Cálculo Numérico

Integração numérica

Aula 01

Regra dos trapézios

Henrique Antonio Mendonça Faria

Henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Integral como área.
2. Integração Indefinida.
3. Integração Aproximada.
4. Regra dos Trapézios para aproximação.

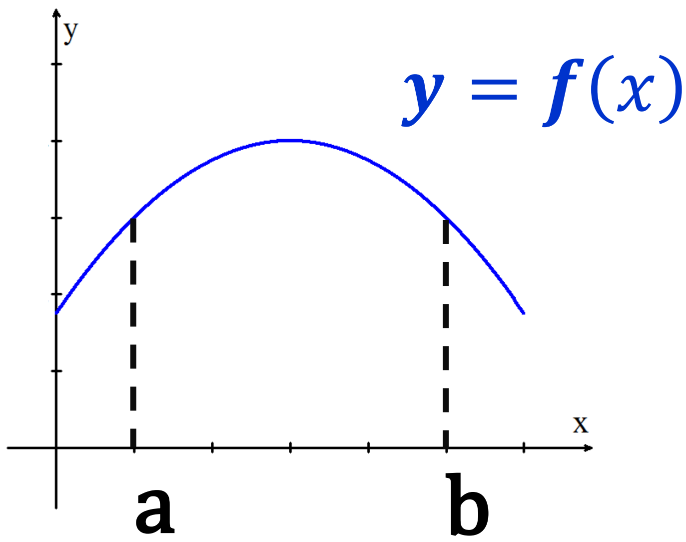
Pré-requisitos

Cálculo I: diferenciação e integração.

1. Integral como área

Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

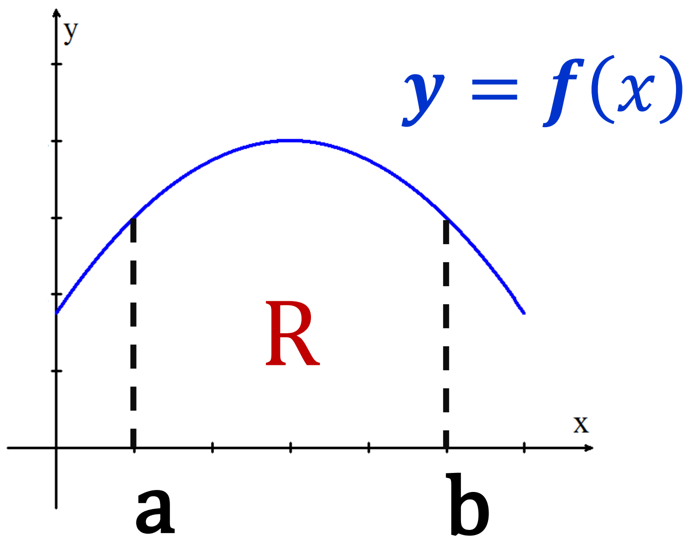


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada como região R.

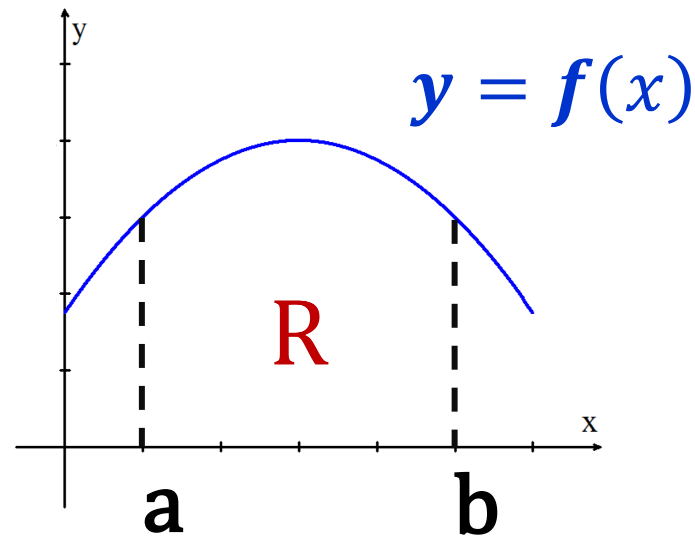


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição de área como limite

- Seja a função $y = f(x) \geq 0$, contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$;

- A região delimitada pelo o eixo x, as retas $x = a$ e $x = b$ e superiormente pela curva de $y = f(x)$ será denotada como região R.



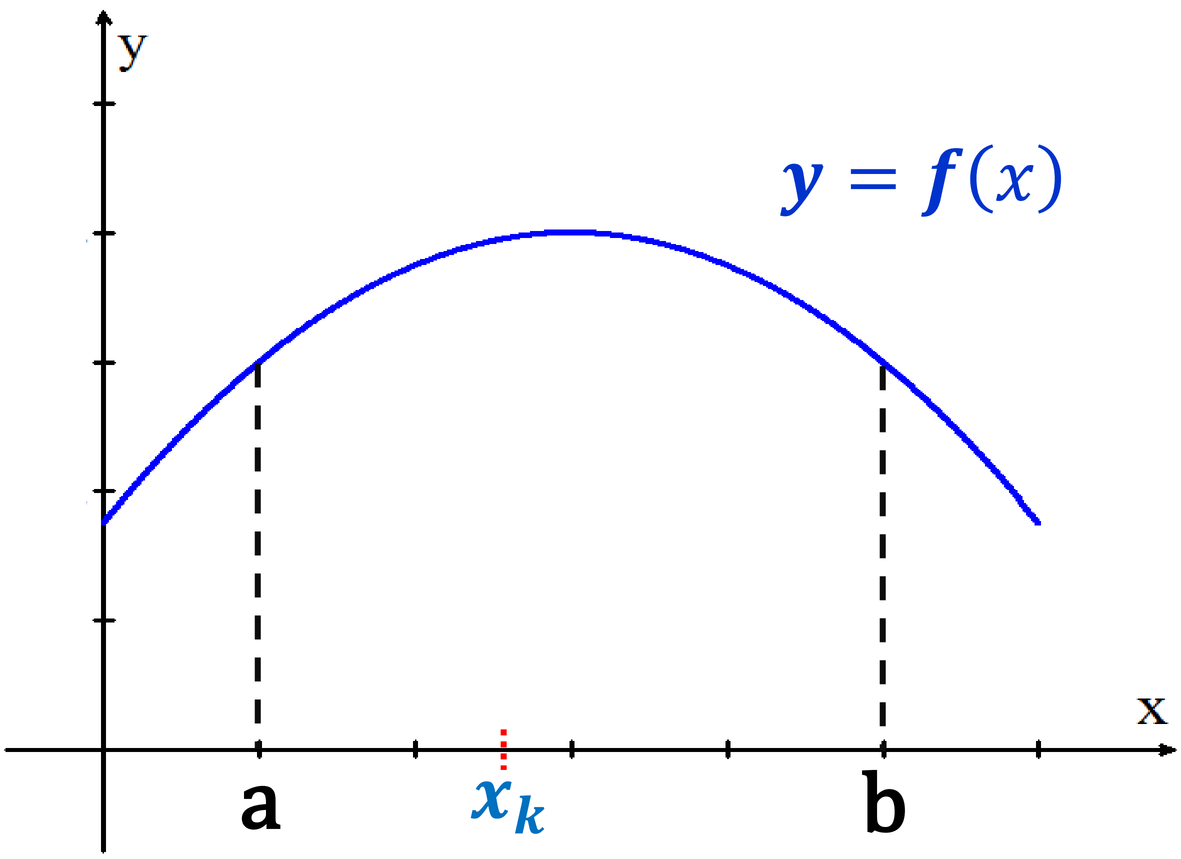
Como podemos calcular a área R?

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Definição de área como limite

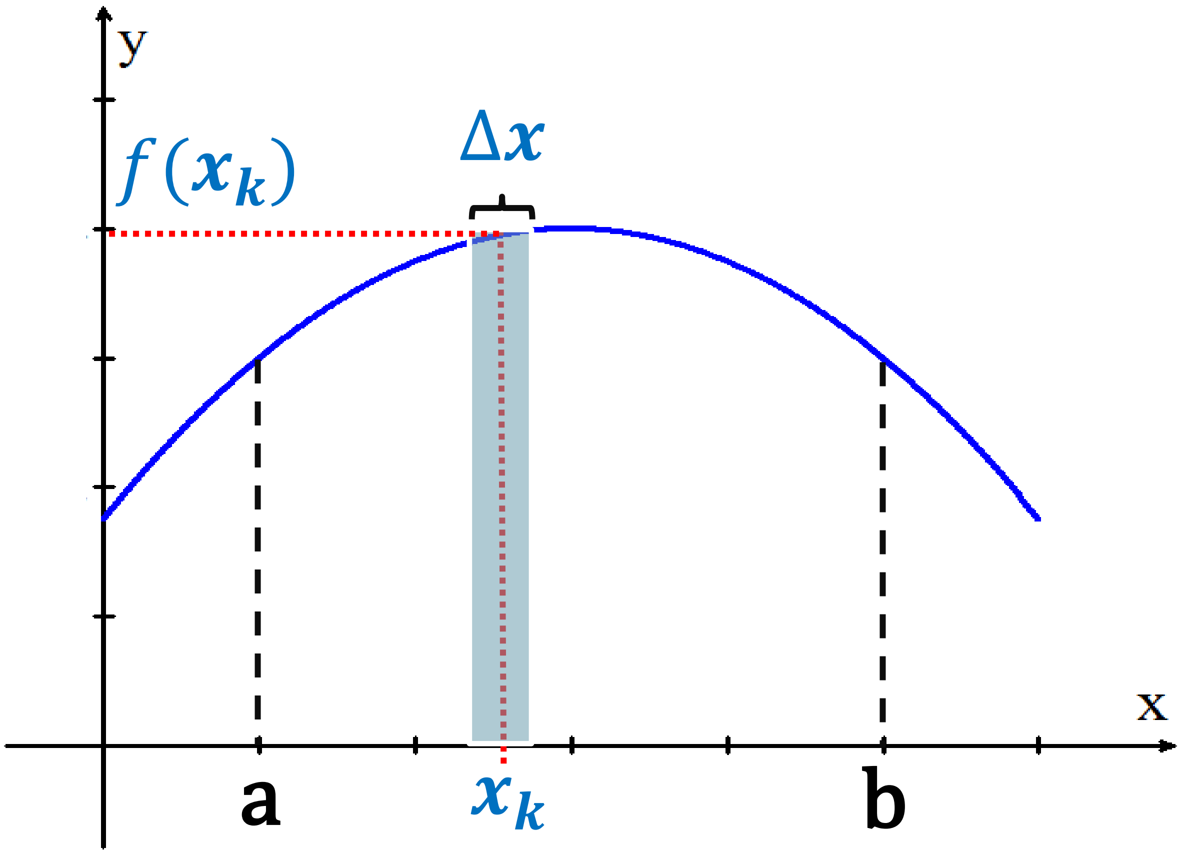
- O intervalo $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ será dividido em $\boldsymbol{n}$ subintervalos, de larguras iguais $\Delta \boldsymbol{x}$.

- $\boldsymbol{x_k}$ é um ponto qualquer do subintervalo.



Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

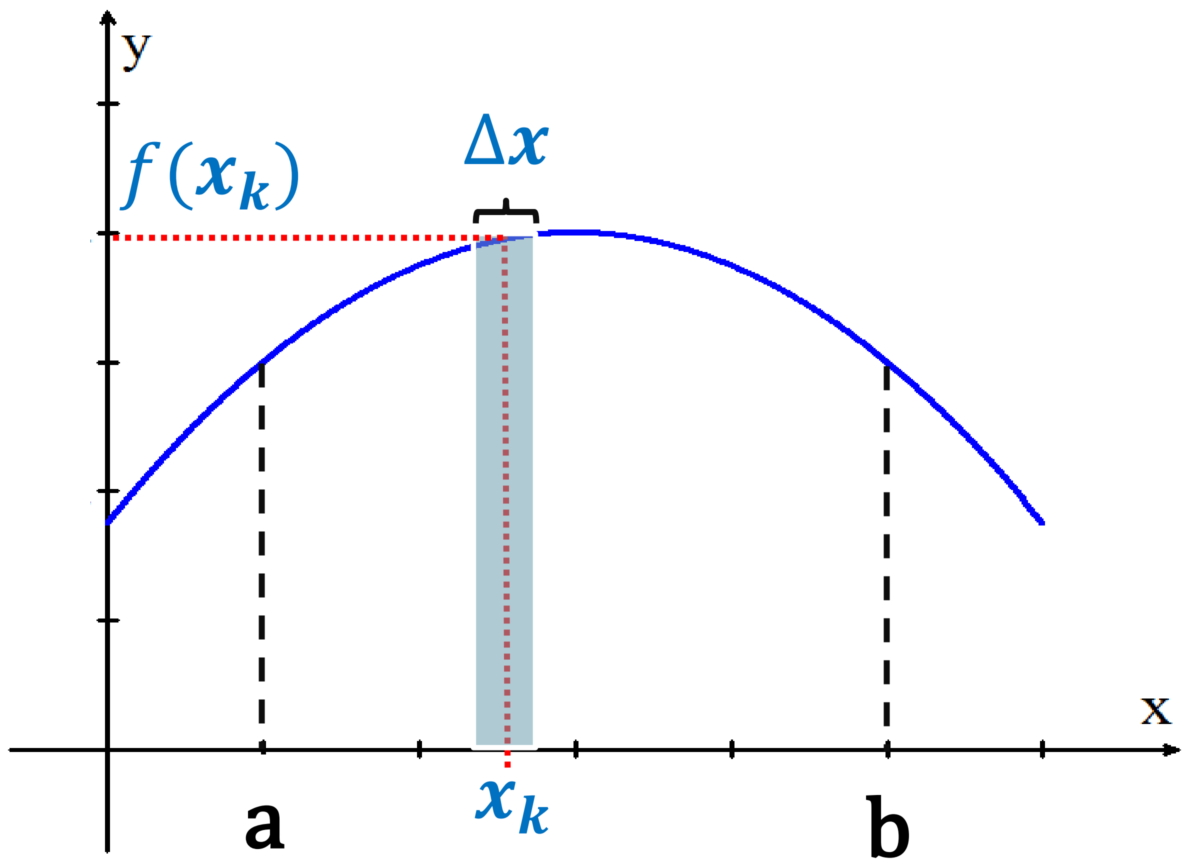


Definição de área como limite

- Em cada um dos subintervalos, constrói-se retângulos de base Δx e altura $f(x_k)$.

- A área de cada retângulo será:

$$A_k = f(x_k)\Delta x$$

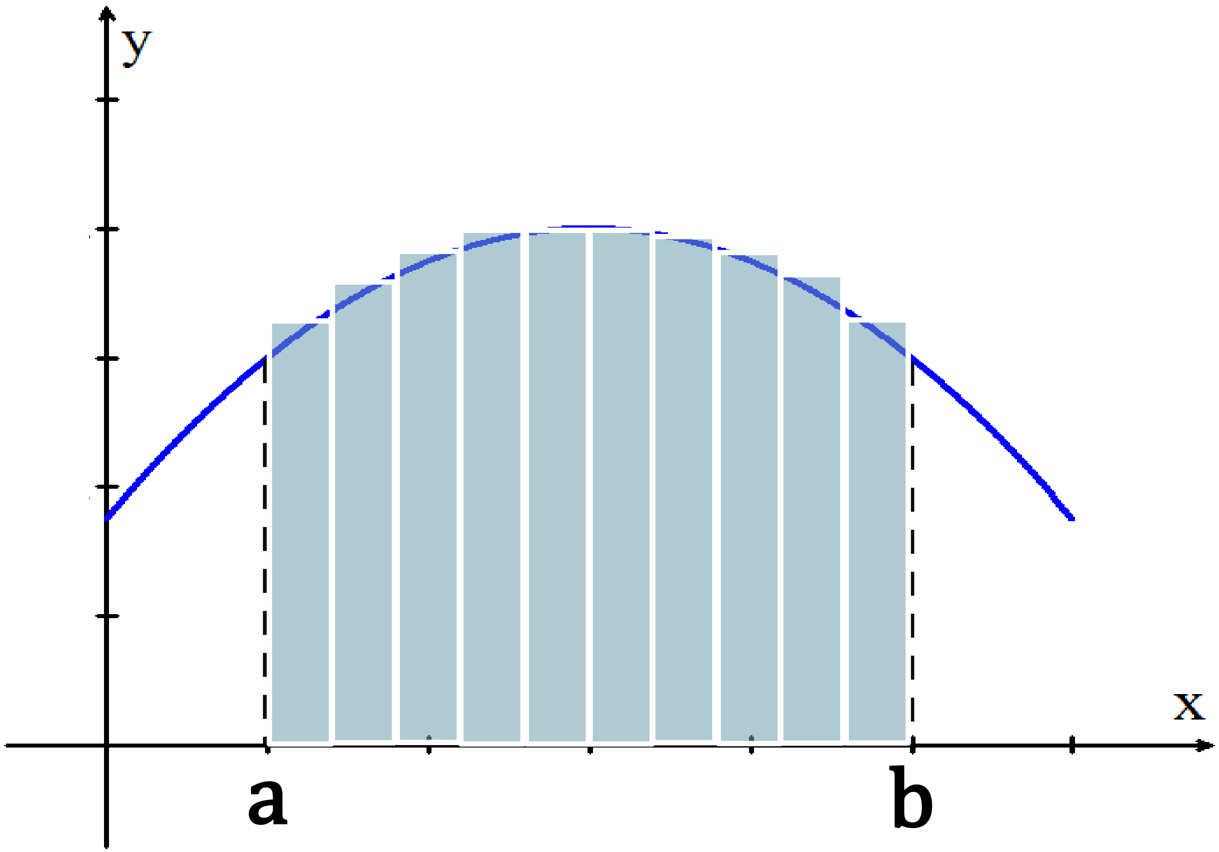


Definição de área como limite

- A soma das áreas dos n retângulos é o somatório:

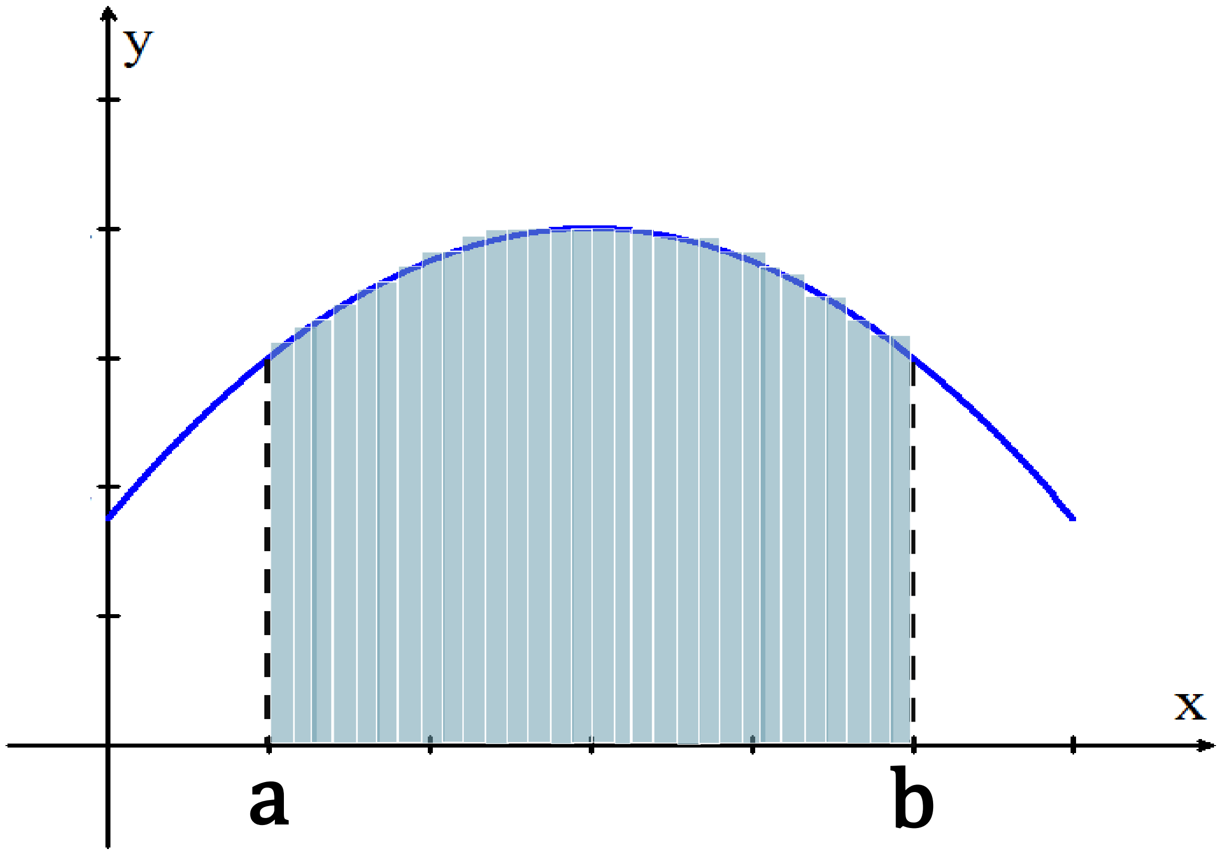
$$A_R \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Chamada de **soma de Riemann**



Definição de área como limite

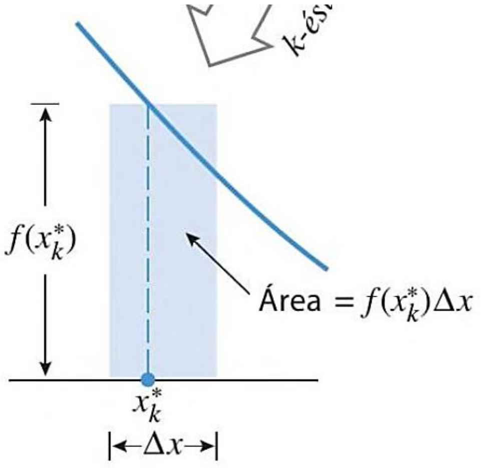
- Quando n cresce para o infinito o somatório dos retângulos tende para a área A embaixo da curva no intervalo $[a, b]$.



Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Inicialmente, definimos a área utilizando uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos;

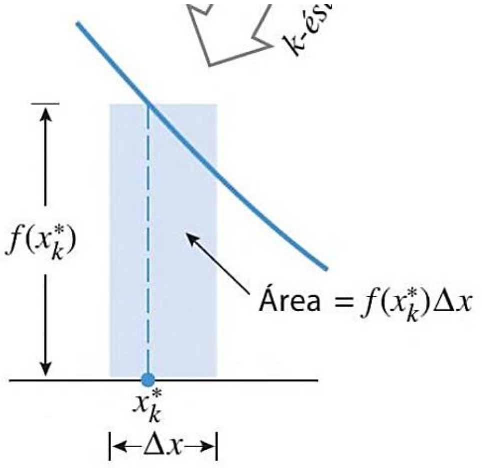


Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Integral definida

- A **integral definida** relaciona o conceitos de área a outros conceitos como: comprimento, volume, densidade, probabilidade e trabalho;

- Inicialmente, definimos a área utilizando uma subdivisão Δx igual para todos os subintervalos;



- Esse tipo de divisão é chamado partição regular.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

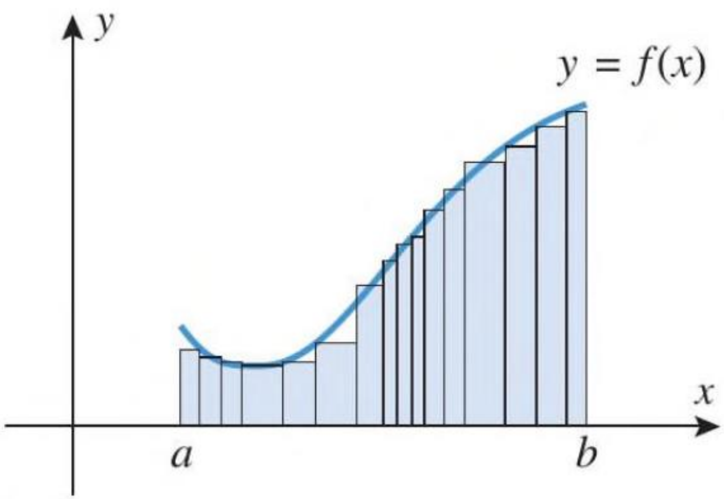
Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;

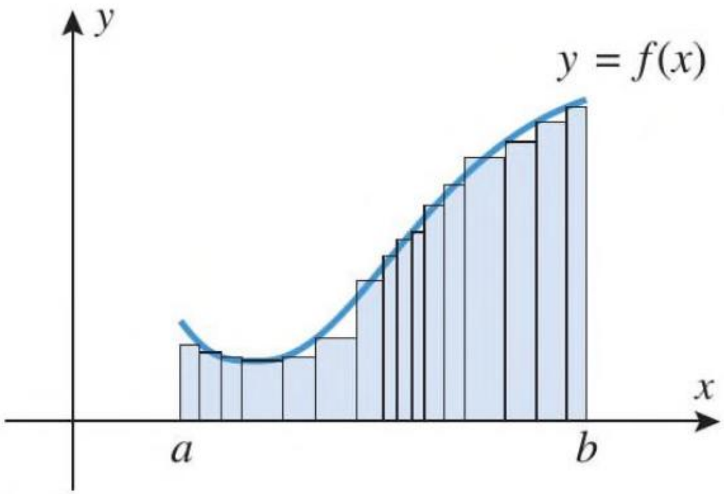


- Podemos generalizar, permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k;

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

Integral definida

- No caso da partição regular, as larguras dos retângulos tendem a zero quando n cresce;



- Podemos generalizar, permitindo que os subintervalos tenham larguras variáveis Δx_k;

- Para isso trocaremos a expressão $n \to \infty$ por $\text{Max}\, \Delta x_k \to 0$, de modo a garantir que as larguras de todos subintervalos tendam a zero.

Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014

A integral definida

Então, a soma de Riemann com n tendendo para o infinito pode ser denotada pelo limite:

$$A = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Que é a definição de uma **Integral de uma função** contínua $y = f(x)$ no intervalo $[a, b]$:

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx = \lim_{Max\Delta x_k \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k}$$

Exemplos, calcular as integrais.

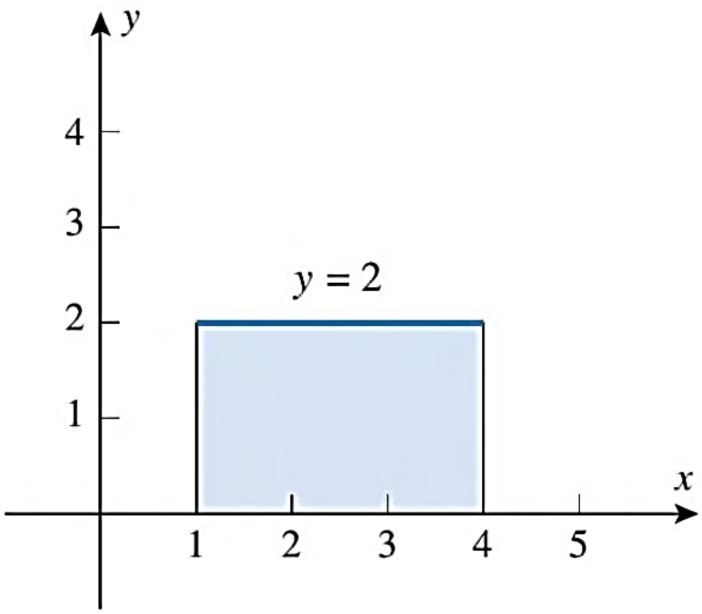
a. $\int_{1}^{4} 2dx$

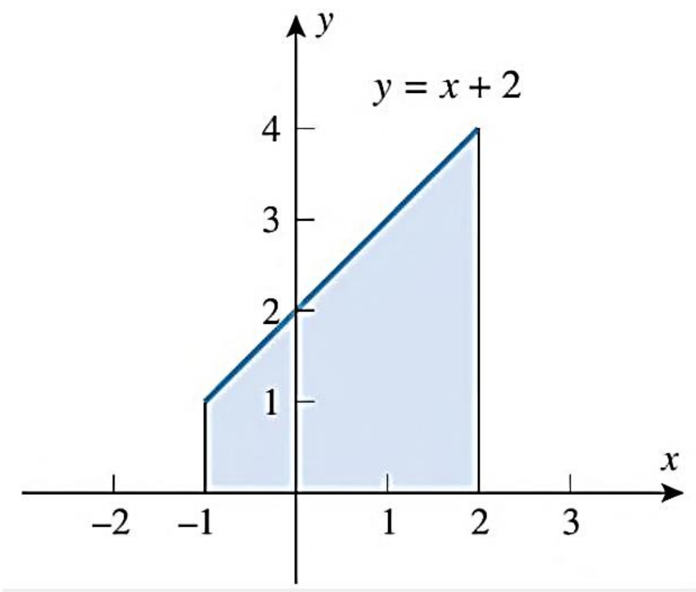
b. $\int_{-1}^{2} (x+2)dx$

Exemplos, calcular as integrais.

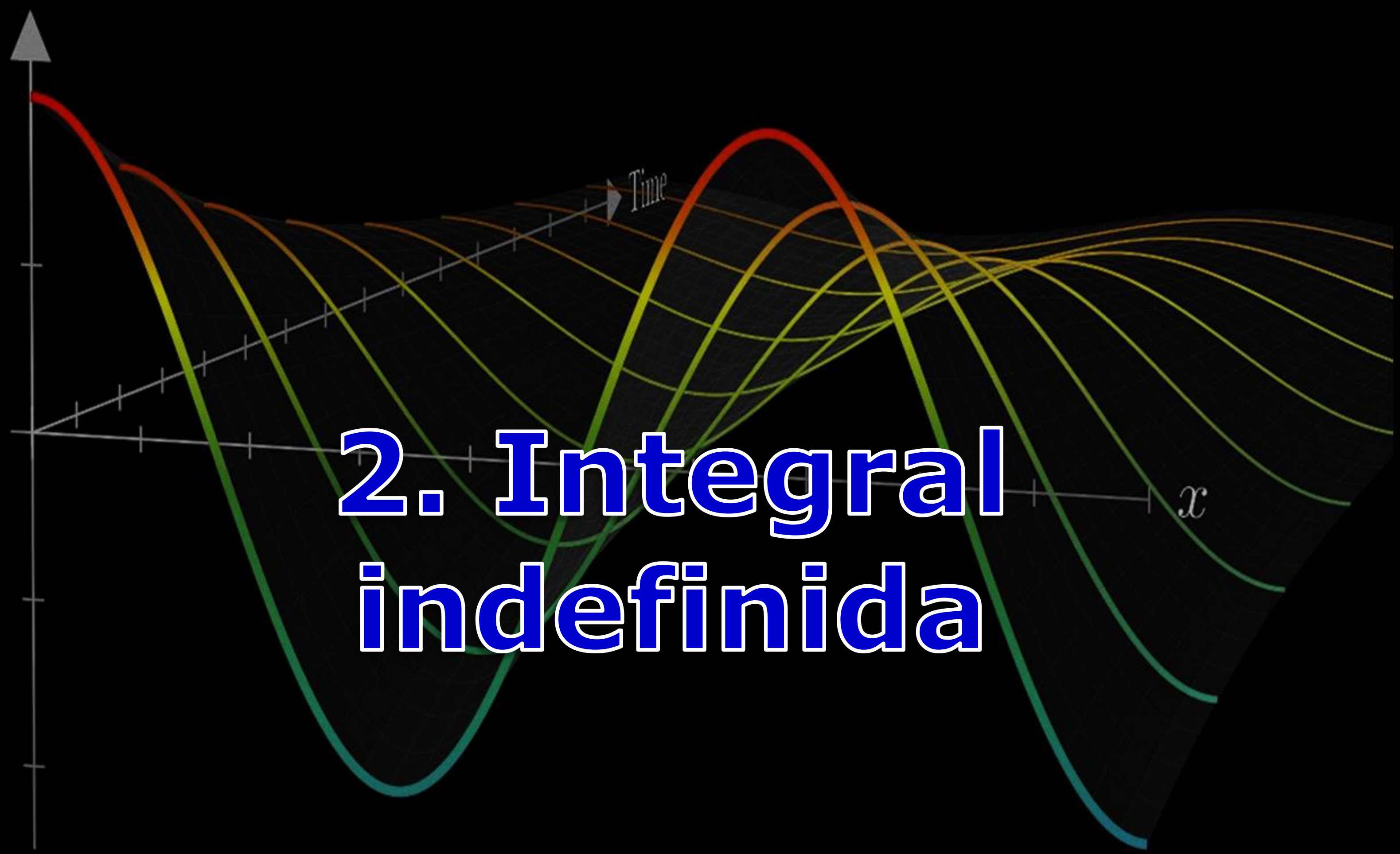
a. $\int_{1}^{4} 2dx$

b. $\int_{-1}^{2} (x+2)dx$





Fonte: Howard Anton 10 ed., 2014



2. Integral indefinida

Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:

Teorema Fundamental do Cálculo

- ✓ Isaac Newton, mostrou que a derivação e a integração são operações inter-relacionadas:
- ✓ Essa relação é conhecida como o **Teorema Fundamental do Cálculo:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;

Teorema Fundamental do Cálculo

- Estabelece a conexão entre o cálculo diferencial e o cálculo integral;
- Relaciona o conceito de derivada com o de integral definida;
- Fornece a relação inversa entre a derivada e a integral;
- O teorema é apresentado em duas partes.

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1)*** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.1 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 1)*** *Se f for contínua em $[a, b]$ e F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{2}$$

Em palavras, essa equação afirma:

A integral definida pode ser calculada encontrando-se uma antiderivada do integrando e, então, subtraindo-se o valor dessa antiderivada no extremo inferior de integração de seu valor no extremo superior de integração.

Teorema Fundamental do Cálculo

ANTIDERIVADAS

5.2.1 DEFINIÇÃO Dizemos que uma função F é uma ***antiderivada*** de uma função f em um dado intervalo aberto se $F'(x) = f(x)$ em cada x do intervalo.

Teorema Fundamental do Cálculo

5.6.3 TEOREMA ***(Teorema Fundamental do Cálculo, Parte 2)*** *Se f for contínua em um intervalo, então f terá uma antiderivada nesse intervalo. Em particular, se a for um ponto qualquer desse intervalo, então a função F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é uma antiderivada de f nesse intervalo; isto é, $F'(x) = f(x)$ para cada x desse intervalo, ou em uma notação alternativa

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x) \tag{11}$$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
1. $\dfrac{d}{dx}[x] = 1$	$\displaystyle\int dx = x + C$
2. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x^{r+1}}{r+1}\right] = x^r \quad (r \neq -1)$	$\displaystyle\int x^r\,dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad (r \neq -1)$
3. $\dfrac{d}{dx}[\text{sen } x] = \cos x$	$\displaystyle\int \cos x\,dx = \text{sen } x + C$
4. $\dfrac{d}{dx}[-\cos x] = \text{sen } x$	$\displaystyle\int \text{sen } x\,dx = -\cos x + C$
5. $\dfrac{d}{dx}[\text{tg } x] = \sec^2 x$	$\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \text{tg } x + C$
6. $\dfrac{d}{dx}[-\text{cotg } x] = \text{cossec}^2 x$	$\displaystyle\int \text{cossec}^2 x\,dx = -\text{cotg } x + C$
7. $\dfrac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \text{ tg } x$	$\displaystyle\int \sec x \text{ tg } x\,dx = \sec x + C$

Integral indefinida

FÓRMULA DE DIFERENCIAÇÃO	FÓRMULA DE INTEGRAÇÃO
8. $\frac{d}{dx}[-\text{cossec}\, x] = \text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x$	$\int \text{cossec}\, x \,\text{cotg}\, x \, dx = -\text{cossec}\, x + C$
9. $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
10. $\frac{d}{dx}\left[\frac{b^x}{\ln b}\right] = b^x \quad (0 < b,\ b \neq 1)$	$\int b^x \, dx = \frac{b^x}{\ln b} + C \quad (0 < b,\ b \neq 1)$
11. $\frac{d}{dx}[\ln \lvert x \rvert] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$
12. $\frac{d}{dx}[\text{arc tg}\, x] = \frac{1}{1 + x^2}$	$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \text{arc tg}\, x + C$
13. $\frac{d}{dx}[\text{arc sen}\, x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \text{arc sen}\, x + C$
14. $\frac{d}{dx}[\text{arc sec}\, \lvert x \rvert] = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = \text{arc sec}\, \lvert x \rvert + C$

Síntese dos conceitos

Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x) \geq 0$, a área entre a curva de $\boldsymbol{f}(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{dx}$$

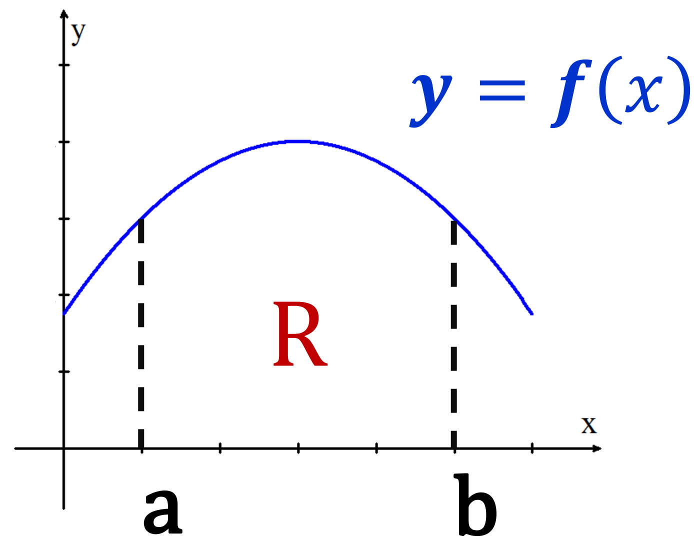
Integral definida - processo geométrico

Dada uma função $y = f(x) \geq 0$, a área entre a curva de $f(x)$, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$, é chamada de integral definida de f, denotada por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

Integral definida

(*Número real*)



ÁreaR= $\int_a^b f(x)dx$

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$, tal que $\boldsymbol{F}'(x) = f(x)$.

Integral Indefinida - processo algébrico

- Nesse caso, o interesse é o de determinar uma função primitiva $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(x)$, tal que $\boldsymbol{F}'(x) = f(x)$.

- Essa função primitiva (ou antiderivada) é chamada integral indefinida e denotada por:

$$\boxed{\int \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}}$$

Integral Indefinida (*família de funções*)

Integração Aproximada

Integração aproximada

- Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

Integração aproximada

- Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

1. Algumas funções podem não possuir primitiva ou ser de difícil determinação, por exemplo:

$$\int_{0}^{1} e^{x^2}\,dx \qquad\qquad \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx$$

Integração aproximada

- Existem duas situações em que não é possível determinar o valor exato da integral definida.

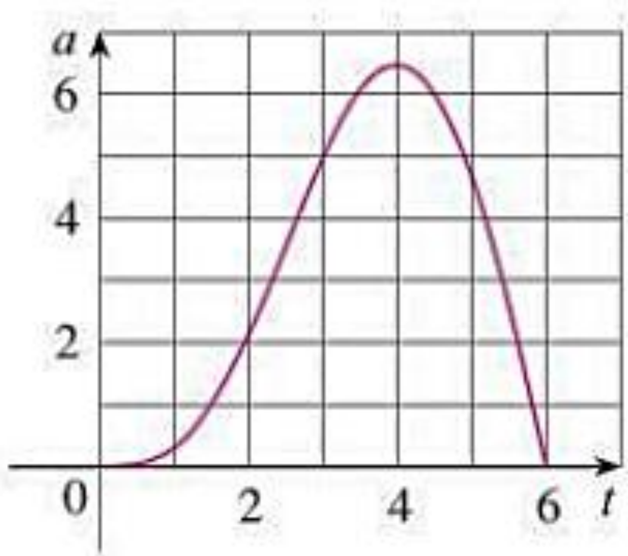
1. Algumas funções podem não possuir primitiva ou ser de difícil determinação, por exemplo:

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

2. Quando um conjunto de dados experimentais representam um relação funcional, mas não é possível determiná-la explicitamente.

Integração aproximada

- Exemplos de função como curva e tabela:



t (s)	v (m/s)
0	0
0,5	4,67
1,0	7,34
1,5	8,86
2,0	9,73
2,5	10,22

- Em ambos os casos será necessário calcular a integral definida de forma aproximada.

Regra dos Trapézios

Regra dos trapézios

- A interpretação da integral como área sob uma curva nos forneceu um método de aproximação.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f({x_i}^*)\Delta x$$

Regra dos trapézios

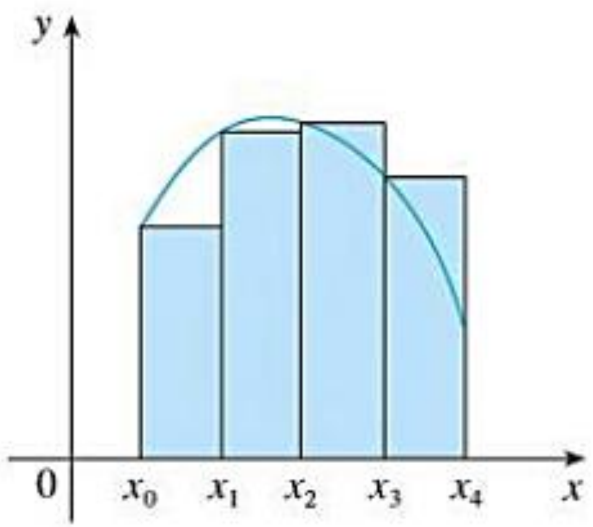
- A interpretação da integral como área sob uma curva nos forneceu um método de aproximação.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$$

- Para aproximar a área abaixo da curva na integral definida utilizamos o ponto médio do retângulo aproximador.
- No entanto, essa escolha não é única.

Regra dos trapézios

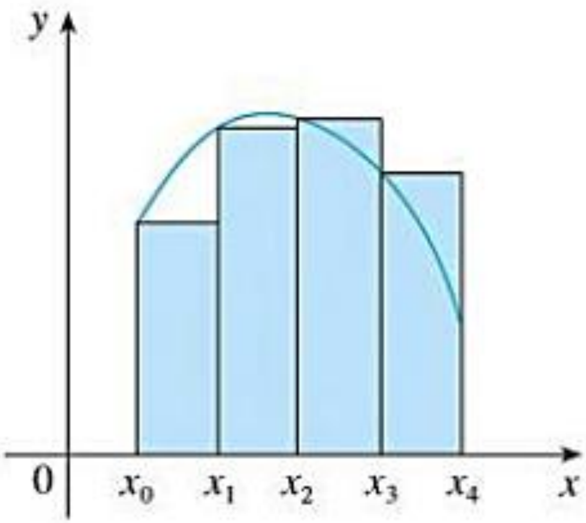
- Se $x_i{}^*$ é o extremo esquerdo.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

Regra dos trapézios

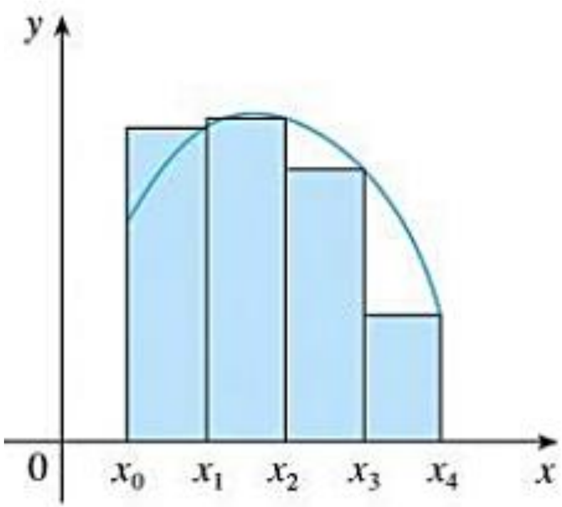
- Se $x_i{}^*$ é o extremo esquerdo.



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

- Se $x_i{}^*$ é o extremo direito.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$



Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right]$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right]$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\right]$$

Regra dos trapézios

- A regra dos trapézios resulta da média das aproximações pela direita e pela esquerda.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\Big[\big(f(x_0) + f(x_1)\big) + \big(f(x_1) + f(x_2)\big) + \cdots + \big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)\Big]$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Regra dos trapézios

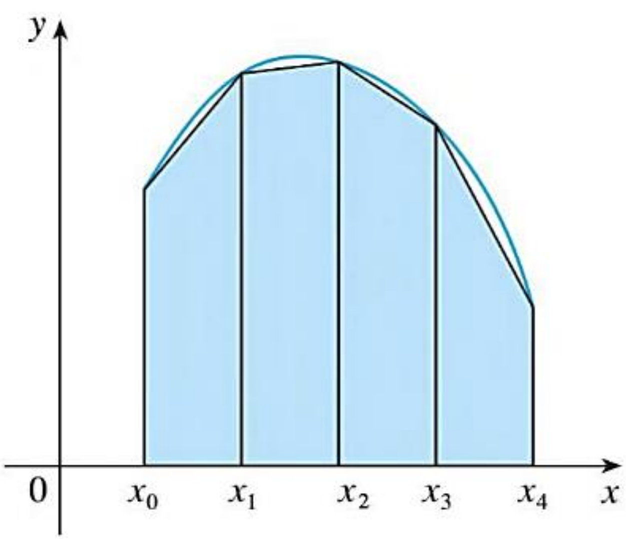
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b - a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x$.

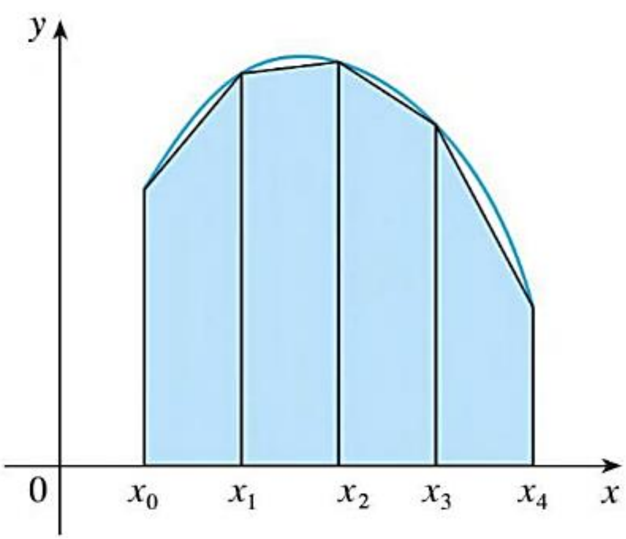


$$A_{Trap} = \Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)$$

Regra dos trapézios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

onde $\Delta x = (b-a)/n$ e $x_i = a + i\,\Delta x.$



$$A_{Trap} = \Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5, a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}\left[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)\right]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Cálculo exato

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5$, $a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

Cálculo exato

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147\ldots$$

Exemplo 1 Aproximar a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ pela regra dos trapézios com $n = 5$.

Com $n = 5, a = 1$ e $b = 2$, temos $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0{,}2$ resulta em

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 = \frac{0{,}2}{2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)]$$

$$= 0{,}1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1{,}2} + \frac{2}{1{,}4} + \frac{2}{1{,}6} + \frac{2}{1{,}8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0{,}695635$$

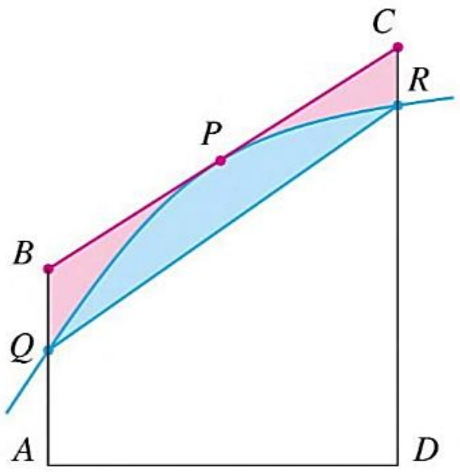
Cálculo exato

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0{,}693147\ldots$$

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad E_T \approx -0{,}002488$$

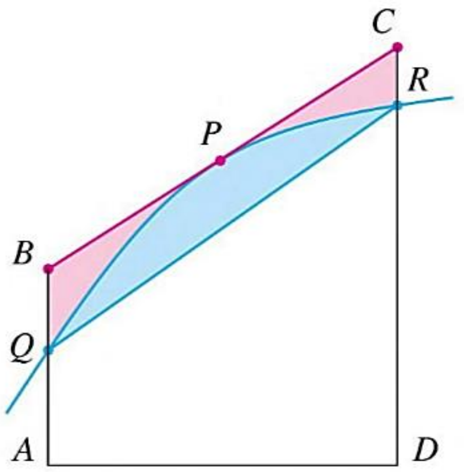
Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



Erro na regra dos trapézios

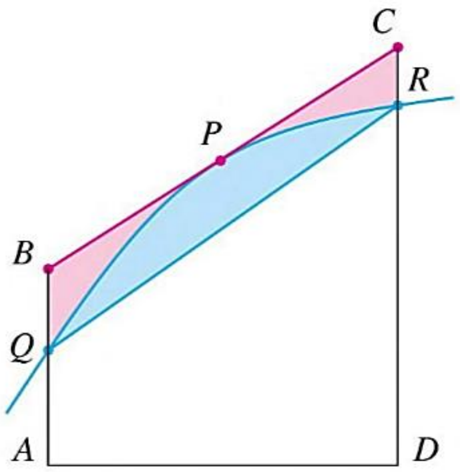
- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.

Erro na regra dos trapézios

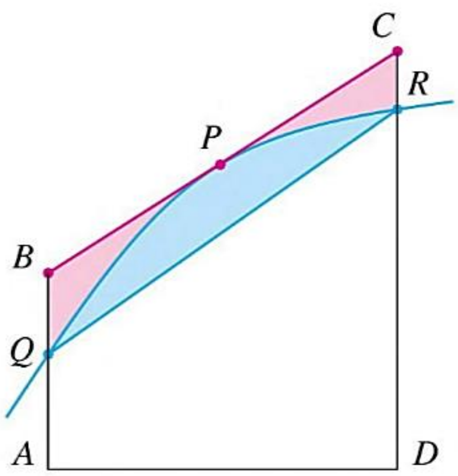
- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



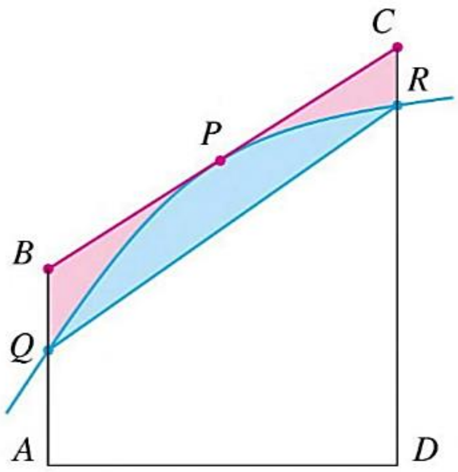
- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.

- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Erro na regra dos trapézios

- A área sombreada em azul é o erro do trapézio AQRD.



- A derivada segunda $f''(x)$ mede quão rápido a inclinação de $f(x)$ muda.
- Supondo um número K maior que todos os valores de $|f''(x)|$:

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Estimativa de erro para a regra do trapézio

Dedução: Franco (2006, p.341)

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

Exemplo 2 Estimar o erro na aproximação pela Regra dos Trapézios na integral do exemplo 1.

Se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$ e $f''(x) = 2/x^3$.

Uma vez que $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos $1/x \leqslant 1$, logo

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leqslant \frac{2}{1^3} = 2$$

Portanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$ e $n = 5$

$$|E_T| \leqslant \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0{,}006667$$

Erro real = 0,002488

A fórmula da estimativa superestima o erro!

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de $0{,}0001$.

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de $0{,}0001$.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $\quad |E_T| \leqslant \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $\qquad |E_T| \leqslant \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro

deve ser menor que 0,0001. Portanto,

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $\qquad |E_T| \leqslant \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro

deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001 \qquad n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $\quad |E_T| \leqslant \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro

deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001 \qquad n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

Exemplo 3 Calcular n para que o erro na regra dos trapézios para a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ tenha precisão de 0,0001.

Vimos no cálculo anterior que $|f''(x)| \leqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$;

tomar $K = 2$, $a = 1$ e $b = 2$ $\quad |E_T| \leqslant \dfrac{K(b-a)^3}{12n^2}$

A precisão de 0,0001 significa que o tamanho do erro

deve ser menor que 0,0001. Portanto,

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0{,}0001 \qquad n^2 > \frac{2}{12(0{,}0001)}$$

$$n > \frac{1}{\sqrt{0{,}0006}} \approx 40{,}8$$

Então, $n = 41$ irá garantira a precisão de 0,0001.

Para depois desta aula:

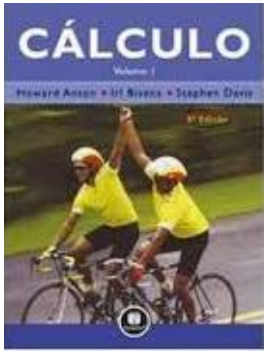
- Estudar seções 7.7 do livro texto (Stewart).
- Resolver os exemplos dados em aula.
- Praticar: exercícios da seções 7.7 do Stewart.

Próxima aula:

- Regra de Simpson para aproximação.

Bibliografia

1. ANTON, Howard; BIVENS, Irl C.; DAVIS, Stephen L. Cálculo - volume 1. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.



2. STEWART, James Cálculo - volume 1. 7 ed. São Paulo: Cencage, 2013.

3. FRANCO, Neide Bertold, Cálculo Numérico. São Paulo: Pearson, 2006.