Formulário – Séries

- Não há regras certeiras e rápidas para determinar qual teste de uma série funcionará.
- A principal estratégia é classificar a série segundo sua forma e aplicar o teste adequado.

Orientações e principais teoremas para auxiliar no teste de convergência:

1. Séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (série p). Se $p > 1$ a série converge; se $p \leq 1$ a série diverge.

2. Séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ (geométrica), sendo a primeiro termo e r a razão.

Se $|r| < 1$ a série converge; se $|r| \geq 1$ a série diverge.

3. As séries similares à série p ou a série geométrica podem ser comparadas com estas.

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ série positivas $\begin{cases} \text{se } \sum b_n \text{ converge e } a_n \leq b_n, \text{ então } \sum a_n \text{ converge.} \\ \text{se } \sum b_n \text{ diverge e } a_n \geq b_n, \text{ então } \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$

4. Se o $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ usar o teste a divergência (Teorema 7).

Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou $\nexists$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente

5. Para séries da forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ e $b_n > 0$ usar o teste da série alternada.

A série converge se (i) $b_{n+1} \leq b_n$ $\forall\, n$ e (ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (as duas devem ser satisfeitas)

6. Nas séries que contém o fatorial ou a n-ésima potência o teste da razão pode ser útil.

Seja $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L.$ Se $L < 1$ $\sum a_n$ converge; Se $L > 1$ $\sum a_n$ diverge; Se $L = 1$ inconclusivo.

7. Nas séries da forma $\sum (b_n)^n$ utilizar o teste da raiz.

Seja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$ Se $L < 1$ $\sum a_n$ converge; Se $L > 1$ $\sum a_n$ diverge; Se $L = 1$ inconclusivo.

8. Se $a_n = f(n)$ onde $\int_1^{\infty} f(x)dx$ é facilmente calculada, então o teste da integral é eficaz.

Se $f > 0$, decrescente em $[1, \infty)$ e $a_n = f(n)$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $\int_1^{\infty} f(x)dx$ convergir.

Séries conhecidas

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Harmônica - Divergente $\forall\, n$) | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Telescópica - Convergente)

Séries de potência

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, sendo C_n coeficiente; x variável; a constante.

Aplica-se o teste da razão. Impor que o resultado do limite seja < 1. Encontrar o raio de convergência. Testar os extremos do intervalo. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x)^n = \frac{1}{1-x}$ converge se $|x| < 1$.