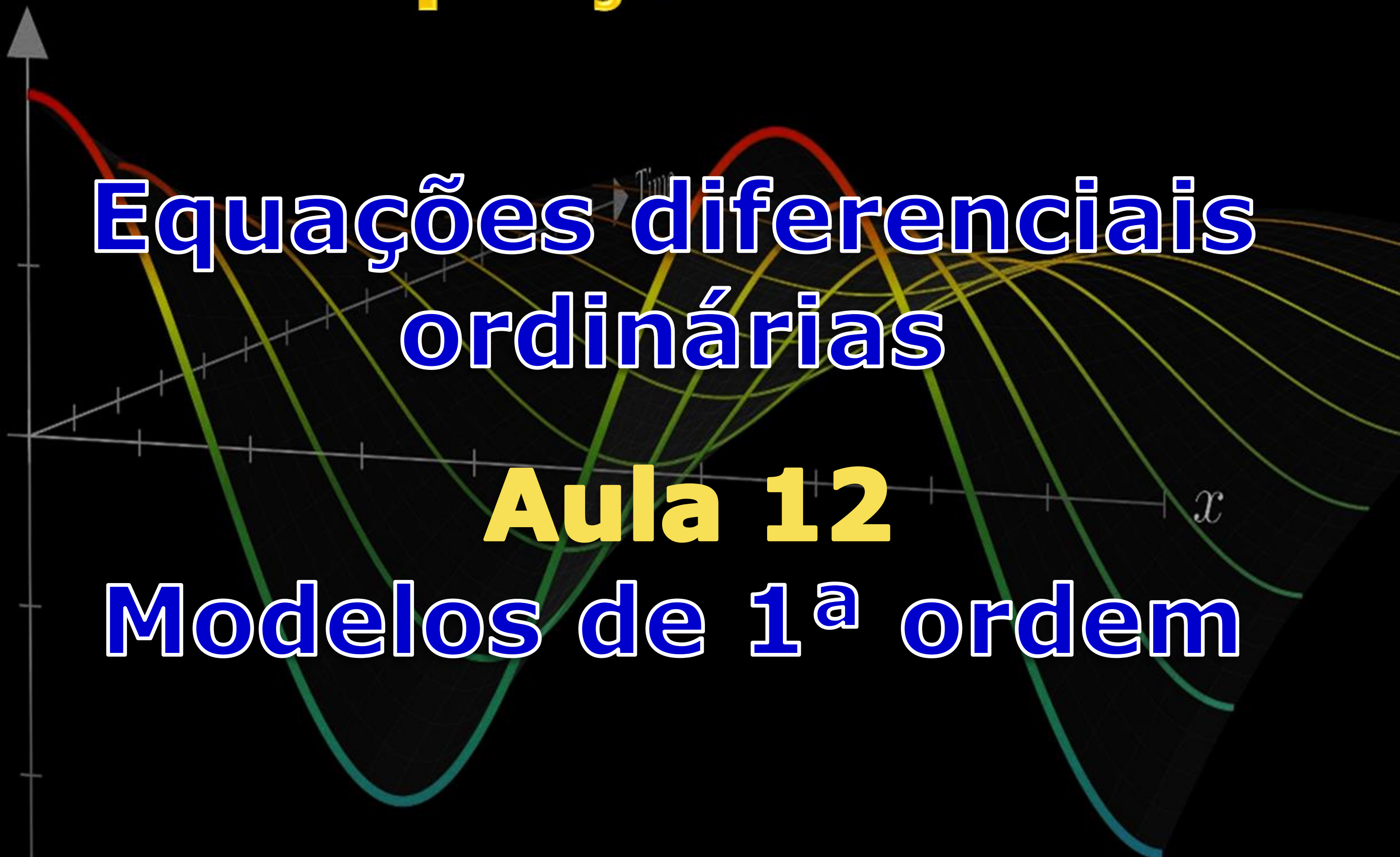
Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 12
Modelos de 1ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Modelagem com eq. dif. de 1ª ordem.
2. Etapas de construção.
3. Exemplo da mistura.
4. Exercício proposto.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.
- Independentemente do campo de aplicação, existem três etapas sempre presentes na modelagem matemática.
- A seguir serão relacionados os principais itens dessas etapas fundamentais da modelagem.

Etapas de construção de um modelo

Etapas de construção de um modelo

1
- Construção do modelo inicial

2
- Análise do modelo

3
- Comparação com a experimentação ou observação

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.
4. Algumas vezes a modelagem envolve substituir conceitualmente um processo discreto por um processo contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.
5. O jogo entre a compreensão do fenômeno e o conhecimento das limitações técnicas é característico da Matemática Aplicada.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.

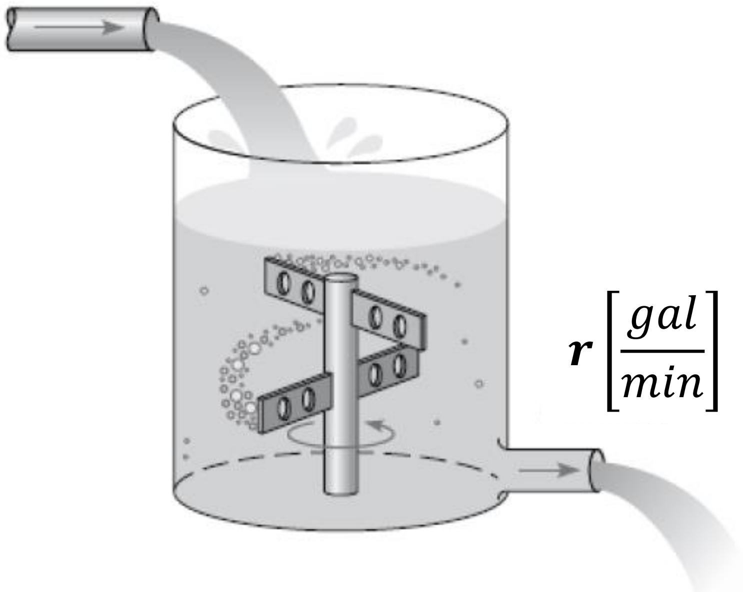
Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.
5. Caso as previsões do modelo estejam inconsistentes com o fenômeno ele deve ser corrigido ou refeito.

Exemplo da mistura

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

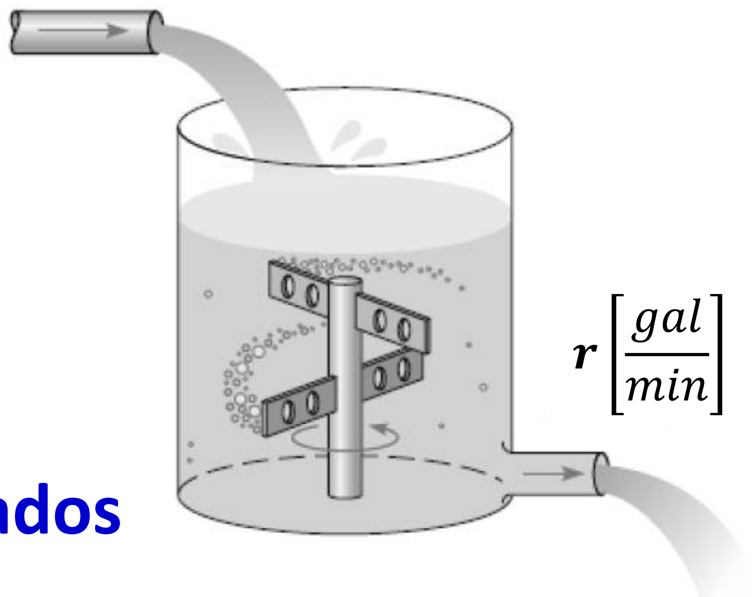
$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right], \frac{1}{4}\ lb/gal$



$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right]$

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right], \frac{1}{4}\ lb/gal$$



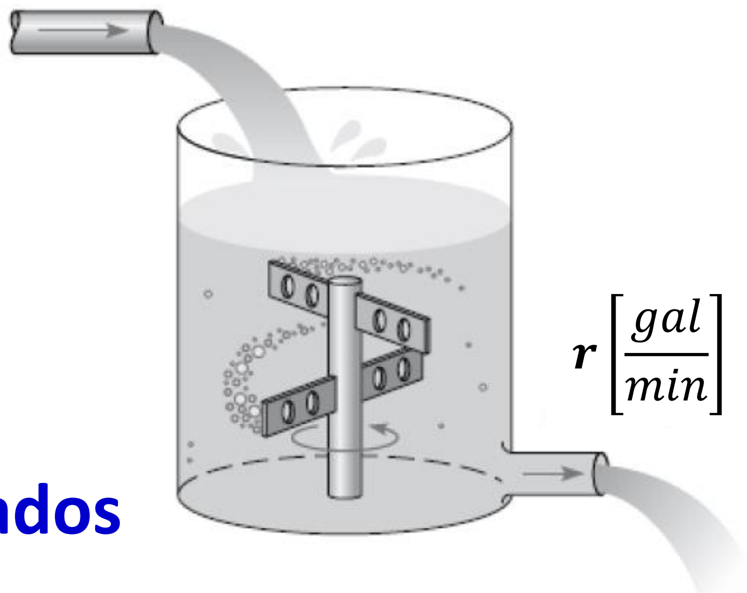
$$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right]$$

Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_o libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ $\boldsymbol{r}$: galões por minuto.
- ✓ $\boldsymbol{Q(t)}$: quantidade de sal**?**

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right], \frac{1}{4}\ lb/gal$



$\boldsymbol{r}\left[\frac{gal}{min}\right]$

Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_o libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ $\boldsymbol{r}$: galões por minuto.
- ✓ $\boldsymbol{Q(t)}$: quantidade de sal**?**

Questões

a) Escrever o PVI.

b) Encontrar a expressão para $Q(t)$.

c) Qual a quantidade limite Q_L quando $t \to \infty$.

d) Se $r = 3$ e $Q_o = 2Q_L$ encontrar T para o nível de sal a 2% de Q_L.

e) Determinar r para $t = 45\ \text{min}$.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

$$\boldsymbol{tx\ saída} = \frac{Q}{100} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right]$$

Q que sai é diluída em 100 gal

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
   - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$\boldsymbol{tx\ ent} = \frac{1}{4}r\ \left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right] = \frac{r}{4}\left[\frac{lb}{min}\right]$$

P/ cada gal r há ¼ lb sal

$$\boldsymbol{tx\ saída} = \frac{Q}{100}r\ \left[\frac{lb}{gal}\frac{gal}{min}\right] = \frac{rQ}{100}\left[\frac{lb}{min}\right]$$

Q que sai é diluída em 100 gal

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

- a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt}+\dfrac{rQ}{100}=\dfrac{r}{4}$ $\quad Q(o)=Q_o$ (*condição inicial*)

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $\quad Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $\quad Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
   - Resolução pelo método do fator integrante.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{rQ}{100} = \dfrac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
   - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
   - Resolução pelo método do fator integrante.
   - $\boldsymbol{Q(t)}$ é a função incógnita e $\boldsymbol{p(t) = r/100}$.

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}}Q]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}[e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\int e^{\frac{rt}{100}}\,dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\frac{1}{{}^{r}/_{100}}e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\boldsymbol{\mu(t)}$:

$$\mu(t) = exp\int \frac{r}{100}dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}}\frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}}\frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right] = \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{rt}{100}}Q\right]dt = \int \frac{r}{4}e^{\frac{rt}{100}}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\int e^{\frac{rt}{100}}\,dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}}Q = \frac{r}{4}\frac{1}{{}^{r}/_{100}}e^{\frac{rt}{100}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}}Q = 25e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $$Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- Solução geral da equação diferencial:
  - b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$
- Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- Solução geral da equação diferencial:
  - b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$
- Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

- Voltando o valor da constante C na expressão de Q:

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Solução geral da equação diferencial:
  - ✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$
- ✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \quad \Rightarrow \quad C = Q_o - 25$$

- ✓ Voltando o valor da constante C na expressão de Q:

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$Q = 25(1 - e^{-\frac{rt}{100}}) + Q_o e^{-\frac{rt}{100}}$$

solução particular do PVI

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + \ (Q_o - 25)\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}^{=0}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25)\underbrace{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}_{=0}$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \overset{= 0}{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}$$

  - ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + \ (Q_o - 25)\cancelto{0}{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}$$

  - ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$r = 3\ gal/min,$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \overset{= 0}{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}$$

✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb,$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}} = 0$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} Q = \lim_{t\to\infty} 25 + \lim_{t\to\infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t\to\infty} Q = 25 + \ (Q_o - 25)\overset{=\,0}{\cancel{\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{rt}{100}}}}$$

- ✓ c) Quantidade sal: $\boxed{Q_L = 25\ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L:

$$r = 3\ gal/min, \quad Q_o = 2Q_L = 50\ lb, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$25 + 0,02 \times 25 = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

$$T = \frac{ln0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$ln0,02 = lne^{-0,03T} \quad \Rightarrow \quad ln0,02 = -0,03T\ lne$$

$$T = \frac{ln0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 130,4\ [min.]}$$

✓ d) tempo: 2% de Q_L

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\% Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- Fluxo de galões (r) para $t = 45\ min$.
- Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\% Q_L = 1{,}02 Q_L = 25{,}5\ lb$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\% Q_L = 1{,}02 Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\, min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\, lb$$

$$t = 45\, min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\, lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

$$ln0{,}02 = lne^{-0{,}45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45\,min$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L.

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1{,}02Q_L = 25{,}5\,lb$$

$$t = 45\,min, \qquad Q_o = 2Q_L = 50\,lb,$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad 25{,}5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1{,}02 = 1 + 1e^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}02 = e^{-0{,}45r}$$

$$ln0{,}02 = lne^{-0{,}45r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = 8{,}69\ [{}^{gal}/_{min}]}$$

✓ e) Galões p/ $t = 45\,min$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.
- ✓ O parâmetro (r) condição inicial (Q_o) são ajustados de acordo com aplicação a ser modelada.

Exercício

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, $10^7\ gal$ de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5.10^6 de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)\ g/gal$.

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, $10^7\ gal$ de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5.10^6 de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + sen(2t)\ g/gal$.

Pede-se

a) Construa um modelo matemático desse processo de fluxo.
b) Determine a quantidade $Q(t)$ de produto químico na lagoa em qualquer instante. Sugestão: transforme $q[t] = 10^6 Q[g]$.
c) Desenhe o gráfico da solução particular.
d) Descreva o efeito da concentração do produto químico na água da lagoa para $t = 0, t = 1, t = 10\ e\ t \to \infty$.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.3 do Boyce.

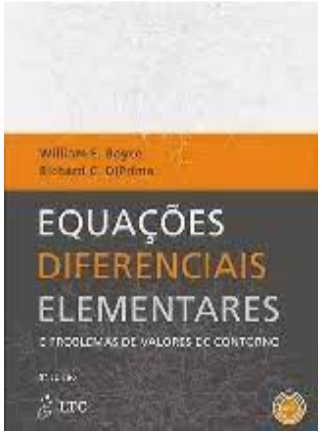
Próxima aula:

- Teoremas de existência e unicidade.
- Equações exatas e fator integrante.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios com base na 9ª ed.



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.