $T$, então:

  $fg$ é periódica;   $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx \quad T = 2\pi$

$g = sen2x$



# 1- Periodicidade de funções

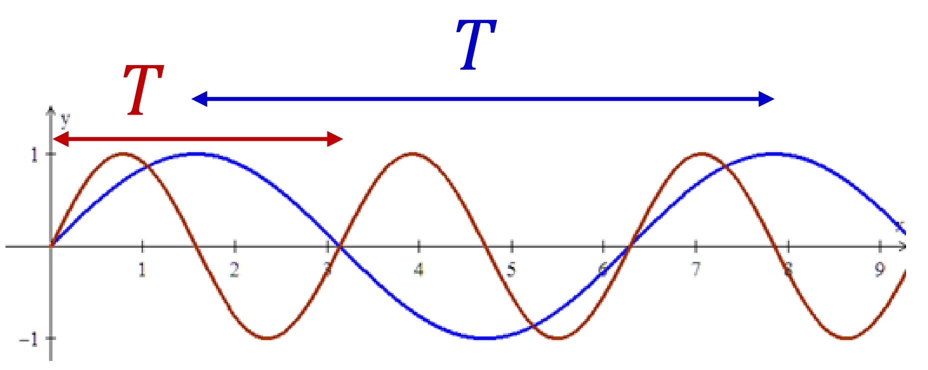
- Uma função $f$ é periódica, com período $T > 0$, se $f(x+T) = f(x)$.
- Qualquer múltiplo de $T$ também será o período.
- Se $f$ e $g$ são funções periódicas de período $T$, então:

$fg$ é periódica; $C_1 f + C_2 g$ também é periódica.

Exemplos

$f = senx \quad T = 2\pi$

$g = sen2x \quad T = \pi$



# 2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções $f$ e $g$ são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.

# 2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções $f$ e $g$ são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O produto interno de funções é representado por uma integral:

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

# 2- Ortogonalidade de funções

- Duas funções $f$ e $g$ são ortogonais se o produto interno entre elas $< f, g > = 0$.
- O produto escalar da geometria é um caso particular do produto interno de funções.
- O produto interno de funções é representado por uma integral:

$$< f, g > = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$$

- Caso o resultado da integral seja nulo, as funções $f$ e $g$ serão ortogonais entre si (seus vetores aproximação são ortogonais).

# 2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n,m > 0\ \ inteiros$$

# 2- Ortogonalidade de funções

- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n,m > 0\ \ inteiros$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\, n \neq m \\ \pi & se\, n = m \end{cases}$$

# 2- Ortogonalidade de funções

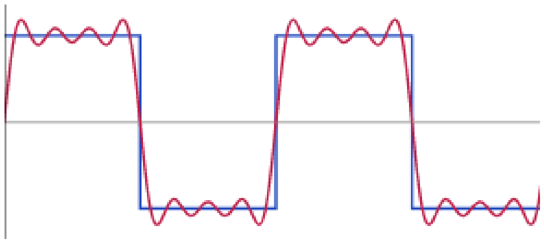
- Propriedades de ortogonalidade do seno e cosseno.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)dx = 0 \qquad \forall\ n,m > 0\ \ inteiros$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\cos(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\, n \neq m \\ \pi & se\, n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\text{sen}(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\, n \neq m \\ \pi & se\, n = m \end{cases}$$

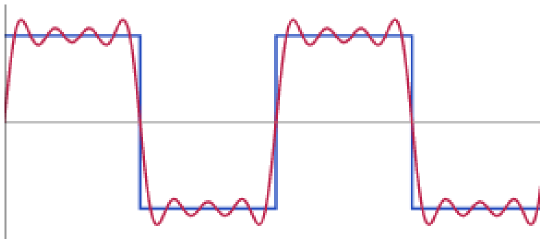
# Séries de Fourier



- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

# Séries de Fourier

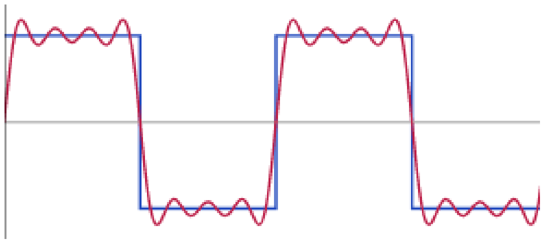


- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

# Séries de Fourier



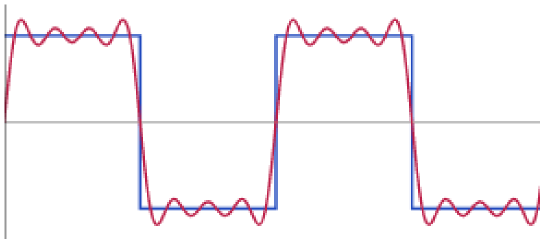
- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

- Como as funções seno e cosseno são periódicas a série irá convergir para todo $x$.

# Séries de Fourier



- A maiorias das funções podem ser representadas por uma série de Fourier da forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

- Esta série converge no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

- Como as funções seno e cosseno são periódicas a série irá convergir para todo $x$.

- A propriedade da ortogonalidade permite o cálculo dos coeficientes $a_0$, $a_n$ e $b_n$.

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx\right)$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}^{=\,0} + b_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}}^{=\,0}\right)$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}^{=\,0} + b_n \overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}}^{=\,0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

- ✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}_{=0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\,2\pi$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

✓ Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}_{=0} + b_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}}_{=0}\Big)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_0$

- Integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx}}_{=0} + b_n \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}}_{=0}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx}$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$

- ✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ ($m$ inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2} cosmxdx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \operatorname{sen} nx\, dx\right)$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$

- ✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ ($m$ inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosmx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2}\, cosmxdx}_{=0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nxdx + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cosmx \operatorname{sen} nx\, dx}_{=0}\right)$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$

✓ Multiplica-se a série por $cosmx$ ($m$ inteiro) e integra-se a série de Fourier termo a termo.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosmx\, dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_o}{2} cosmxdx}_{=0} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} cosmx \cos nxdx + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} cosmx\, \mathrm{sen}\, nx\, dx}_{=0}\right)$$

✓ O inteiro $m$ é fixo, e o inteiro $n$ varia na série.

✓ Então, a única integral que não se anula do lado direito é a do duplo cosseno quando $m = n$.

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\, dx$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2nx) \, dx$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2nx)\, dx$$

$$= a_n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} cos2nxdx \right]$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2nx\right) dx$$

$$= a_n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{\cos 2nx dx}}_{= 0} \right]$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx \, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos 2nx) \, dx$$

$$= a_n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cancel{cos 2nx dx}}_{= 0} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos nx \, dx = \pi a_n$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2nx)\, dx$$

$$= a_n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} cos2nxdx}}_{= 0} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = \pi a_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx}$$

# Séries de Fourier

## Cálculo do coeficiente $a_n$ $(m = n)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 nx\, dx$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2nx)\, dx$$

$$= a_n \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{cos2nxdx}^{\,= 0} \right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx = \pi a_n \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cosnx\, dx}$$

- ✓ O $b_n$ é obtido multiplicando-se a série por $senmx$.

# Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx$$

# Série de Fourier de uma função

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx$$

- Para um intervalo mais geral $L$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

# Exemplo

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad\qquad x \in [-\pi, \pi]$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \Rightarrow \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} sen\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}\, nx\, dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx}\right]_{-\pi}^{\pi}{}^{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\left[\frac{1}{n} cos\,nx\right]_{-\pi}^{\pi}}}_{=0}$$

**Exemplo 2:** Determinar a série de Fourier da função.

$$f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

✓ Cálculo dos coeficientes $a_o$ e $a_n$.

$$a_o = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad a_o = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_o = 0}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,cos\frac{n\pi x}{\pi}\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{\pi}\left[\cancel{\frac{x}{n}\operatorname{sen} nx}\right]_{-\pi}^{\pi}{}^{= 0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx$$

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\cancel{\frac{1}{n} cos\,nx}\right]_{-\pi}^{\pi}{}^{= 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = 0}$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx$$

**Exemplo 2:** $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \qquad \Rightarrow \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, \mathrm{sen}\, nx \, dx$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, \mathrm{sen}\, nx\, dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx\, dx$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \Rightarrow b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\cos nx\, dx}}_{=0}$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

- ✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \,\mathrm{sen}\, nx\, dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} - \cancel{\cos nx\, dx}}_{= 0}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)\right]$$

# Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi x}{L}dx \qquad \Rightarrow \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx\, dx}}_{=0}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi}2\cos n\pi$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, sen\frac{n\pi x}{\pi}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \quad \Rightarrow \quad b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\overbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} -\cos nx\,dx}}^{=\,0}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cosn\pi - (-\pi)cosn(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi}2\cos n\pi \qquad \boxed{b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n}$$

## Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

- Cálculo dos coeficientes $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen \frac{n\pi x}{L} dx \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, sen \frac{n\pi x}{\pi} dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx \, dx \;\Rightarrow\; b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n} cos\, nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cancel{-\cos nx \, dx}}_{=0}$$

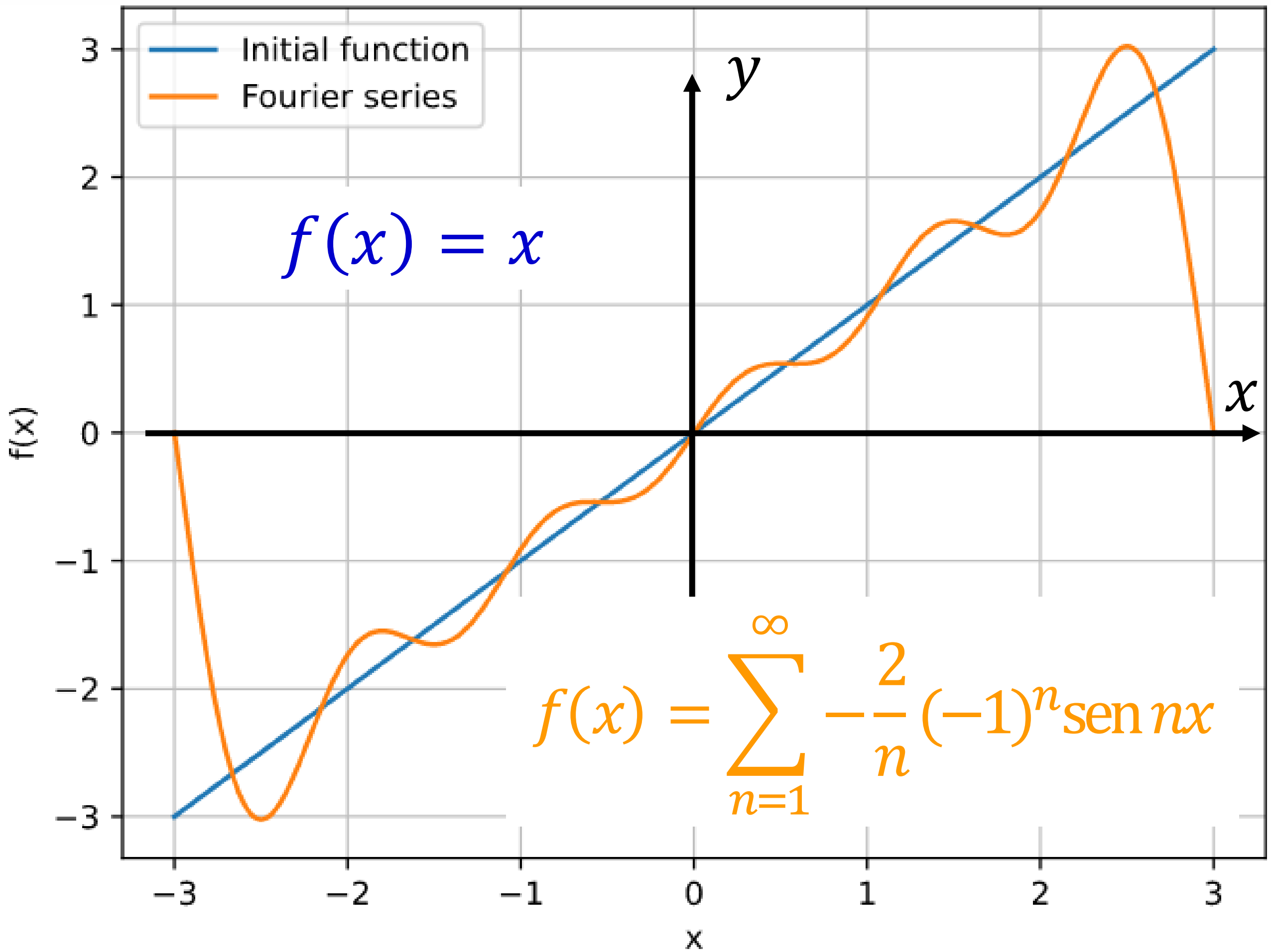
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}[\pi cos n\pi - (-\pi) cos n(-\pi)] = -\frac{\pi}{n\pi} 2\cos n\pi \qquad \boxed{b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n}$$

- Série de fourier de $f(x) = x$.

$$\boxed{f(x) = x \cong \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \operatorname{sen} nx}$$

# Exemplo 2: $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$

✓ Gráfico da série de Fourier de $f(x) = x$ com 5 termos.




https://mathforyou.net/en/online/calculus/series/fourier/

# Para depois desta aula:

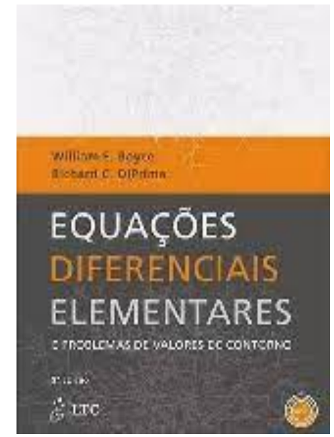
- Estudar seções 10.1 e 10.2 do livro texto.
- Resolver os exemplos.
- Praticar: exercícios da seções 10.1 e 10.2.

# Próxima aula:

- Equações diferenciais parciais (EDPs).

# Bibliografia

**1**. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.




Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.


BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.