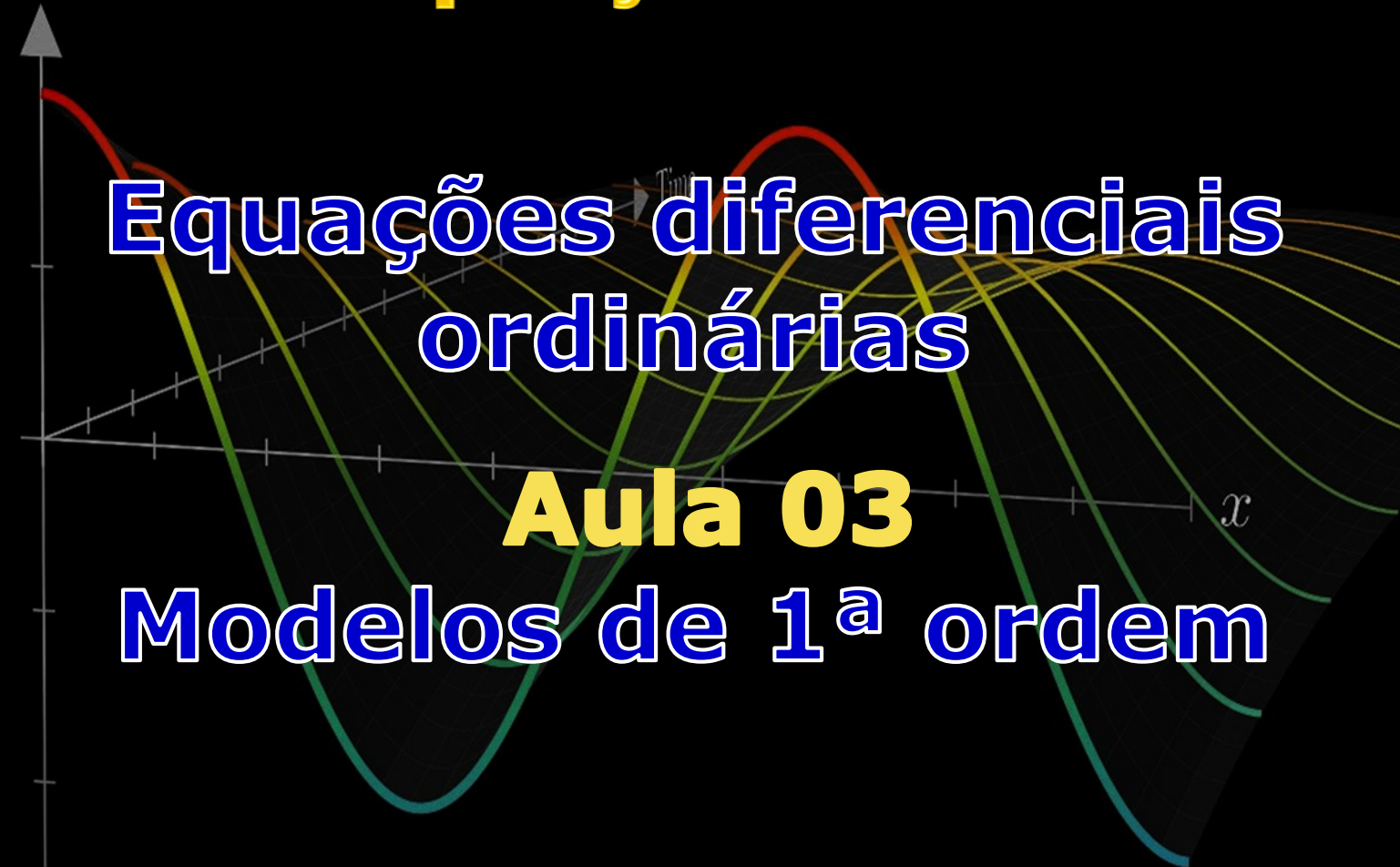


Equações diferenciais



Equações diferenciais ordinárias

Aula 03

Modelos de 1ª ordem

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Modelagem com eq. dif. de 1ª ordem.
2. Etapas de construção.
3. Exemplo da mistura.
4. Exercício proposto.

Pré-requisitos

- Diferenciação e Integração de funções.
- Resolução de equações algébricas com logaritmo.

**Modelagem com
Eq. Dif. de 1ª ordem**

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.

Modelagem com Eq. Dif. de 1ª ordem

- A modelagem matemática e a experimentação têm papéis complementares na investigação científica.
- As análises matemáticas podem sugerir direções mais promissoras para exploração experimental.
- Independentemente do campo de aplicação, existem três etapas sempre presentes na modelagem matemática.
- A seguir serão relacionados os principais itens dessas etapas fundamentais da modelagem.



Etapas de construção de um modelo

Etapas de construção de um modelo

1

- **Construção do modelo inicial**

2

- **Análise do modelo**

3

- **Comparação com a experimentação ou observação**

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para expressões matemáticas.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.
3. Inicialmente, essa equação dará uma descrição aproximada do processo real.
4. Algumas vezes a modelagem envolve substituir conceitualmente um processo discreto por um processo contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Caso seja possível, resolver a eq. dif. analiticamente.
2. A segunda alternativa é utilizar métodos numéricos para resolução.
3. Uma terceira via consiste em analisar as propriedades da solução, sem resolver a eq. dif.
4. O conhecimento da área em estudo permite sugerir aproximações razoáveis para tornar a resolução viável.
5. O jogo entre a compreensão do fenômeno e o conhecimento das limitações técnicas é característico da Matemática Aplicada.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.

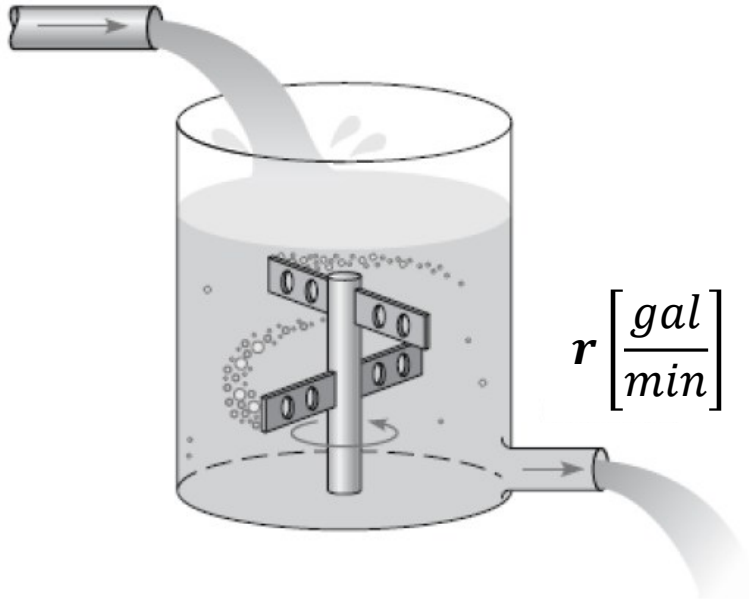
Etapa 3 – Comparação com experimentos

1. Interpretar a solução no contexto do problema.
2. Calcular os valores da solução em pontos específicos, comparando-os com os valores observados experimentalmente.
3. Avaliar o comportamento da solução para tempos longos.
4. O fato da solução matemática existir e parecer razoável não garante que esteja correta.
5. Caso as previsões do modelo estejam inconsistentes com o fenômeno ele deve ser corrigido ou refeito.



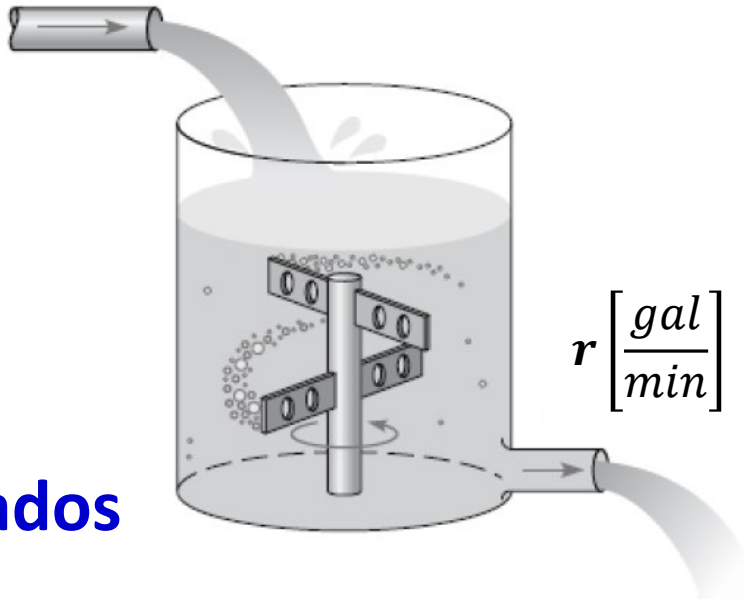
Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[\frac{\text{gal}}{\text{min}} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$



Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[\frac{\text{gal}}{\text{min}} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$

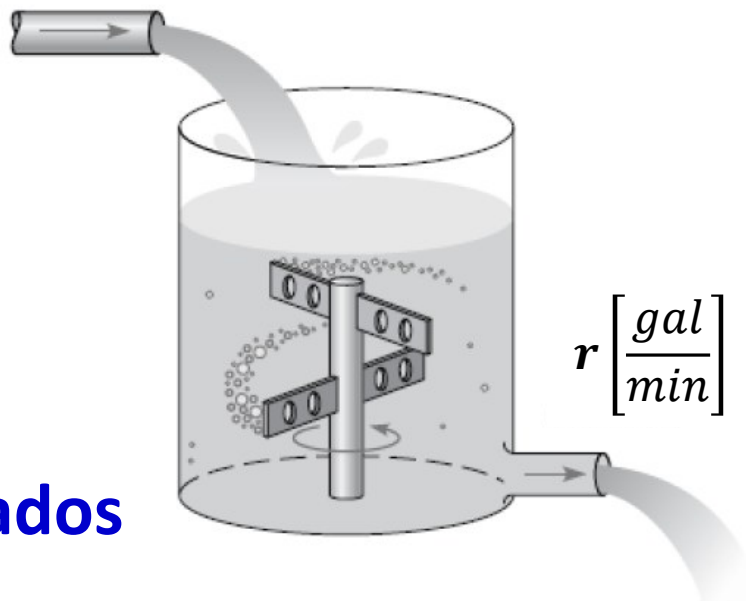


Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_0 libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ r : galões por minuto.
- ✓ $Q(t)$: quantidade de sal?

Exemplo 1 Dissolução de sal em um reator tanque com agitação contínua (CSTR).

$$r \left[\frac{\text{gal}}{\text{min}} \right], \frac{1}{4} \text{ lb/gal}$$



Dados

- ✓ Em $t = 0$, um tanque contém Q_o libras de sal em 100 galões de água.
- ✓ r : galões por minuto.
- ✓ $Q(t)$: quantidade de sal?

Questões

- a) Escrever o PVI.
- b) Encontrar a expressão para $Q(t)$.
- c) Qual a quantidade limite Q_L quando $t \rightarrow \infty$.
- d) Se $r = 3$ e $Q_o = 2Q_L$ encontrar T para o nível de sal a 2% de Q_L .
- e) Determinar r para $t = 45 \text{ min}$.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$tx\ ent = \frac{1}{4}r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right]$$

*P/ cada gal r há
¼ lb sal*

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$tx\ ent = \frac{1}{4}r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right] \quad \begin{array}{l} P/ \text{ cada gal } r \text{ há} \\ \frac{1}{4} lb \text{ sal} \end{array}$$

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx\ ent - tx\ saída$$

$$tx\ ent = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right] \quad \text{P/ cada gal r há } \frac{1}{4} lb\ sal$$

$$tx\ saída = \frac{Q}{100} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] \quad \text{Q que sai é diluída em } 100\ gal$$

Etapa 1 - Construção do modelo inicial

1. Tradução do fenômeno para matemática.
 - Quantidade de sal no tanque é devida aos fluxos de entrada e saída.
2. A equação diferencial será o modelo do processo.

$$\frac{dQ}{dt} = tx \text{ ent} - tx \text{ saída}$$

$$tx \text{ ent} = \frac{1}{4} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{r}{4} \left[\frac{lb}{min} \right] \quad \text{P/ cada gal } r \text{ há } \frac{1}{4} lb \text{ sal}$$

$$tx \text{ saída} = \frac{Q}{100} r \left[\frac{lb}{gal} \frac{gal}{min} \right] = \frac{rQ}{100} \left[\frac{lb}{min} \right] \quad \text{Q que sai é diluída em 100 gal}$$

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (*condição inicial*)

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(0) = Q_0$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(0) = Q_0$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
 - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
 - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
 - Resolução pelo método do fator integrante.

Etapa 1 – Construção do modelo inicial

✓ a) PVI: $\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$ $Q(o) = Q_o$ (condição inicial)

3. A equação diferencial dará uma descrição aproximada do processo real.
4. O processo neste caso é contínuo.

Etapa 2 – Análise do modelo

1. Neste caso é possível resolver o PVI analiticamente.
 - Eq. Dif. ordinária de 1ª ordem.
 - Resolução pelo método do fator integrante.
 - $Q(t)$ é a função incógnita e $p(t) = r/100$.

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \frac{1}{r/100} e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

- ✓ Calcular o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{r}{100} dt = e^{\frac{rt}{100}}$$

- ✓ Multiplicar a equação pelo fator integrante:

$$e^{\frac{rt}{100}} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{rt}{100}} \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] = \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}}$$

$$\int \frac{d}{dt} [e^{\frac{rt}{100}} Q] dt = \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} dt \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \int e^{\frac{rt}{100}} dt$$

$$e^{\frac{rt}{100}} Q = \frac{r}{4} \frac{1}{r/100} e^{\frac{rt}{100}} + C \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{rt}{100}} Q = 25 e^{\frac{rt}{100}} + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Solução geral da equação diferencial:

✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Solução geral da equação diferencial:

✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Solução geral da equação diferencial:

✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Solução geral da equação diferencial:

✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

✓ Voltando o valor da constante C na expressão de Q :

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 2 – Análise do modelo

✓ Solução geral da equação diferencial:

✓ b) Expressão: $Q = 25 + Ce^{-\frac{rt}{100}}$

✓ Inserindo a condição inicial $Q(o) = Q_o$:

$$Q_o = 25 + C \Rightarrow C = Q_o - 25$$

✓ Voltando o valor da constante C na expressão de Q :

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$Q = 25(1 - e^{-\frac{rt}{100}}) + Q_o e^{-\frac{rt}{100}}$$

*solução particular
do PVI*

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25) e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

- ✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 [lb]$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L :

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 [lb]$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L :

$$r = 3 \text{ gal/min},$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb}, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Quantidade de sal limite Q_L para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = \lim_{t \rightarrow \infty} 25 + \lim_{t \rightarrow \infty} (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q = 25 + (Q_o - 25) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{rt}{100}} = 0$$

✓ c) Quantidade sal: $Q_L = 25 \text{ [lb]}$

- ✓ Valor do tempo T para $Q(t)$ a 2% de Q_L :

$$r = 3 \text{ gal/min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb}, \quad Q = Q_L + 2\%Q_L$$

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$25 + 0,02 \times 25 = 25 + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

$$T = \frac{\ln 0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

$$Q_L + 2\%Q_L = 25 + (50 - 25)e^{-\frac{3T}{100}}$$

$$Q_L + \frac{2}{100}Q_L = 25 + 25e^{-0,03T}$$

$$\cancel{25} + 0,02 \times 25 = \cancel{25} + 25e^{-0,03T} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,03T}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,03T} \Rightarrow \ln 0,02 = -0,03T \ln e$$

$$T = \frac{\ln 0,02}{-0,03} = \frac{-3,91}{-0,03} = 130,4 \Rightarrow T = 130,4 \text{ [min.]}$$

✓ d) tempo: 2% de Q_L

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min.}$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min.}$
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,45r}$$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Fluxo de galões (r) para $t = 45 \text{ min}$.
- ✓ Considerando o nível de sal a 2% de Q_L .

$$Q = Q_L + 2\%Q_L = 1,02Q_L = 25,5 \text{ lb}$$

$$t = 45 \text{ min}, \quad Q_o = 2Q_L = 50 \text{ lb},$$

- ✓ Inserindo valores na solução particular.

$$Q = 25 + (Q_o - 25)e^{-\frac{rt}{100}} \Rightarrow 25,5 = 25 + 25e^{-\frac{r45}{100}}$$

$$1,02 = 1 + 1e^{-0,45r} \Rightarrow 0,02 = e^{-0,45r}$$

$$\ln 0,02 = \ln e^{-0,45r} \Rightarrow r = 8,69 \left[\frac{\text{gal}}{\text{min}} \right]$$

✓ e) Galões p/ $t = 45 \text{ min}$

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

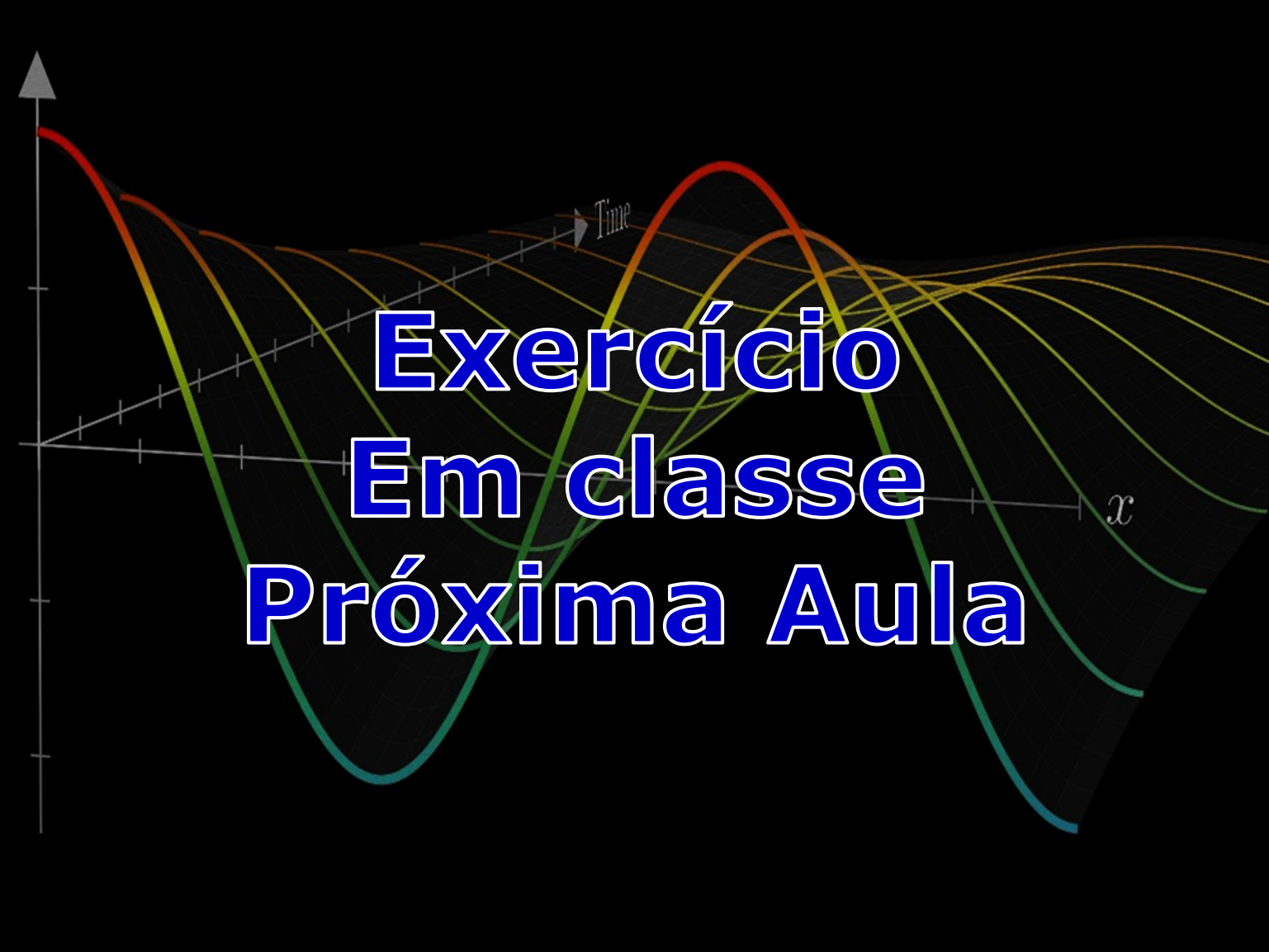
- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.

Etapa 3 – Comparação com experimentos

- ✓ Considerando as taxas de fluxo como enunciadas e a concentração de sal no tanque uniforme.
- ✓ A equação diferencial é uma descrição precisa do processo de fluxo.
- ✓ Modelos desse tipo são também utilizados em problemas envolvendo poluentes em um lago.
- ✓ A variável incógnita (Q) varia no tempo.
- ✓ O parâmetro (r) condição inicial (Q_o) são ajustados de acordo com aplicação a ser modelada.



**Exercício
Em classe
Próxima Aula**

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10^7 gal de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de $5 \cdot 10^6$ de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$ g/gal .

Exercício: Produtos químicos em uma lagoa.

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10^7 gal de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de $5 \cdot 10^6$ de gal/ano e a mistura sai da lagoa à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$ g/gal .

Pede-se

- a) Construa um modelo matemático desse processo de fluxo.
- b) Determine a quantidade $Q(t)$ de produto químico na lagoa em qualquer instante. Sugestão: transforme $q[t] = 10^6 Q[g]$.
- c) Desenhe o gráfico da solução particular.
- d) Descreva o efeito da concentração do produto químico na água da lagoa para $t = 0, t = 1, t = 10$ e $t \rightarrow \infty$.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 2.3 do livro texto (Boyce).
- Resolver o exercício proposto.
- Praticar: exercícios da seções 2.3 do Boyce.

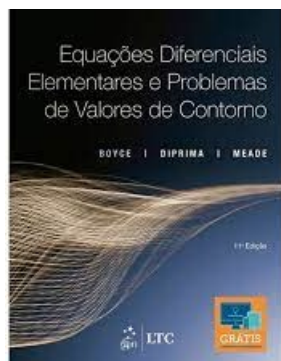
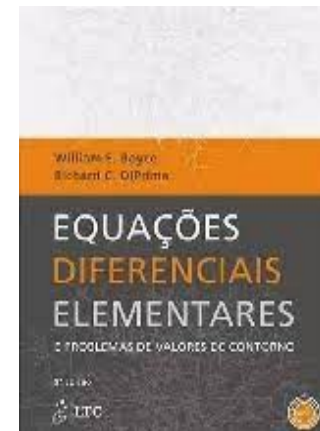
Próxima aula:

- Teoremas de existência e unicidade.
- Equações exatas e fator integrante.

Bibliografia

1. BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **9. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2010.

Numeração dos exercícios
com base na 9ª ed. ►



BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. **11. ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2020.