

Cálculo diferencial e integral

Sequências e séries infinitas

Aula 09

Transformada de Fourier

Henrique Antonio Mendonça Faria

henrique.faria@unesp.br

Tópicos desta aula

1. Introdução
2. Forma exponencial das Séries de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Exemplo
5. Propriedades da Transformada de Fourier

Pré-requisitos

- Integração de funções.



1 - Introdução

1 - Introdução

- Desenvolvemos a série de Fourier para representação de funções.
- Essa série aproxima a função por uma soma de termos envolvendo seno e cosseno.
- Para aplicá-la a função precisa ser periódica.

1 - Introdução

- Desenvolvemos a **série de Fourier** para representação de funções.
- Essa série aproxima a função por uma **soma de termos** envolvendo **seno e cosseno**.
- Para aplicá-la a **função precisa ser periódica**.
- No entanto, em muitas situações aparecem **funções que não são periódicas**.
- Para representar essas funções aperiódicas por uma soma de seno e cosseno usaremos a **Transformada de Fourier**.



2 - Forma exponencial das Séries de Fourier

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- A Série de Fourier de uma função, em termos das funções seno e cosseno, na variável t fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt dt$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Utilizando as relações de Euler, as funções trigonométricas podem ter representações em termos de exponenciais complexas:

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$

$$\text{sen } nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Utilizando as relações de Euler, as funções trigonométricas podem ter representações em termos de exponenciais complexas:

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{sen } nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

- Substituindo-se essas relações a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right)$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Utilizando as relações de Euler, as funções trigonométricas podem ter representações em termos de exponenciais complexas:

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{sen } nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

- Substituindo-se essas relações a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n \frac{1}{i} (e^{int} - e^{-int})$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Utilizando as relações de Euler, as funções trigonométricas podem ter representações em termos de exponenciais complexas:

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad \text{sen } nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

- Substituindo-se essas relações a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n \left(\frac{1}{i} \right) (e^{int} - e^{-int})$$

$\frac{1}{i} = -i$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Então, a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n (-ie^{int} + ie^{-int})$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Então, a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n (-ie^{int} + ie^{-int})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{int} + (a_n + ib_n) e^{-int}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Então, a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n (-ie^{int} + ie^{-int})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{int} + (a_n + ib_n) e^{-int}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{int} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-int}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Então, a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n (-ie^{int} + ie^{-int})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{int} + (a_n + ib_n) e^{-int}$$

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{= C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{= C_n} e^{int} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{= C_{-n}} e^{-int}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Então, a série fica:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{int} + e^{-int}) + b_n (-ie^{int} + ie^{-int})$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{int} + (a_n + ib_n) e^{-int}$$

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{= C_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{= C_n} e^{int} + \underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{= C_{-n}} e^{-int}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}$$

- Os coeficientes podem ser representados por um único C_n , considerando n inteiro:

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}$$

- Os coeficientes podem ser representados por um único C_n , considerando n inteiro:

$$C_n = \begin{cases} 1/2 (a_n - ib_n) & n > 0 \\ 1/2 (a_n + ib_n) & n < 0 \\ 1/2 a_0 & n = 0 \end{cases}$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{int} + C_{-n} e^{-int}$$

- Os coeficientes podem ser representados por um único C_n , considerando n inteiro:

$$C_n = \begin{cases} 1/2 (a_n - ib_n) & n > 0 \\ 1/2 (a_n + ib_n) & n < 0 \\ 1/2 a_0 & n = 0 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$$

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

➤ Para um intervalo L mais geral tem-se:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi t}{L}} \quad C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt$$

2- Forma exponencial das Séries de Fourier

- Para um intervalo L mais geral tem-se:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{n\pi t}{L}} \quad C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\frac{n\pi t}{L}} dt$$

- Substituindo $L = T/2$ onde T é o período:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n t}{T}}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt$$

$$-T/2 < t < T/2$$



3 - Transformada de Fourier

3 - Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier é uma extensão da série de Fourier.
- Essa transformada é utilizada quando o período da função é estendido, aproximando-se do infinito.
- Uma das principais aplicações é decompor uma função no domínio do tempo (sinal) em uma função no domínio da frequência.

3 - Transformada de Fourier

- A Transformada de Fourier é uma extensão da série de Fourier.
- Essa transformada é utilizada quando o período da função é estendido, aproximando-se do infinito.
- Uma das principais aplicações é decompor uma função no domínio do tempo (sinal) em uma função no domínio da frequência.
- Para muitas funções define-se a operação inversa, ou seja a Transformada de Fourier inversa.
- Aplicações na Química: espectrômetro de massas; Infravermelho; Mecânica Quântica.

3 - Transformada de Fourier

➤ Seja a série de Fourier na forma exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

3 - Transformada de Fourier

- Seja a série de Fourier na forma exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi nt}{T}} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi nt}{T}} dt$$

- Sabendo que a frequência angular $\omega = 2\pi/T$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega nt}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega nt} dt$$

3 - Transformada de Fourier

- Seja a série de Fourier na forma exponencial.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n t}{T}} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{T}} dt$$

- Sabendo que a frequência angular $\omega = 2\pi/T$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega n t}$$

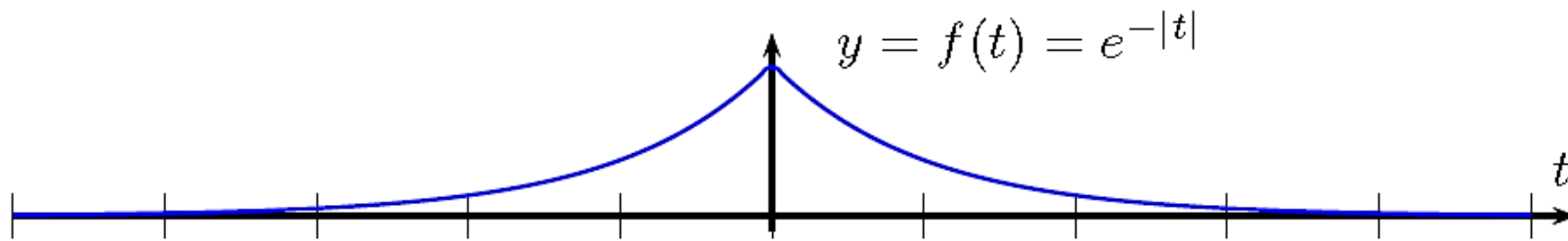
$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega n t} dt$$

- A partir do próximo exemplo será identificada a Transformada de Fourier.

3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

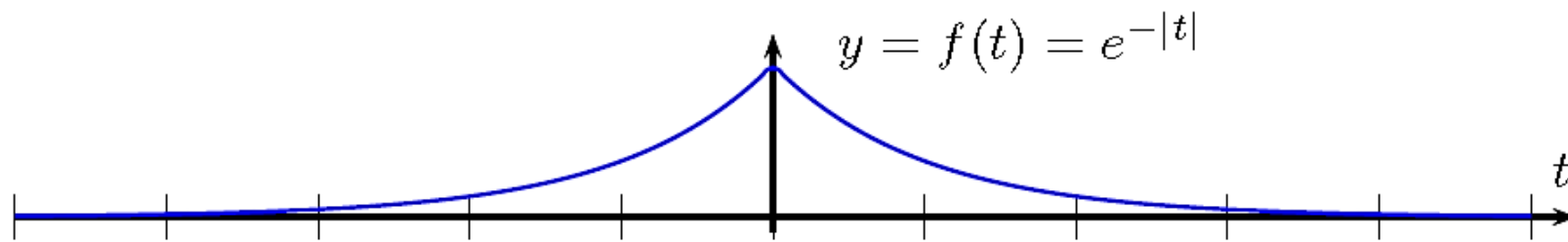
- O gráfico desta função é representado por:



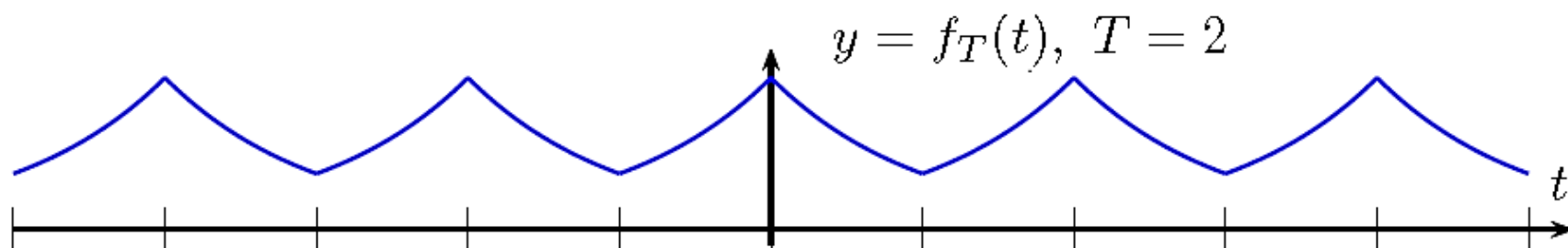
3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O gráfico desta função é representado por:



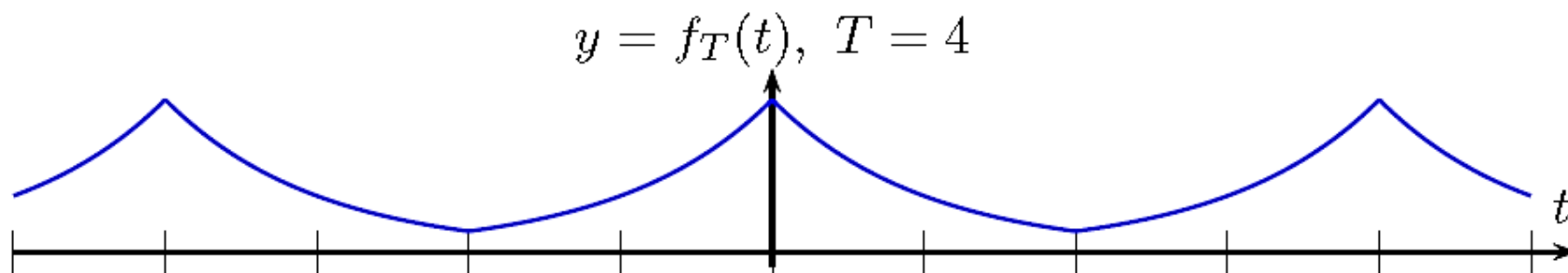
- A série de Fourier para $T = 2$ tem como representante a função f_T :



3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

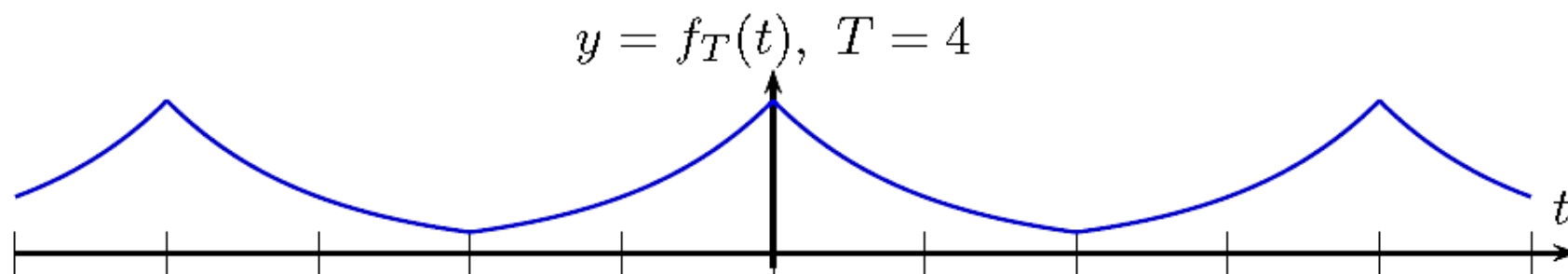
- Para $T = 4$ a série da função f_T tem o gráfico:



3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- Para $T = 4$ a série da função f_T tem o gráfico:



- A função f_T carrega informação sobre a $f(t)$.
- A medida em que $T \rightarrow \infty$ a aproximação tende para $f(t)$.
- Como $\omega = 2\pi/T$, quando T cresce, ω diminui.

3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O coeficiente da série de Fourier desta função é calculado pela expressão:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-|t|} e^{-i\omega n t} dt$$

3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O coeficiente da série de Fourier desta função é calculado pela expressão:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-|t|} e^{-i\omega n t} dt$$

- O cálculo desta integral resulta na expressão:

$$C_n = \frac{2}{T} \frac{1 - (-1)^n e^{-\frac{T}{2}}}{(\omega n)^2 + 1}$$

3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O coeficiente da série de Fourier desta função é calculado pela expressão:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-|t|} e^{-i\omega n t} dt$$

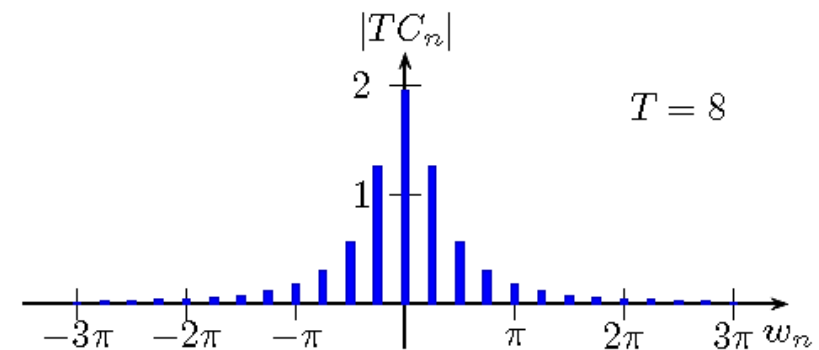
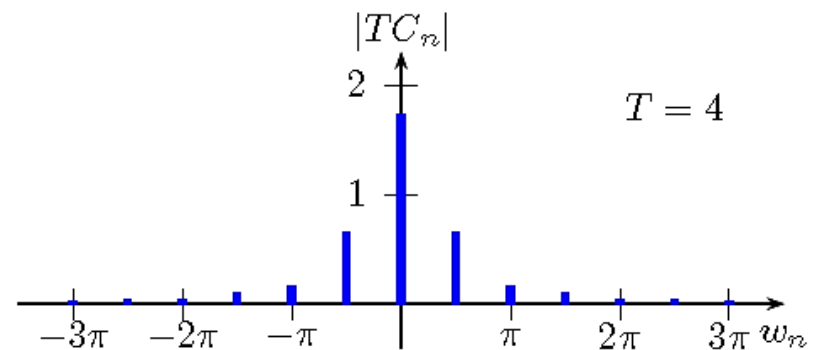
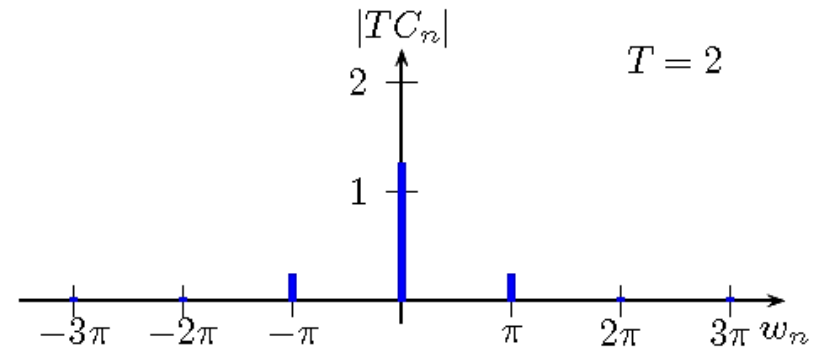
- O cálculo desta integral resulta na expressão:

$$C_n = \frac{2}{T} \frac{1 - (-1)^n e^{-\frac{T}{2}}}{(\omega n)^2 + 1}$$

A frequência ωn é chamada **frequência fundamental** e pode ser escrita como ω_n .

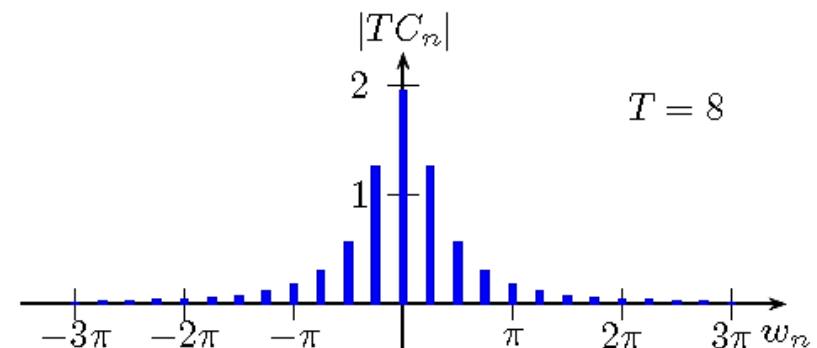
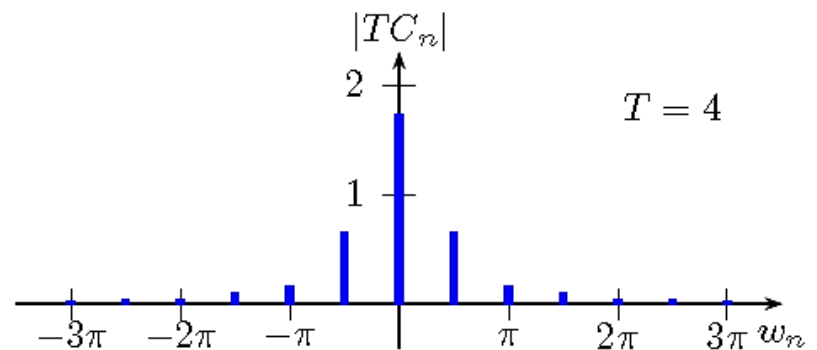
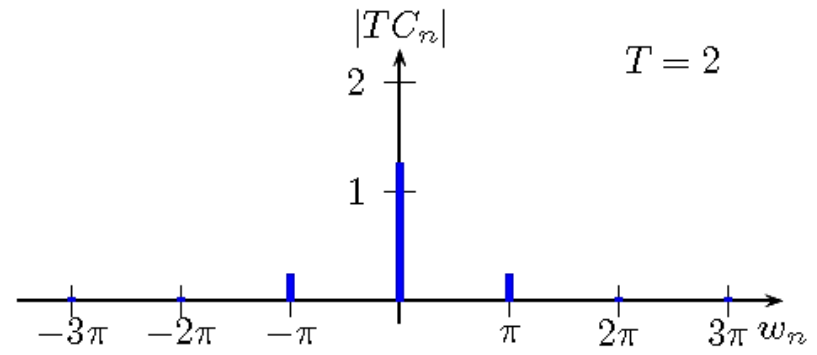
Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O gráfico dos valores do coeficiente C_n em função da frequência fundamental ω_n é chamado de **diagrama de espectro** da série de Fourier.



Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- O gráfico dos valores do coeficiente C_n em função da frequência fundamental ω_n é chamado de **diagrama de espectro** da série de Fourier.
- A medida em que T aumenta, os valores máximos de TC_n são pontos cada vez mais próximos da curva original.



3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- A série de Fourier da função $f(t) = e^{-|t|}$ fica escrita como uma função $F(\omega)$ dos coeficientes $C_n(\omega_n)$.

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

3 - Transformada de Fourier

Exemplo 1: estudar a série de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$

- A série de Fourier da função $f(t) = e^{-|t|}$ fica escrita como uma função $F(\omega)$ dos coeficientes $C_n(\omega_n)$.

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$

- Quando $T \rightarrow \infty$ o somatório se torna uma integral:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(\omega) e^{-i\omega t} dt$$

3 - Transformada de Fourier

- A expressão da Transformada de Fourier é então:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

3 - Transformada de Fourier

- A expressão da Transformada de Fourier é então:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

- A transformada inversa converte uma função no domínio da frequência para o domínio do tempo:

$$F(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

Quadro resumo de Fourier

Função
periódica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i\omega_n t}$$

Série de
Fourier

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Função não
periódica

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Transformada
de Fourier
(par t e ω)

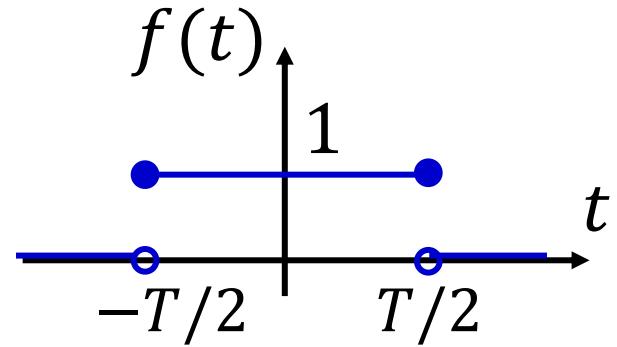
$$F(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



Exemplo

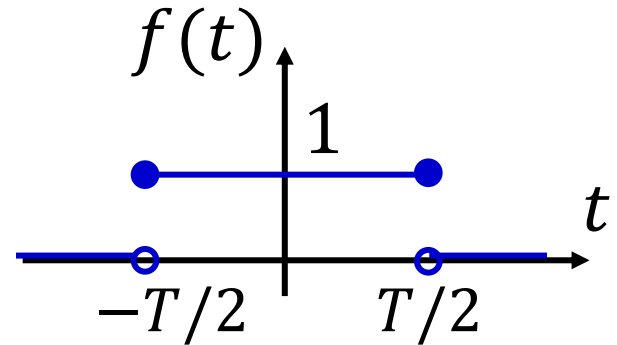
Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$

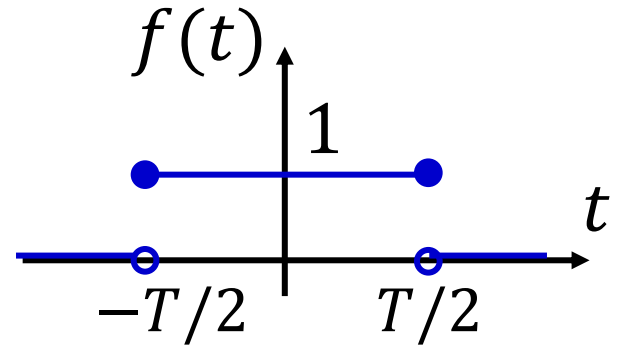


- Cálculo da Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



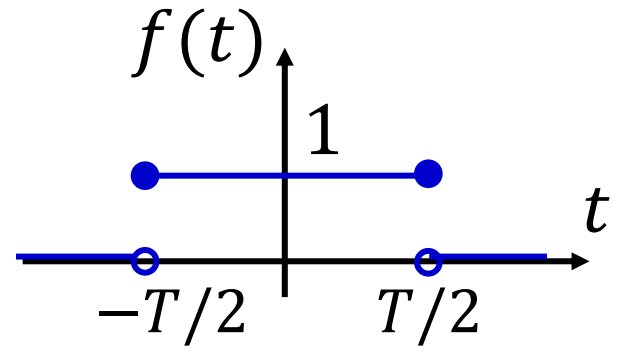
- Cálculo da Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{T/2}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



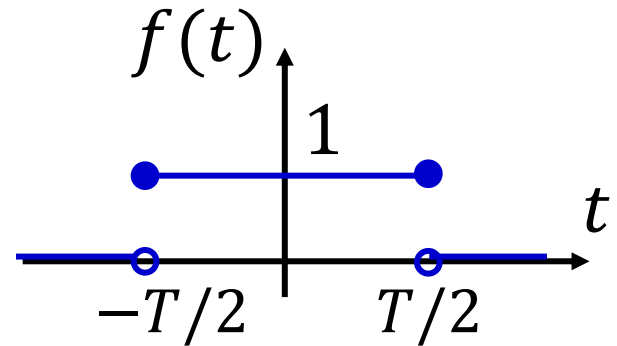
- Cálculo da Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{=} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 1}{=} dt + \int_{T/2}^{\infty} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{=} dt$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



- Cálculo da Transformada de Fourier:

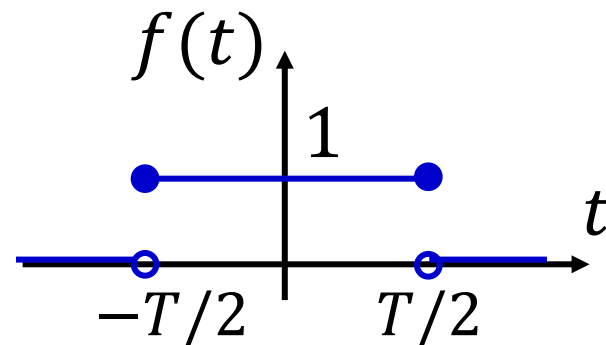
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt} + \int_{-T/2}^{T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 1}{dt} + \int_{T/2}^{\infty} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt}$$

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt =$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



- Cálculo da Transformada de Fourier:

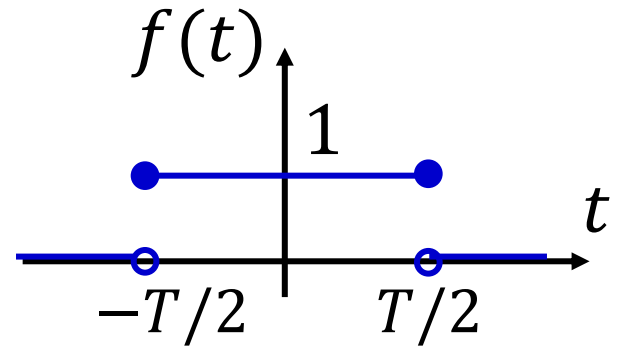
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt} + \int_{-T/2}^{T/2} \cancel{f(t)} \overset{= 1}{e^{-i\omega t}} dt + \int_{T/2}^{\infty} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt}$$

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} =$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$



- Cálculo da Transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{-T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt} + \int_{-T/2}^{T/2} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 1}{dt} + \int_{T/2}^{\infty} \cancel{f(t)e^{-i\omega t}} \overset{= 0}{dt}$$

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right)$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{\frac{-i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$
$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right)$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$
$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right) = \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

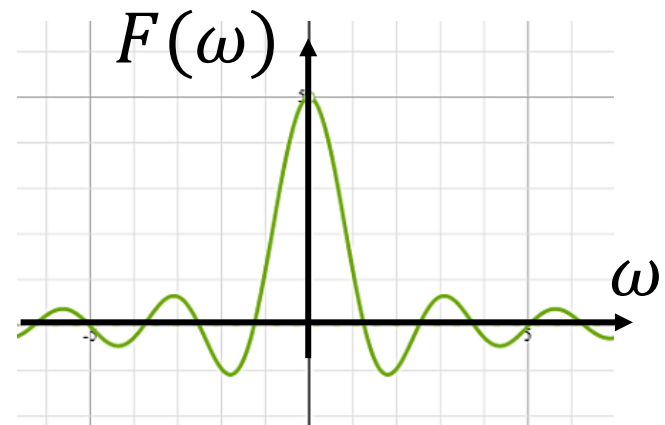
$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$
$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right) = \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$
$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right) = \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



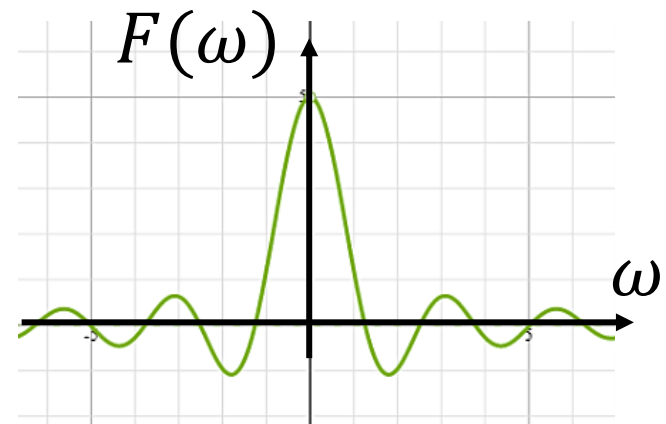
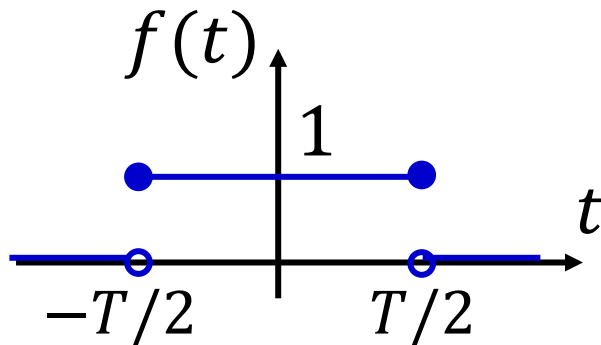
Exemplo 2: encontrar a Transformada de Fourier de f .

$$F(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\omega} \left(\frac{-e^{-\frac{i\omega T}{2}} + e^{\frac{i\omega T}{2}}}{i} \right) \quad (\times \frac{2}{2})$$

$$= \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{\frac{i\omega T}{2}} - e^{-\frac{i\omega T}{2}}}{2i} \right) = \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \frac{2}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



5 - Propriedades da Transformada de Fourier

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

- Sejam as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ integráveis e suas respectivas transformadas $F(\omega)$, $G(\omega)$ e $H(\omega)$. Ainda, os coeficientes complexos a e b .

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

- Sejam as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ integráveis e suas respectivas transformadas $F(\omega)$, $G(\omega)$ e $H(\omega)$. Ainda, os coeficientes complexos a e b .

1. Superposição e linearidade

Se $f(t) = ag(t) + bh(t)$, então $F(\omega) = aG(\omega) + bH(\omega)$

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

- Sejam as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ integráveis e suas respectivas transformadas $F(\omega)$, $G(\omega)$ e $H(\omega)$. Ainda, os coeficientes complexos a e b .

1. Superposição e linearidade

$$\text{Se } f(t) = ag(t) + bh(t), \text{ então } F(\omega) = aG(\omega) + bH(\omega)$$

2. Deslocamento no eixo t

$$F(\omega)f(t - a) = e^{-ia\omega}F(\omega)$$

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

3. Deslocamento na frequência

$$\text{Se } f(t) = e^{i\omega_0 t} g(t), \text{ então } F(\omega) = G(\omega - \omega_0)$$

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

3. Deslocamento na frequência

$$\text{Se } f(t) = e^{i\omega_0 t} g(t), \text{ então } F(\omega) = G(\omega - \omega_0)$$

4. Mudança de escala

$$\text{Se } f(t) = g(at), \text{ então } F(\omega) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

3. Deslocamento na frequência

$$\text{Se } f(t) = e^{i\omega_0 t} g(t), \text{ então } F(\omega) = G(\omega - \omega_0)$$

4. Mudança de escala

$$\text{Se } f(t) = g(at), \text{ então } F(\omega) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. Transformada da derivada

$$\text{Seja } f(t) \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \text{ então } \mathcal{F}(f'(t)) = i\omega F(\omega)$$

5 – Propriedades da Transformada de Fourier

3. Deslocamento na frequência

$$\text{Se } f(t) = e^{i\omega_0 t} g(t), \text{ então } F(\omega) = G(\omega - \omega_0)$$

4. Mudança de escala

$$\text{Se } f(t) = g(at), \text{ então } F(\omega) = \frac{1}{|a|} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

5. Transformada da derivada

$$\text{Seja } f(t) \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \text{ então } \mathcal{F}(f'(t)) = i\omega F(\omega)$$

6. Teorema da convolução

$$\text{Seja } f(t) = g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(v)h(t - v)dv, \text{ então } F(\omega) = G(\omega)H(\omega)$$

Tabela de Transformada de Fourier

Na tabela, $\delta(t)$ é a delta de Dirac, $u(t)$ é a função de Heaviside, $\text{sgn}(t)$ é a função sinal, $\text{rect}(t)$ é a função retangular, $\text{tri}(t)$ é a função triangular e $\text{sinc}(t)$ é a função sinc = $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$

Tabela 1 - Alguns pares de transformadas de Fourier	
$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - a)$	$e^{-i a \omega}$
$u(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i \omega}$
1	$2\pi \delta(\omega)$

Tabela de Transformada de Fourier

$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{i\omega}$
$e^{i\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{i}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)$	$ a \cdot \text{sinc}\left(a\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{i\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2i}(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Tabela de Transformada de Fourier

t^n	$2\pi i^n \delta^n(\omega)$
$t^{n-1} e^{-at} u(t), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{(n-1)!}{(a+i\omega)^n}$
$e^{-a t }, \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\frac{\omega^2}{4\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{ t }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \omega }}$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$\operatorname{tri}(t)$	$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$



Exercícios

Exercícios: encontrar a Transformada de Fourier.

(a) Considere a função $f(t) = e^{-at^2}$, sendo $a > 0$ constante. Calcular a Transformada de Fourier e traçar o gráfico das duas funções em um software (Usar $a = 1$ nos gráficos).

$$\text{Resp.: } F(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4a}$$

(b) Considere a função $f(t) = \cos(t^2)$. Calcular a Transformada de Fourier e traçar o gráfico das duas funções em um software.

$$\text{Resp.: } F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\text{sen} \left(\frac{\omega^2}{4} \right) + \text{cos} \left(\frac{\omega^2}{4} \right) \right]$$

Sugestão para gráficos: <https://pt.symbolab.com/graphing-calculator>

Bibliografia

1. SAUTER, Esequia; AZEVEDO, Fabio S. (Org.). Análise de Fourier: um livro colaborativo. Porto Alegre: UFRGS, 2018. 103 p. Disponível em:
<https://www.ufrgs.br/reamat/TransformadasIntegrais/livro-af/livro.pdf>. Acesso em: 10 mai 2025.

Para depois desta aula:

- Estudar seções 6 e 7 da bibliografia.
- Resolver os exemplos.
- Praticar com os exercícios propostos

Próxima aula:

- Equações diferenciais.