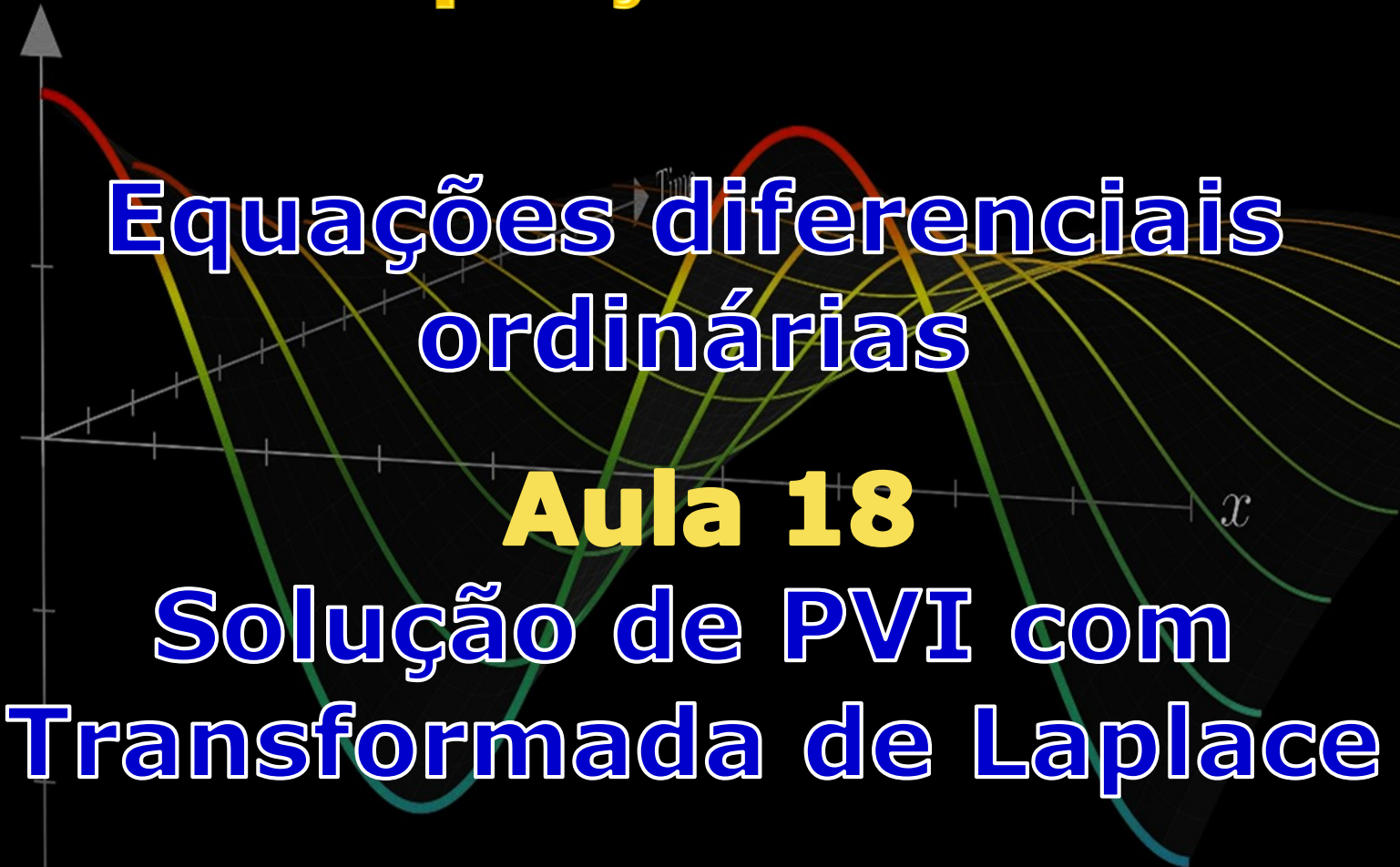


Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 18

Solução de PVI com Transformada de Laplace

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução.
2. Teorema da transformada de derivadas.
3. Exemplo de PVI homogêneo.
4. Observações sobre o método.
5. Exemplo de PVI não homogêneo.

Pré-requisitos

- Decomposição em frações parciais.



Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.
- A resolução da eq. dif. não homogênea com a transformada é mais simples em comparação com outros métodos.

Introdução

- Alguns problemas de valor inicial (PVI) podem ser resolvidos pela Transformada de Laplace.
- A equação diferencial deverá ser linear com coeficientes constantes.
- A técnica pode ser aplicada tanto na equação homogênea quanto na equação não homogênea.
- A resolução da eq. dif. não homogênea com a transformada é mais simples em comparação com outros métodos.
- O próximo teorema estabelece a transformada de derivadas, fundamental para resolução de PVIs.



Teorema da transformada de derivadas

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

Então,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Teorema 6.2.1

Seja uma função f contínua e f' contínua por partes em um intervalo $0 \leq t \leq A$.

Supondo que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M \in \mathbb{R}$; com K, M e a constantes reais.

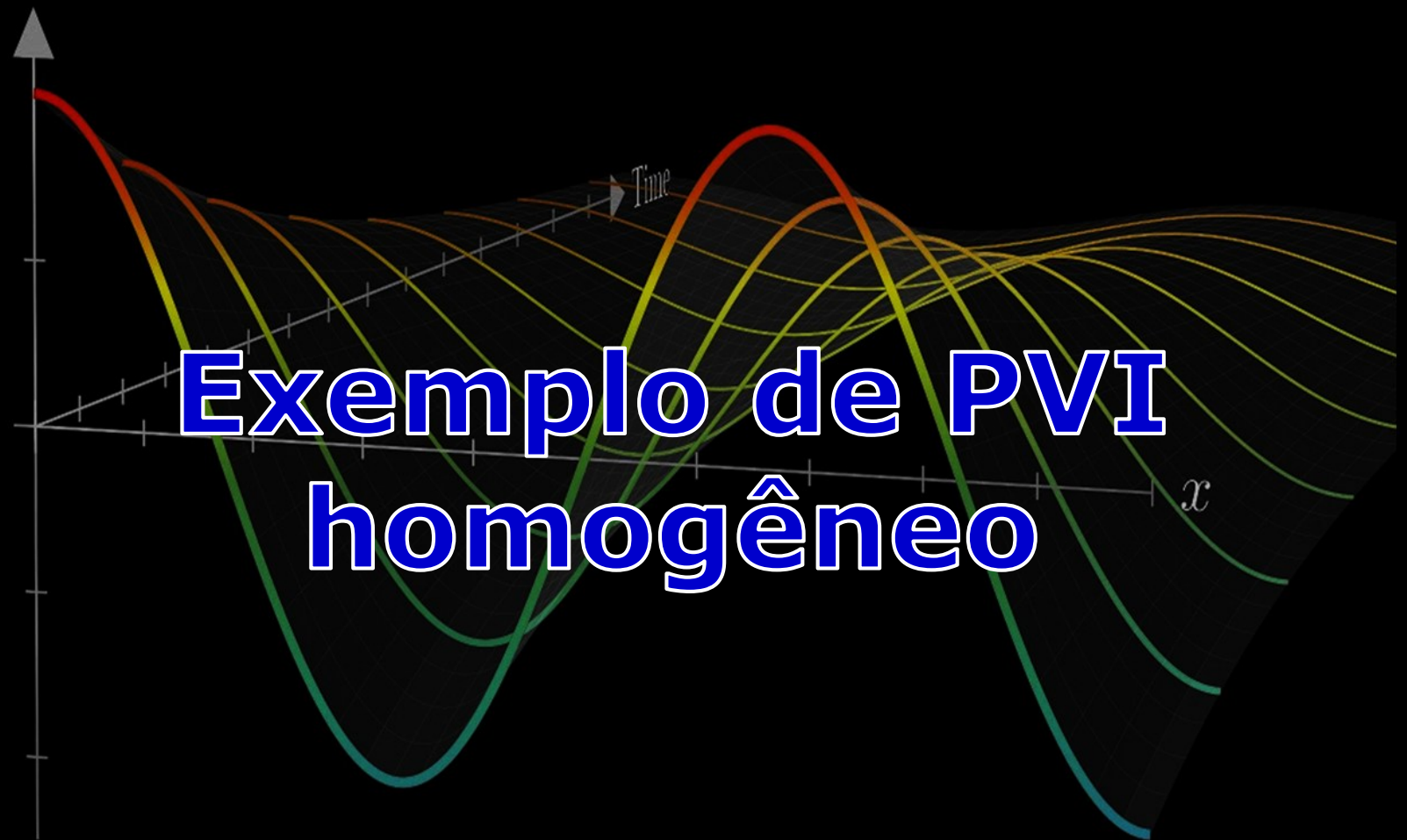
Então,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Corolário 6.2.2

Com as mesmas condições do teorema tem-se que:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$



Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2/3$$

Exemplo 1: Resolver o PVI com a Transformada de Laplace.

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

- ✓ Este problema poderia ser resolvido pelo método da eq. característica.

$$r^2 - r - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (r + 1)(r - 2) = 0$$

$$r_1 = -1, \quad r_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

- ✓ Ao inserir as condições iniciais determina-se C_1 e C_2 .

$$y(0) = 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1/3$$

$$y'(0) = 0 = -C_1 e^0 + 2C_2 e^0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2/3$$

- ✓ Solução do PVI: $y = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

↘

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

↙

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$



$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)]$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Resolução com a Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$


$$[s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$[s^2Y(s) - s \cdot 1 - 0] - [sY(s) - 1] - 2Y(s) = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) + 1 - s = 0$$

$$[s^2 - s - 2]Y(s) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s^2 - s - 2} \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$Y(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 2)} = \frac{A}{(s + 1)} + \frac{B}{(s - 2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1)$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1) \Rightarrow s-1 = (A+B)s - 2A + B$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1) \Rightarrow s-1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = -1 \end{cases}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1) \Rightarrow s-1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2(1-B)+B=-1 \end{cases}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1) \Rightarrow s-1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2(1-B)+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=1/3}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Decompor o denominador em frações parciais.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s-2)} \\ &= \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

✓ Como os denominadores são iguais,

$$s-1 = A(s-2) + B(s+1) \Rightarrow s-1 = (A+B)s - 2A + B$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1-B \\ -2(1-B)+B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{|c|} \hline A=2/3 \\ \hline B=1/3 \\ \hline \end{array}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}$$

✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad s > 0$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}$$

✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad s > 0$$

✓ Então,

$$\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} = \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}$$

✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad s > 0$$

✓ Então,

$$\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} = \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

Exemplo 1: $y'' - y' - 2y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

✓ Portanto, a expressão de $Y(s)$ fica:

$$Y(s) = \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s-2)}$$

✓ Pelos exemplos resolvidos, sabe-se que:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad s > 0$$

✓ Então,

$$\frac{2}{3} \frac{1}{s+1} = \frac{2}{3} \mathcal{L}\{e^{-t}\} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{3} \mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

✓ Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

*Solução
do PVI*



Observações sobre o método da transformada

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.
5. A dificuldade reside em encontrar a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.

Observações sobre o método

1. A equação diferencial na variável t é reduzida para uma equação algébrica de variável s .
2. A transformada $Y(s)$ de $y(t)$ é encontrada, resolvendo-se essa equação algébrica.
3. As constantes arbitrárias são determinadas ao se substituir as condições iniciais na expressão de $Y(s)$.
4. As equações diferenciais não homogêneas são resolvidas da mesma forma que as homogêneas.
5. A dificuldade reside em encontrar a transformada de Laplace inversa $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t)$.
6. Pelo Teorema 3.2.1 haverá solução única para o PVI, portanto, única transformada inversa para $Y(s)$.

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2. e^{at}	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
3. $t^n, \quad n$ um inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
4. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
5. $\text{sen}(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
16. $(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$

Transformada de Laplace

Problema de
valor inicial
Eq. dif. linear



** Métodos
anteriores*

Solução do PVI
 $y(t)$

** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace

1

Problema de
valor inicial
Eq. dif. linear



Aplicar a
transformada
 $\mathcal{L}$

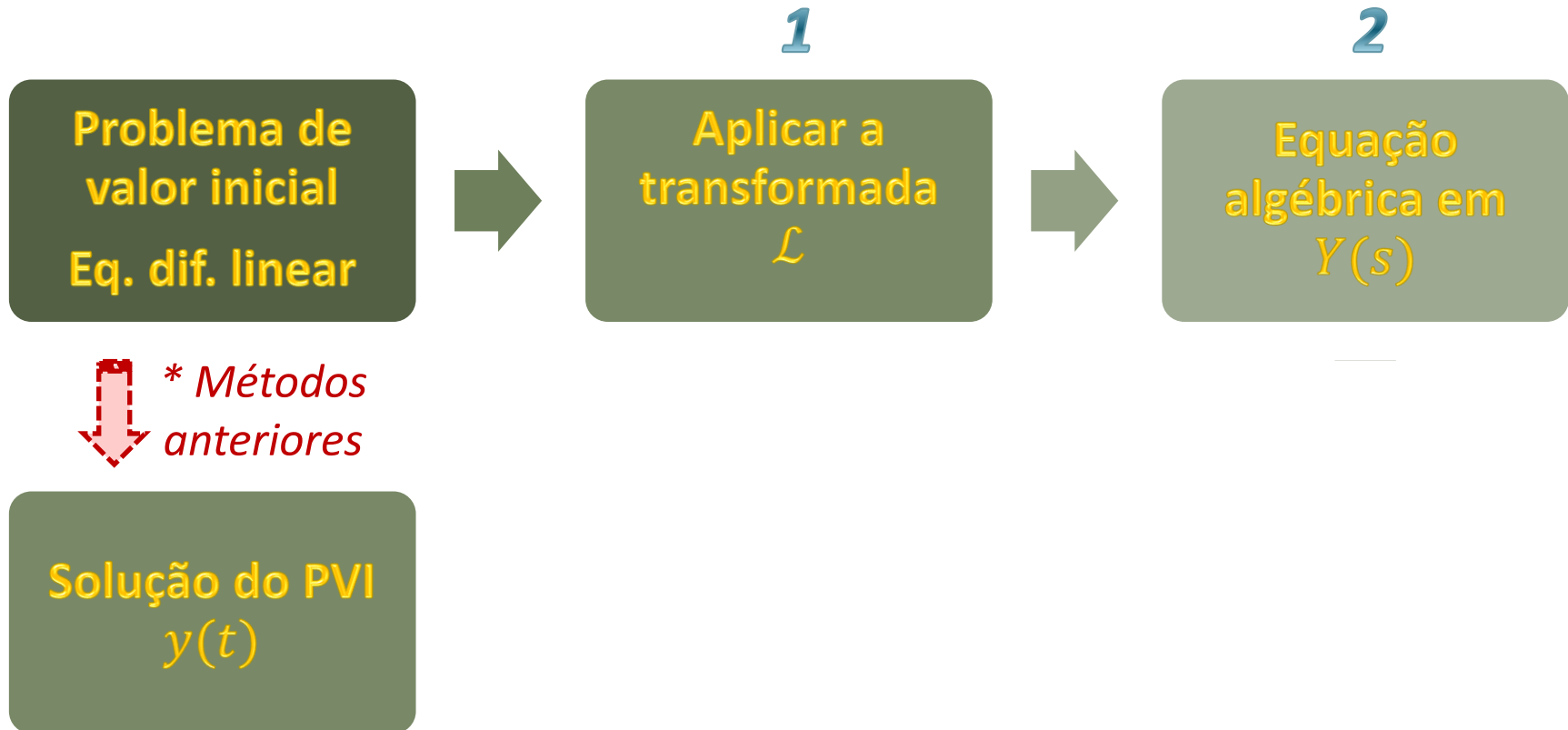


** Métodos
anteriores*

Solução do PVI
 $y(t)$

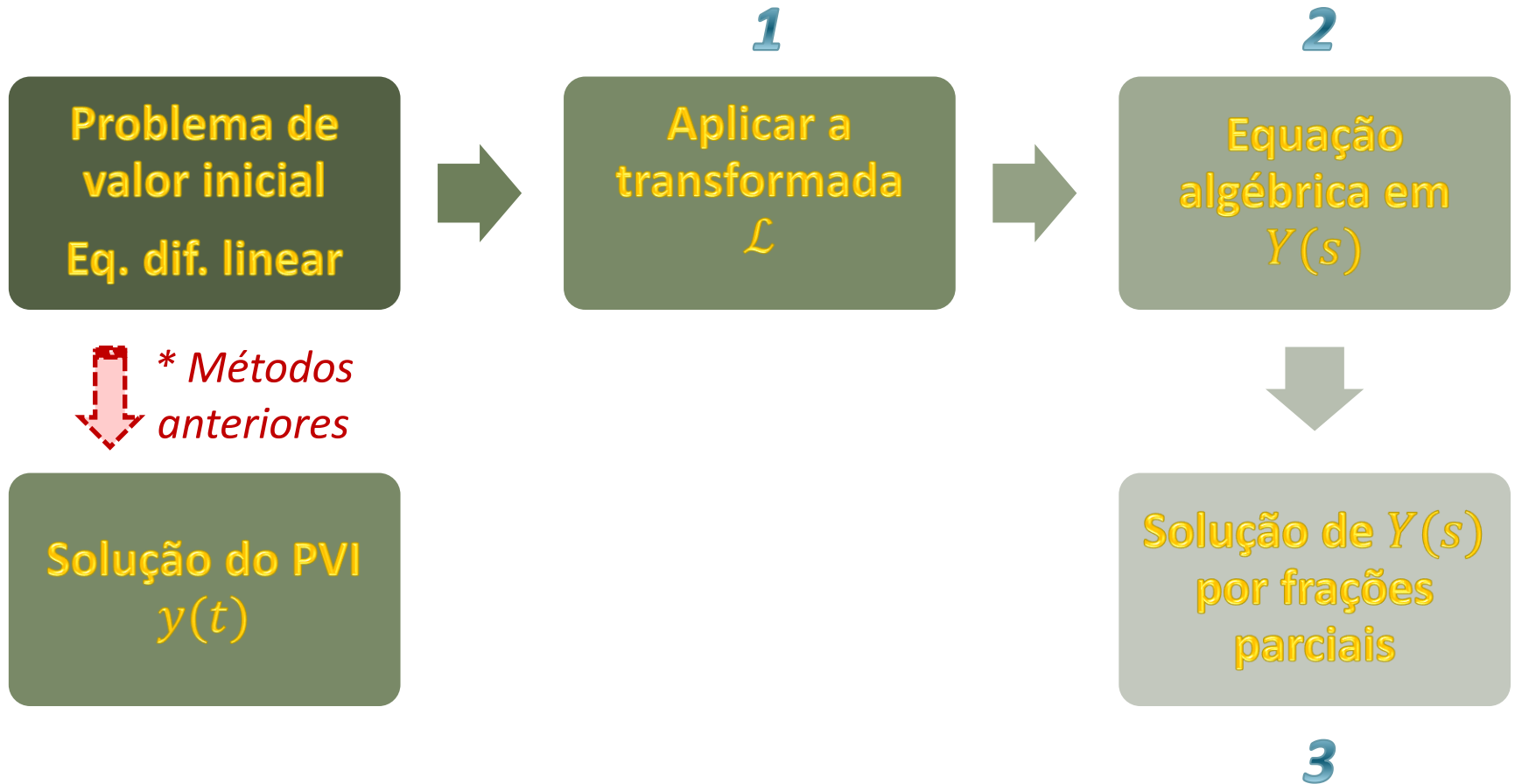
** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace



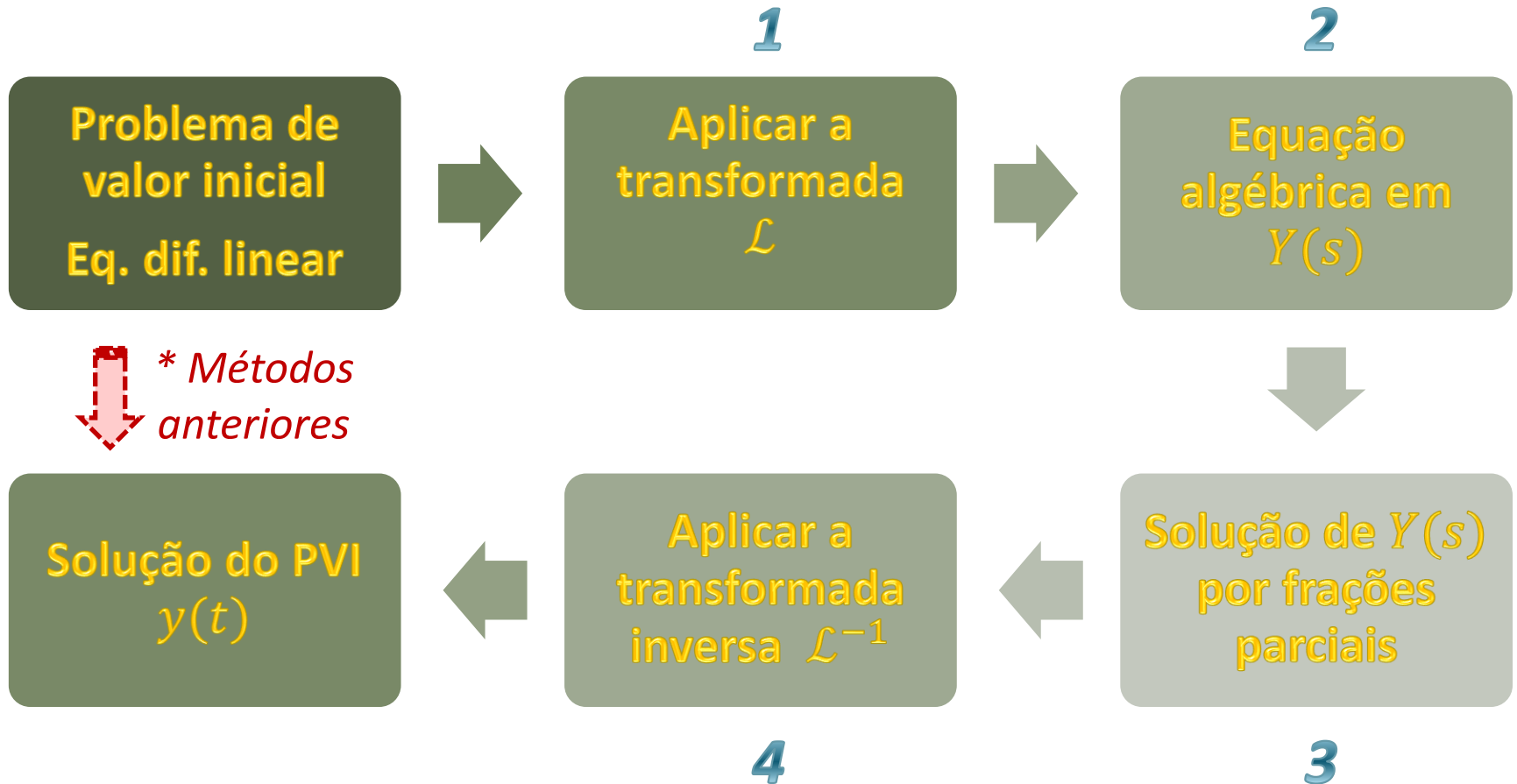
** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace



** Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.*

Transformada de Laplace



* Equação característica, coeficientes a determinar e variação dos parâmetros.



The background image is a 3D plot on a dark background. It features a series of curves that start at a common point on the left and spread out as they move to the right. The curves are colored with a gradient from red/orange at the top to green/blue at the bottom. A horizontal axis is labeled with the variable x at its right end. A vertical axis is indicated by an upward-pointing arrow on the left. A diagonal axis is labeled 'Time' with an arrow pointing along it. The curves represent solutions to a partial differential equation, specifically a PVI (Parabolic Vector Invariant) that is non-homogeneous.

**Exemplo de PVI não
homogêneo**

Exemplo 2: Resolver o PVI.

$$\begin{cases} y'' + y = \sin 2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$



$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]$$

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$



$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\}$$

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$


$$\boxed{[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)]} + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$


$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$


$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$


$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} + (2s + 1)$$

Exemplo 2: Resolver o PVI.

✓ Aplica-se a transformada.

$$\begin{cases} y'' + y = \text{sen}2t \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\text{sen}2t\}$$

$$[s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)] + \mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 Y(s) - s \cdot 2 - 1] + Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) - 2s - 1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$[s^2 + 1]Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4} + (2s + 1)$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)} \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3ª eq. } -1^\text{ª} \\ 3A = 6 \end{array}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{3ª eq.} - \text{1ª} \\ 3A = 6 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{A = 2}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} 3^{\text{a}} \text{ eq.} - 1^{\text{a}} \\ 3A = 6 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{A = 2} \quad \begin{matrix} \text{Na } 1^{\text{a}} \\ \Rightarrow \end{matrix} \boxed{C = 0}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \begin{array}{l} \text{3ª eq. } -1^\text{ª} \\ 3A = 6 \\ \text{4ª eq. } -2^\text{ª} \\ 3B = 5 \end{array} \Rightarrow \boxed{A = 2} \quad \begin{array}{l} \text{Na 1ª} \\ \Rightarrow \end{array} \boxed{C = 0}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases} \begin{array}{l} \text{3ª eq. } -1ª \\ \text{4ª eq. } -2ª \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3A = 6 \\ 3B = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{A = 2} \\ \boxed{B = 5/3} \end{array} \xrightarrow{\text{Na 1ª}} \boxed{C = 0}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

- ✓ Como os termos no denominador são quadráticos em s , a decomposição em frações parciais fica:

$$Y(s) = \frac{(2s + 1)(s^2 + 4) + 2}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$Y(s) = \frac{As + B}{(s^2 + 1)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + 4)} = \frac{(As + B)(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

- ✓ Como os denominadores são iguais,

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A + C)s^3 + (B + D)s^2 + (4A + C)s + (4B + D)$$

$\begin{cases} A + C = 2 \\ B + D = 1 \\ 4A + C = 8 \\ 4B + D = 6 \end{cases}$	$3^{\text{a}} \text{ eq. } - 1^{\text{a}}$	$3A = 6 \Rightarrow \boxed{A = 2}$	$\text{Na } 1^{\text{a}} \Rightarrow \boxed{C = 0}$
	$4^{\text{a}} \text{ eq. } - 2^{\text{a}}$	$3B = 5 \Rightarrow \boxed{B = 5/3}$	$\text{Na } 2^{\text{a}} \Rightarrow \boxed{D = -2/3}$

85

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} +$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \sin 2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$$

Exemplo 2: $y'' + y = \text{sen}2t$ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$

✓ Assim, a função transformada fica:

$$Y(s) = \frac{2s + 5/3}{(s^2 + 1)} - \frac{2/3}{(s^2 + 4)} = 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2 + 4}$$

✓ Aplicar a transformada inversa para determinar $y(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 2 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 1}\right\} + \frac{5}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} - \frac{1}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}$$

✓ Consultar tabela de transformada para obter a solução do PVI.

$$y(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

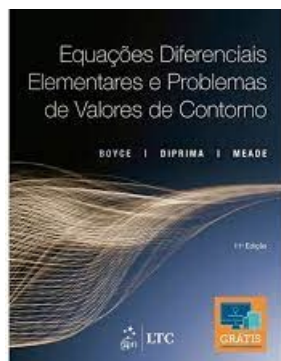
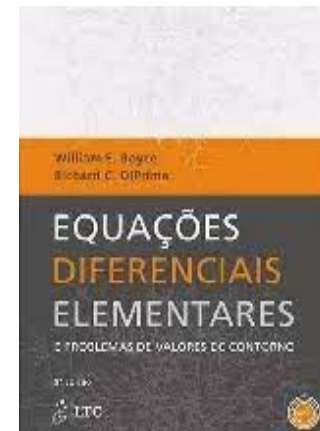
Para depois desta aula:

- Estudar seção 6.2 do livro texto (Boyce).
- Resolver os exemplos da aula.
- Praticar: exercícios da seção 6.2 do Boyce.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.