TÓPICOS PARA FORMULÁRIO

Primeira Avaliação de Cálculo III

Semana 12 - Aula 1 Funções vetoriais

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$$

- A função vetorial define uma curva no espaço.

$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ Hélice de raio 1.

- Valem as mesmas regras de domínio, limites e continuidade de funções reais, mas aplicadas em cada componente.

Semana 12 - Aula 2 Derivadas e integrais de funções vetoriais

- Valem as mesmas regras de derivadas para as funções reais.

Se $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

$$= f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j} + h'(t)\,\mathbf{k}$$

vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t) = \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$

Semana 12 - Aula 2 Derivadas e integrais de funções vetoriais

- Valem as mesmas regras de integração para as funções reais.

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}$$

Semana 12 - Aula 3 Comprimento de arco e curvatura

- Comprimento de arco para curva C percorrida uma única vez.

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$$

- Curvatura.

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \Rightarrow \quad \kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

- Curvatura de uma curva no plano.

$$\mathbf{r}(x) = x\,\mathbf{i} + f(x)\,\mathbf{j}. \qquad \kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

Semana 13 - Aula 1 Campos vetoriais

- Campo vetorial no plano.

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

- Gradiente de uma função (campo vetorial)

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\,\mathbf{i} + f_y(x, y)\,\mathbf{j}$$

Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Integral de linha sobre uma curva C.

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

- Parametrização da circunferência de raio 1.

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t$$

- Integrais de linha em relação a x e y.

$$\int_C P(x, y)\, dx + \int_C Q(x, y)\, dy = \int_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Parametrização de um segmento de reta.

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

- Escrita compacta da integral de linha.

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

- Caso $f = 1$ a integral de linha é o comprimento da curva C.

$$\int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt = L$$

Semana 13 - Aula 2 Integrais de linha

- Cálculo do trabalho W de um campo de força F.

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z)\, ds = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

- Teorema das integrais de linha.

Seja C uma curva suave dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$. Seja f uma função diferenciável de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente ∇f é contínuo em C. Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

podemos avaliar a integral de linha de um campo vetorial conservativo simplesmente sabendo o valor de f nos pontos finais de C.

Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

- Teorema do campo conservativo.

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D se e somente se

$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado C em D.

A interpretação física é que o trabalho realizado por qualquer campo de força conservativo para mover um objeto ao redor de um caminho fechado é 0.

Semana 13 - Aula 3 Teorema das Integrais de linha

Teorema 5

Se $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial conservativo, onde P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D, então em todos os pontos de D temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Teorema 6

Seja $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ um campo vetorial em uma região aberta simplesmente conexa D. Suponha que P e Q tenham derivadas contínuas de primeira ordem e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Então $\mathbf{F}$ é conservativo.

Semana 14 - Aula 1 Teorema de Green

Seja C uma curva plana simples, fechada, contínua por partes, orientada positivamente, e seja D a região delimitada por C.

Se P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Outras notações

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \quad \text{ou} \quad \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Inserir coordenadas polares.

Semana 14 - Aula 2 Rotacional

- Rotacional de um campo vetorial $\boldsymbol{F}$.

Se $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o **rotacional** de $\mathbf{F}$ é o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\text{rot}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Outro modo de exprimir $\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$

$$\text{rot}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$$

Se $\boldsymbol{rotF} = \mathbf{0}$ o campo vetorial $\boldsymbol{F}$ é conservativo.

Semana 14 - Aula 2 Divergente

- Divergente de um campo vetorial $\boldsymbol{F}$.

Seja $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ um campo vetorial em R^3 em que as derivadas parciais de P, Q e R existem.

Então o divergente de **F** é a função de três variáveis definida por:

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Outro modo de exprimir $\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$

Semana 14 - Aula 2 Teorema de Green

- Forma vetorial.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div}\,\mathbf{F}(x, y)\, dA$$

Semana 14 - Aula 3 superfícies parametrizadas

- Parametrização da esfera. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta \, \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{j} + a \cos \phi \, \mathbf{k}$$

$$0 \leqslant \phi \leqslant \pi \text{ e } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

Plano tangente.

Vetor normal ao plano: $\boldsymbol{r_u} \times \boldsymbol{r_v} = < \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} >$.

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}$$

Equação: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_o}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_o}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_o}) = \mathbf{0}$

Semana 14 - Aula 3 Área de superfícies

Se uma superfície parametrizada suave S é dada pela equação

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k} \qquad (u, v) \in D$$

e S é coberta uma única vez quando (u, v) abrange todo o domínio D, então a **área da superfície** de S é

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

onde $\mathbf{r}_u = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_v = \dfrac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$

Semana 14 - Aula 3 Área de superfícies

- Área de superfícies do gráfico de uma função.

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Semana 15 - Aula 1 integral de superfície

- A integral de superfície é definida por:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v))\, |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA$$

- Essa integral tem estrutura semelhante à integral de linha:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, |\mathbf{r}'(t)|\, dt$$

- Quando a função no integrando é unitária a integral de superfície resulta na área de S.

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, dA = A(S)$$

Semana 15 - Aula 1 integral de superfície

- Uma superfície S definida pela equação $z = g(x, y)$ pode ser parametrizada com as variáveis da função.

$$x = x \qquad y = y \qquad z = g(x, y) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$$

- A integral de superfície é então redefinida por:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Semana 15 - Aula 1 integral de superfície de campos vetoriais

- A massa de fluido que passa por toda a superfície nos retalhos infinitesimais.
- O resultado é a integral de superfície da função $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ sobre S.

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \rho(x,y,z)\,\mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS$$

- Esta integral é interpretada como a vazão sobre S.
- Se escrevermos $\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{v}$, uma função vetorial a integral fica:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

Integral de superfície ou Integral de fluxo

Semana 15 - Aula 1 integral de superfície de campos vetoriais

Se $\mathbf{F}$ for um campo vetorial contínuo definido sobre uma superfície orientada S com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, então a **superfície integral de F sobre** S é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Essa integral é também chamada **fluxo** de $\mathbf{F}$ através de S.

Se S é uma função vetorial dada por $\mathbf{r}(u, v)$, então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, dA$$

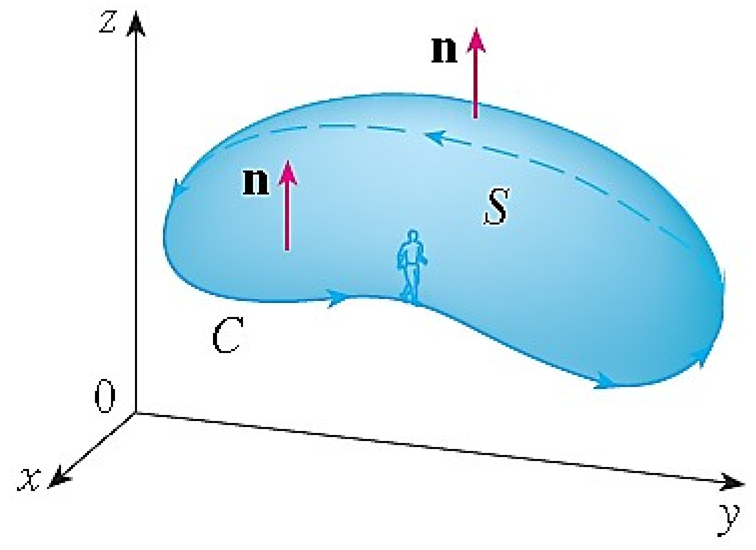
Semana 15 - Aula 1 Teorema de Stokes

Seja S uma superfície orientada, suave por partes, cuja fronteira é formada por uma curva C fechada, simples, suave por partes, com orientação positiva.

Seja $\boldsymbol{F}$ um campo vetorial cujas componentes têm derivadas parciais contínuas em uma região aberta de $\mathbb{R}^3$ que contém S. Então:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$



Semana 15 - Aula 1 Teorema do Divergente

Seja E uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E, orientada positivamente (para fora).

Seja $\boldsymbol{F}$ um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E. Então

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV$$

o Teorema do Divergente afirma que o fluxo de $\boldsymbol{F}$ pela fronteira de *E* é igual à integral tripla da divergência de $\boldsymbol{F}$ em *E*.

Sugestões para estudo

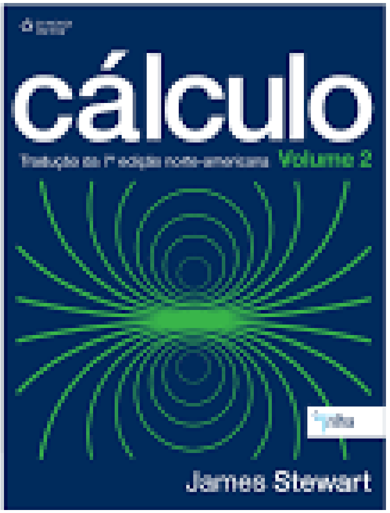
- Releia os slides apresentados na revisão.
- Refaça pelo menos 2 exercícios da lista de cada tópico.
- Utilize os softwares para o cálculo dás integrais mais complicadas.
- Entenda o processo de resolução, sem decorar os exemplos.
- Qualquer pequena mudança no exercício pode levar a um resultado completamente diferente.

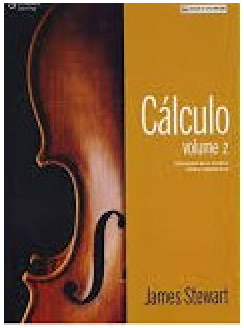
Bons estudos!

Referências

1. STEWART, James. Cálculo - volume 2. **7. ed.** São Paulo: Cengage, 2013.

Numeração dos exercícios com base na 7ª ed. ▶





STEWART, James. Cálculo - volume 2. **8. ed.** São Paulo: Cengage, 2016.